Stage Senior Pisa 2005 – Test Iniziale

Tempo concesso: 100 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia k il *numero* dei valori interi (relativi) di x per cui
$$\frac{x^2+x+2}{x+7}$$
è a sua volta intero. Allora
(**A**) $k=0$ (**B**) $1 \leq k \leq 5$ (**C**) $6 \leq k \leq 10$ (**D**) $k > 10$

2. Sia ABC un triangolo equilatero di lato unitario, e sia M il punto medio dell'altezza AH. Determinare il raggio della circonferenza circoscritta ad ABM.
(**A**) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (**D**) $\frac{\sqrt{31}}{4}$

3. Determinare il più grande intero positivo k per cui 6^k divide $666!$.
(**A**) 111 (**B**) 132 (**C**) 330 (**D**) 661

4. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(1)=7$ e $p(7)=1$. Allora $p(4)$ può essere
(**A**) solo 4
(**B**) un qualunque intero congruo a 4 modulo 7
(**C**) un qualunque intero congruo a 4 modulo 9
(**D**) un qualunque intero

5. Determinare quanti interi da 1 a 2005 (estremi compresi) sono differenza di due quadrati perfetti.
(**A**) 502 (**B**) 1003 (**C**) 1504 (**D**) 2005

6. Consideriamo, nel piano cartesiano, la circonferenza Γ di equazione $x^2+y^2-7x=20$ ed il punto $P=(2,3)$. Allora la potenza di P rispetto a Γ (presa sempre con il segno positivo) vale
(**A**) 21
(**B**) un numero intero diverso da 21
(**C**) un numero razionale non intero
(**D**) un numero reale non razionale

7. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a+b+c=1$. Determinare il massimo valore possibile per l'espressione a^3b^2c.
(**A**) 1 (**B**) $\frac{1}{432}$ (**C**) $\frac{1}{512}$ (**D**) $\frac{1}{3^6}$

8. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a+b+c=1$. Determinare *quante* delle seguenti disuguaglianze

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2 \leq a^2+b^2+c^2$$

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c} \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^3}{9}$$

sono sicuramente verificate.

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3

9. Determinare quanti sono gli interi tra 0 e 1000 che danno resto 9 quando vengono divisi per 10 e per 15, e danno resto 3 quando vengono divisi per 12.

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 16 (**D**) 17

10. Si definisce *ordine* di una permutazione il più piccolo intero positivo n con la proprietà che la permutazione, composta con se stessa n volte, dà la permutazione identica. Determinare l'ordine ed il segno della permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 9 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

(**A**) Ordine 30, segno 1

(**B**) Ordine 30, segno -1

(**C**) Ordine 5, segno -1

(**D**) Ordine 15, segno 1

11. Sia a_n la successione definita per ricorrenza da

$$a_0=0, \quad a_1=1, \qquad a_{n+2}=5a_{n+1}+6a_n,$$

e sia $b_n = a_n \cdot 6^{-n}$. Determinare quale delle seguenti affermazioni è vera.

(**A**) $b_{2005} < \frac{1}{7} < b_{2006}$ (**B**) $b_{2006} < \frac{1}{7} < b_{2005}$ (**C**) $\frac{1}{7} < b_{2006} < b_{2005}$ (**D**) $b_{2005} < b_{2006} < \frac{1}{7}$

12. Sono dati due punti A e B distinti del piano. Componendo nell'ordine

- una simmetria rispetto alla retta AB,
- una rotazione di 60° in verso orario attorno ad A,
- una rotazione di 60° in verso antiorario attorno a B,
- una simmetria rispetto alla retta AB,

otteniamo

(**A**) l'identità (**B**) una rotazione (**C**) una simmetria (**D**) una traslazione

13. Le scritture decimali di 2005^{2005} e 2005^{2007} hanno in comune un gruppo di (esattamente) k cifre finali. Quanto vale k?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) più di 4

14. Determinare quante sono le funzioni iniettive da $\{1, 2, 3, 4\}$ in $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ nella cui immagine non ci sono 2 interi consecutivi.

(**A**) 252 (**B**) 280 (**C**) 840 (**D**) 1920

15. Una omotetia del piano manda la retta $x = 1$ nella retta $x = 2$, e la retta $y = 2$ nella retta $y = 1$. Sulla base di queste informazioni, il punto fisso dell'omotetia

(**A**) è univocamente determinato

(**B**) può essere un qualunque punto del piano

(**C**) non è univocamente determinato, ma appartiene ad una retta opportuna

(**D**) non è individuabile perché la situazione è impossibile

16. Un grafo con 9 vertici non contiene cicli di lunghezza dispari. Determinare il massimo numero di lati del grafo.

(**A**) 12 (**B**) 15 (**C**) 18 (**D**) 20

Stage Senior Pisa 2005 – Test Finale

Problemi a risposta secca

1. Determinare quante sono le coppie di interi positivi a e b che sono *coprimi* e soddisfano $a+b = 2005$ (si intende che la coppia (a, b) e la coppia (b, a) sono considerate distinte).

2. Sia ABC un triangolo equilatero, e sia M il punto medio dell'altezza AH. Determinare il coseno dell'angolo $A\widehat{B}M$.

3. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(2) = p(7) = 1$ e $p(4) < 0$. Determinare il massimo valore possibile per $p(4)$.

4. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" che contengono la sequenza "GAS" (si intende che le tre lettere compaiono consecutivamente).

5. Sia n un quadrato perfetto, non multiplo di 3, la cui espressione decimale termina con la cifra 4. Determinare quale resto si ottiene dividendo n per 15.

6. Due ceviane dividono un triangolo in un quadrilatero e 3 triangoli. Determinare (se ce ne sono) i casi in cui i 3 triangoli hanno la stessa area.

7. Ad uno stage partecipano 30 studenti. Tra questi, i docenti sorteggiano a caso i 6 che andranno alla prossima IMO. La segreteria, ignara della decisione dei docenti, sorteggia a caso i 6 studenti a cui spedire i biglietti. Sia p la probabilità che almeno uno dei selezionati dai docenti riceva il biglietto. Scritta p sotto forma di frazione irriducibile m/n, determinare la cifra delle unità di m.

8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$
per ogni coppia di numeri reali x e y.

Problemi dimostrativi

9. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a + b + c = 1$.

   Dimostrare che
$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{3\sqrt{3}}.$$

10. Determinare tutti i rettangoli $m \times n$ tassellabili con pezzi 4×1.

11. Due circonferenze si intersecano in due punti distinti A e B. Una retta passante per A interseca nuovamente le due circonferenze in P e Q, rispettivamente. Sia R il punto medio di PQ. La retta BR interseca nuovamente le due circonferenze in S e T.

    Dimostrare che R è il punto medio di ST.

12. Determinare tutte le coppie (m, n) di interi positivi tali che
$$\frac{3}{m} + \frac{5}{n} = 1.$$

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	C	C	C	C	A	B	D	D	B	B	D	B	C	C	D

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Usare la divisione di polinomi.
2. Calcolati i lati di ABM, basta usare la formula per il raggio della circonferenza circoscritta in funzione di un lato e del seno dell'angolo opposto, oppure notare che BM è il lato dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza in questione.
3. Determinare, con la formula, le massime potenze di 2 e di 3 che dividono 666!.
4. Deve essere $p(x) = 8 - x + (x-1)(x-7)q(x)$.
5. Un intero è differenza di 2 quadrati perfetti se e solo se è congruo a 2 modulo 4.
6. Scritta l'equazione della circonferenza nella forma $x^2 + y^2 + \ldots = 0$, basta andare a sostituire le coordinate di P al posto di x e y, ed eventualmente prenderne il valore assoluto.
7. Usare GM-AM pesata (cioè con tre termini uguali ad $a/3$, due uguali a $b/2$ ed uno uguale a c).
8. Applicare $M_{3/2} \geq M_1$ per la prima, Cauchy-Schwarz per la seconda, $M_{3/2} \geq M_{1/2}$ per la terza.
9. Ridursi a congruenze modulo primi ed applicare il teorema cinese: si ottiene che gli interi in questione sono congrui a 39 modulo 60.
10. Ordine e segno si deducono facilmente dalla decomposizione in cicli (l'ordine è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli, mentre il segno di un ciclo è positivo se e solo se la sua lunghezza è dispari).
11. Trovare, con l'apposita formula, l'espressione esplicita di a_n.
12. Scrivere le varie trasformazioni usando i numeri complessi e poi comporle.
13. Dimostrare che i due numeri sono congrui tra di loro modulo 8, ma non modulo 16.
14. A meno di permutazioni, si tratta di determinare in quanti modi si possono scegliere 4 numeri su 10 senza coppie consecutive. Tali modi sono in corrispondenza biunivoca con i modi di scegliere 4 numeri su 7, senza ulteriori vincoli (basta aggiungerne/toglierne uno in ciascuno dei 3 tratti centrali). In alternativa, tolti 4 numeri su 10, i 6 rimasti risultano suddivisi in 5 tronconi di lunghezza $a_1, \ldots, a_5$ con $a_1 + \ldots + a_5 = 6$ e con i 3 addendi centrali maggiori od uguali a uno. Posto $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - 1$, $b_3 = a_3 - 1$, $b_4 = a_4 - 1$, $b_5 = a_5$, si ha che ...
15. La proprietà data implica che si tratta di un grafo bipartito (cioè con numero cromatico uguale a 2). I vertici sono quindi suddivisi in 2 categorie (bianchi e neri) e ogni lato unisce vertici di colore diverso.

Test Finale – Risposte

1. 1600
2. $5\sqrt{7}/14$
3. -5
4. 180
5. 4
6. Non ce ne sono
7. 7
8. L'unica soluzione è $f(x) = \dfrac{1}{2} - x$.
9. ...
10. Tutti e soli quelli che hanno un lato multiplo di 4.
11. ...
12. $(18, 6)$, $(8, 8)$, $(6, 10)$, $(4, 20)$

Test Finale – "Aiutini"

1. Occorre e basta che a non abbia fattori in comune con 2005. Ci si riduce quindi a calcolare $\phi(2005)$.
2. Calcolare le lunghezze dei lati di ABM ed applicare il teorema di Carnot.
3. Deve essere $p(x) = 1 + (x - 2)(x - 7)q(x)$.
4. Considerare la sequenza "GAS" come fosse una lettera sola.
5. L'intero n deve essere congruo a 1 modulo 3, e congruo a 4 modulo 5; applicare quindi il teorema cinese.
6. Dalle ipotesi segue che AD e BE dovrebbero bisecarsi e quindi il quadrilatero $ABDE$ sarebbe un ...
7. Conviene calcolare la probabilità del complementare. I casi possibili sono i modi di scegliere 6 studenti tra 30; i casi favorevoli i modi di scegliere 6 studenti tra i 24 che non vanno all'IMO.
8. Vi sono almeno 3 approcci:

- porre $y = 0$ e $f(0) = a$: si trova una formula per $f(x - a)$ da cui se ne ricava facilmente una per $f(x)$;
- porre $x = 0$ e dimostrare che f è surgettiva: a questo punto esiste a tale che $f(a) = 0$ e si può quindi porre $y = a$ ottenendo ...
- porre $x = f(y)$.

9. Vi sono vari approcci.
   - Omogenizzare e dimostrare quello che si trova usando $M_{3/2} \geq M_{1/2}$ e $M_{3/2} \geq M_1$.
   - Applicare Chebycheff e poi $M_1 \geq M_{1/2}$.
   - Dimostrare, usando le disuguaglianze tra medie, che il termine di sinistra è maggiore od uguale di $1/\sqrt{3}$, mentre quello di destra è minore od uguale di $1/\sqrt{3}$.

10. Il punto delicato è escludere il caso in cui m ed n sono congrui a 2 modulo 4. Questo si può fare con varie colorazioni:
    - colorando a striscie del tipo BNBR (in ogni pezzo la differenza $R - N$ è multipla di 4, mentre su tutto il rettangolo ...);
    - colorando le caselle con entrambe le coordinate dispari (ogni pezzo ne contiene 0 o 2, ma in totale ...);
    - colorando a scacchiera con quadrati 2×2 (ogni pezzo contiene lo stesso numero di caselle dei 2 colori, ma in totale ...);
    - colorando a strisce verticali con due colori per dimostrare che i pezzi "in orizzontale" dovrebbero essere in numero dispari, poi a strisce orizzontali per dimostrare che anche i pezzi "in verticale" dovrebbero essere un numero dispari, mentre in totale i pezzi sono ...

11. Vi sono almeno due approcci.
    - Dimostrare che i triangoli RSP e RTQ sono congruenti (attenzione: è facile incappare in problemi di configurazione!).
    - Scrivere la potenza di R rispetto alle 2 circonferenze.

12. Con semplici passaggi ci si riduce a $m = -3n/(5 - n)$. Facendo la divisione di polinomi ...