Stage Senior Pisa 2006 – Test Iniziale

Tempo concesso: 120 minuti **Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia ABC un triangolo scaleno, e siano K, L, M, rispettivamente, i piedi dell'altezza, della bisettrice e della mediana uscenti dal vertice A.

   Alberto afferma: "L sta tra K ed M".

   Barbara afferma: "K sta tra L ed M".

   Cristina afferma: "M sta tra K ed L".

   Determinare chi ha ragione.

   (**A**) Alberto (**B**) Barbara (**C**) Cristina (**D**) Dipende dal triangolo

2. Determinare quanti sono gli interi positivi n tali che 6^6 divide n ed n divide 666^6.

   (**A**) 36 (**B**) 42 (**C**) 49 (**D**) 343

3. Sia $M = \max\{abc : \ a + 2b + 3c = 1, \ a \geq 0, \ b \geq 0, \ c \geq 0\}$. Allora

   (**A**) $M \leq \frac{1}{150}$ (**B**) $\frac{1}{150} < M \leq \frac{1}{130}$ (**C**) $\frac{1}{130} < M \leq \frac{1}{100}$ (**D**) $M > \frac{1}{100}$

4. Sia k il numero di coppie (a, b) di interi (relativi) tali che

   $$\left(99 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 100.$$

   Allora

   (**A**) $k \leq 5$ (**B**) $6 \leq k \leq 11$ (**C**) $12 \leq k \leq 17$ (**D**) $k \geq 18$

5. Sia θ l'angolo compreso tra 2 facce di un tetraedro regolare. Determinare $\tan\theta$.

   (**A**) $\sqrt{3}$ (**B**) 2 (**C**) $2\sqrt{2}$ (**D**) 3

6. Determinare la più piccola costante k tale che

   $$a + 3b - 8c \leq k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

   per ogni terna di numeri reali a, b, c.

   (**A**) 12 (**B**) $2\sqrt{3}$ (**C**) $4\sqrt{3}$ (**D**) $\sqrt{74}$

7. In un triangolo ABC si ha che $AB = 35$, $BC = 36$, $CA = 38$. Sia D il punto in cui il lato AB è tangente alla circonferenza inscritta. Sia E il punto in cui la circonferenza ex-inscritta tangente ai prolungamenti dei lati BC e AC è tangente al lato AB.

   Determinare DE.

   (**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4

8. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(13) = 31$ e $p(15) = 51$.

   Determinare quale dei seguenti valori *non* può essere $p(17)$.

   (**A**) 7 (**B**) 771 (**C**) 71 (**D**) 711

9. Sia $n \geq 4$ un intero. Un grafo ha n vertici, da ciascuno dei quali partono 3 lati. Tutto ciò è possibile ...

(**A**) sempre

(**B**) se e solo se n è pari

(**C**) se e solo se n è multiplo di 4

(**D**) se e solo se $n \equiv 1 \pmod 3$

10. Sia $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che $|f(A)| = n - 1$.

(**A**) $(n-1)n!$ (**B**) $n\binom{n}{2}n!$ (**C**) $\binom{n}{2}(n-1)!$ (**D**) $\binom{n}{2}n!$

11. Dato un primo $p > 3$, indichiamo con $R_2(p)$ l'insieme dei residui quadratici modulo p, e con $R_4(p)$ l'insieme dei residui delle quarte potenze modulo p. Allora

(**A**) per qualche p esistono elementi in $R_4(p)$ che non stanno in $R_2(p)$.

(**B**) di sicuro $R_4(p) \subseteq R_2(p)$ e non si ha mai uguaglianza.

(**C**) di sicuro $R_4(p) \subseteq R_2(p)$ e si ha uguaglianza per un numero finito (non nullo) di primi.

(**D**) di sicuro $R_4(p) \subseteq R_2(p)$ e si ha uguaglianza per infiniti primi.

12. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alberto afferma: "Se $f(x)$ è surgettiva, allora $f(x^3)$ è surgettiva".

Barbara afferma: "Se $f(x)$ è surgettiva, allora $f(x^2)$ è surgettiva".

Cristina afferma: "Se $f(x^3)$ è surgettiva, allora $f(x)$ è surgettiva".

Dario afferma: "Se $f(x^2)$ è surgettiva, allora $f(x)$ è surgettiva".

Determinare chi ha ragione.

(**A**) Tutti (**B**) Tutti tranne Barbara (**C**) Solo Alberto e Cristina (**D**) Solo Barbara e Dario

13. Si definisce *ordine* di una permutazione il più piccolo intero positivo n con la proprietà che la permutazione, composta con se stessa n volte, dà la permutazione identica.

Determinare il massimo ordine possibile per una permutazione su 10 elementi.

(**A**) 10 (**B**) 21 (**C**) 30 (**D**) 36

14. Simone frettolosamente afferma che "La differenza tra l'inverso di 3 modulo p e l'inverso di 12 modulo p è sempre uguale all'inverso di 4 modulo p".

Sottintendendo che p è un primo, questo enunciato è vero

(**A**) se e solo se $3 < p < 12$.

(**B**) per ogni $p > 3$.

(**C**) se e solo se $3 < p < 12$ oppure $p \equiv 1 \pmod{12}$.

(**D**) se e solo se $p > 3$ e $p \not\equiv 1 \pmod{12}$.

15. Due rette distinte si intersecano in un punto O. Sia Γ una circonferenza tangente ad entrambe le rette, e sia A uno dei punti di tangenza. Applichiamo l'inversione con centro in O e raggio OA, e sia Γ' l'immagine di Γ. Allora ...

(**A**) Γ e Γ' hanno (esattamente) 2 punti in comune.

(**B**) $\Gamma = \Gamma'$ perché tutti i punti di Γ restano fissi.

(**C**) $\Gamma = \Gamma'$, non tutti i punti di Γ restano fissi, il centro di Γ resta fisso.

(**D**) $\Gamma = \Gamma'$, non tutti i punti di Γ restano fissi, il centro di Γ non resta fisso.

16. Sia p il più piccolo primo dispari con questa proprietà: "esiste un intero a tale che $a^{64} + 1$ è multiplo di p". Allora

(**A**) $p < 50$ (**B**) $50 < p < 150$ (**C**) $150 < p < 250$ (**D**) $p > 250$

Stage Senior Pisa 2006 – Test Finale

Problemi a risposta secca

1. Un intero n dà resto 12 quando viene diviso per 35, e resto 13 quando viene diviso per 24. Determinare il resto che si ottiene dividendo n per 15.

2. Un triangolo ha i vertici nei punti $(6, 0)$, $(4, 4)$, $(1, 5)$ del piano cartesiano. Determinare le coordinate del suo ortocentro.

3. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$ e $p(3) > 3$. Determinare il minimo valore possibile per $p(3)$.

4. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" in cui non ci sono vocali tra la prima e l'ultima consonante (ed in cui pertanto le consonanti appaiono tutte consecutivamente).

5. Determinare quale resto si ottiene dividendo 2006^{2006} per 90.

6. Sia ABC un triangolo acutangolo, sia AH una sua altezza ed O il suo circocentro. Sapendo che $B\widehat{A}H = 47°$ e $B\widehat{A}C = 57°$, determinare l'ampiezza dell'angolo $H\widehat{A}O$.

7. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che
   - $f(x) \neq x$ per ogni $x \in A$;
   - $f(f(f(x))) = x$ per ogni $x \in A$.

8. Determinare la più piccola costante M tale che
$$x^2y + y^2z + z^2x \leq M\sqrt{x^4 + y^4 + z^4}$$
per ogni terna di numeri reali x, y e z tali che $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problemi dimostrativi

9. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(x - f(y)) = y - f(x)$$
per ogni coppia di numeri reali x e y.

10. Determinare tutti i rettangoli $m \times n$ che si possono tassellare avendo a disposizione pezzi 2×2 e 3×3.

11. Due circonferenze Γ_1 e Γ_2 si intersecano in due punti distinti A e B. La retta passante per A e parallela alla congiungente i centri interseca nuovamente Γ_1 e Γ_2 in C e D, rispettivamente. La circonferenza di diametro CD interseca nuovamente Γ_1 e Γ_2 in P e Q, rispettivamente.
    (a) Dimostrare che P, B, D sono allineati.
    (b) Dimostrare che le rette CP, AB, DQ sono concorrenti.

12. (a) Determinare se esistono terne (x, y, z) di numeri interi tali che
$$z^2 = (x^2 - 1)(y^2 + 1) + 2006.$$
    (b) Determinare se esistono terne (x, y, z) di numeri interi tali che
$$z^2 = (x^2 - 1)(y^2 + 1) + 2007.$$

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	C	A	C	C	D	B	B	B	D	D	B	C	B	D	D

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Supposto wlog $AB < AC$ abbiamo che $BK < BL$ (basta guardare gli angoli in A) e $BL < BM$ (per le formule che danno queste lunghezze).

2. Deve essere $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 37^c$, con $a = 6$, $6 \leq b \leq 12$, $0 \leq c \leq 6$.

3. Applicando GM–AM si ricava che $\sqrt[3]{6abc} \leq 1/3$, da cui $M = 1/162$.

4. Svolgendo i calcoli si trova $99a + b + 1 = ab$ da cui
$$b = \frac{99a+1}{a-1} = 99 + \frac{100}{a-1}.$$
Attenzione: non può essere $a = 0$.

5. Pensiamo il tetraedro con base ABC e vertice V. Sia M il punto medio di BC. Allora nel triangolo AMV conosciamo tutti i lati, ed inoltre $V\widehat{M}A = \theta$.

6. Cauchy-Schwarz. Risulta $k = \sqrt{1^2 + 3^2 + 8^2}$. Si ha uguaglianza se e solo se $(a, b, c) = \lambda(1, 3, -8)$, con $\lambda \geq 0$.

7. Grazie a note formule (che si dimostrano dando dei nomi ai vari segmenti di tangenza e scrivendo dei sistemi di equazioni per ricavarli) si ha che $AD = BE = (b + c - a)/2$.

8. Intanto deve essere $p(x) = 31 + (x - 13)q(x)$. Sostituendo $x = 15$ si trova che $q(15) = 10$, da cui $q(x) = 10 + (x - 15)r(x)$ e $p(x) = 31 + 10(x - 13) + (x - 13)(x - 15)r(x)$. Sostituendo $x = 17$ si ricava che i valori ammissibili di $p(17)$ sono tutti e soli quelli congrui a 7 modulo 8.

9. In un grafo è impossibile avere un numero dispari di vertici da ciascuno dei quali parte un numero dispari di lati (double counting: la somma del numero dei lati che partono da ciascun vertice è uguale al doppio del numero totale dei lati). Se n è pari basta mettere n punti lungo una circonferenza e congiungere ciascun punto con i 2 vicini e l'opposto.

10. Ci sono n modi di scegliere il punto dell'insieme di arrivo che non sta nell'immagine, poi ci sono $\binom{n}{2}$ modi di scegliere i 2 punti dell'insieme di partenza con la stessa immagine (che d'ora in poi si possono considerare un elemento solo). Infine bisogna scegliere una funzione surgettiva tra 2 insiemi di $n - 1$ elementi.

11. È chiaro che le potenze quarte sono in particolare dei quadrati, da cui $R_4(p) \subseteq R_2(p)$. I 2 insiemi coincidono se e solo se $p \equiv 3 \pmod 4$. Detto infatti g un generatore della struttura moltiplicativa modulo p, gli elementi di $R_2(p)$ sono le potenze di g con esponente congruo ad un pari modulo $p - 1$, gli elementi di $R_4(p)$ sono le potenze di g con esponente congruo ad un multiplo di 4 modulo $p - 1$. Non è difficile vedere che tali insiemi di esponenti coincidono se e solo se $p - 1 \equiv 2 \pmod 4$.

12. La composizione di funzioni surgettive è surgettiva. Se una composizione è surgettiva, allora la funzione più esterna (l'ultima che si applica) è surgettiva. Per l'implicazione falsa basta trovare un controesempio.

13. Scritta la permutazione come prodotto di cicli, l'ordine è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli. Non è difficile convincersi che l'ordine risulta massimo quando la permutazione è prodotto di 3 cicli di lunghezza 2, 3, 5.

14. Moltiplicando tutto per 12 (che è un elemento invertibile se $p > 3$) ci si riduce a $4 - 1 \equiv 3 \pmod{p}$.

15. L'immagine di Γ è una circonferenza passante per A e tangente alle 2 rette, dunque è Γ stessa. Gli unici punti che restano fissi sono quelli la cui distanza da O è uguale ad OA: in particolare gli unici punti di γ che restano fissi sono i 2 punti di tangenza. Il centro di Γ dista da O più di OA, dunque non resta fisso, ma viene mandato in un altro punto interno a Γ.

16. Deve essere $\mathrm{ord}_p(a) = 128$ (perché non può essere più piccolo?). Di conseguenza $128|(p-1)$. Il più piccolo primo con questa proprietà è 257. Usando il generatore, si può verificare che effettivamente per $p = 257$ esiste un a come richiesto (cosa che comunque non serve per rispondere alla domanda).

Test Finale – Risposte

1. 7
2. $(9, 9)$
3. 9
4. 360
5. 46
6. 37
7. 40
8. 1
9. L'equazione funzionale non ha soluzioni.
10. Posti i vincoli ovvi $m \geq 2$ ed $n \geq 2$, i rettangoli tassellabili sono tutti e soli quelli che rientrano in una di queste 3 categorie:
    - 2 lati di lunghezza pari;
    - 2 lati di lunghezza dispari ma multipla di 3;
    - un lato di lunghezza dispari e l'altro di lunghezza multipla di 6.
11. ...
12. (a) Sì
    (b) No

Test Finale – "Aiutini"

1. Dalla prima informazione si deduce che $n \equiv 2 \pmod{5}$, dalla seconda che $n \equiv 1 \pmod{3}$.
2. I 3 punti stanno sulla circonferenza con centro in $(1, 0)$ e raggio 5. Spostando quindi in $(1, 0)$ l'origine delle coordinate si ha che in tale sistema di riferimento l'ortocentro è la somma dei vettori che individuano i 3 vertici. Non resta quindi che tornare nel riferimento iniziale.

3. Deve essere $p(x) = x + x(x-1)(x-2)q(x)$.

4. Il gruppo di consonanti può iniziare in prima, seconda, terza o quarta posizione. Una volta scelta la posizione delle consonanti ci sono 3 modi di anagrammare le vocali e $\frac{5!}{2\cdot 2}$ modi di anagrammare le consonanti.

5. Posto $n = 2006^{2006}$ si ha che $n \equiv 0 \pmod 2$, $n \equiv 1 \pmod 5$ ed $n \equiv (-1)^{2006} \equiv 1 \pmod 9$, da cui facilmente la tesi (volendo si può usare il teorema cinese).

6. In ogni triangolo si ha che $B\widehat{A}H = O\widehat{A}C = 90° - \beta$ (da cui segue che l'ortocento è il coniugato isogonale del circocentro) e pertanto l'angolo richiesto è $47° + 47° - 57°$.

7. Vi sono almeno 2 approcci.
   - Si tratta di una permutazione (perché?) composta da 2 cicli di lunghezza 3. Gli elementi che costituiscono i 2 cicli si possono scegliere in $\frac{1}{2} \cdot \binom{6}{3}$ modi (scelti gli elementi del primo ciclo, gli altri sono determinati, e bisogna dividere per 2 perché ...). Inoltre ogni ciclo può essere percorso in 2 modi diversi.
   - Un elemento x può essere mandato in 5 possibili y; y può essere mandato in 4 possibili z; z deve essere mandato in x. E poi uno dei restanti r può essere mandato in 2 possibili s; s deve essere mandato nel restante t e t deve essere mandato in r.

8. Per Cauchy-Schwarz
$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \sqrt{x^4 + y^4 + z^4} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

9. Poniamo $f(0) = a$. Sostituendo $x = 0$ otteniamo che $f(-f(y)) = y - a$, da cui segue che f è iniettiva e surgettiva. A questo punto vi sono almeno 2 modi di procedere.
   - Sostituendo $x = 0$ otteniamo che $f(x - a) = -f(x)$. Se $a = 0$, questa ci dice che f deve essere identicamente nulla; se $a \neq 0$ reiterando si ottiene che $f(x - 2a) = f(x)$ che non può essere perché ...
   - Detto b il numero reale tale che $f(b) = 0$ (esiste? è unico?) e posto $y = b$ si ottiene che f è costante, ma allora ...

10. Supponiamo che ci sia un lato dispari e l'altro non multiplo di 3. Colorando a strisce parallele al lato non multiplo di 3 ci avanza un numero ... di caselle di un colore. Tuttavia in ogni mattonella la differenza tra i quadratini dello stesso colore è multipla di 3 ... Per le restanti configurazioni occorre e basta esibire un esempio di tassellazione.

11. (a) I punti B e D stanno entrambi sulla perpendicolare a CP passante per P.
    (b) Vi sono almeno 2 approcci
       - le rette date sono 3 assi radicali;
       - le rette date sono le altezze di CBD.

12. (a) Porre $z = xy$ oppure $y = 0$ e poi usare che ogni dispari è differenza di 2 quadrati.
    (b) Ragionare modulo 8.