# Stage Senior Pisa 2007 – Test Iniziale

| **Tempo concesso**: 135 minuti | **Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5 |
|---|---|

1. Determinare *quante* sono le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(x + f(y)) = 2y - x + f(y) + 7$$
per ogni coppia di numeri reali $x$ e $y$.

   **(A)** Nessuna **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** Un numero finito, ma più di 2 **(E)** Infinite

2. Consideriamo la disuguaglianza
$$a^2b + b^2c + c^2a \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$
Alberto afferma che esistono terne di numeri reali $\ge 0$ per cui non è verificata.

   Barbara afferma che vale per ogni terna di numeri reali $\ge 0$, ma non per ogni terna di numeri reali.

   Cristina afferma che vale per ogni terna di numeri reali e si ha uguaglianza se e solo se $a = b = c$.

   Dario afferma che vale per ogni terna di numeri reali e si ha uguaglianza se e solo se $a = b = c \ge 0$.

   Chi ha ragione?

   **(A)** Alberto **(B)** Barbara **(C)** Cristina **(D)** Dario **(E)** Nessuno

3. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(1) = 1$, $p(2) = 4$, $p(3) = 9$, $p(4) = 16$, $p(5) < 25$.

   Determinare il massimo valore possibile per $p(5)$.

   **(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 24 **(D)** 21

   **(E)** Non è possibile determinarlo in quanto un siffatto polinomio non esiste

4. Sia $k$ la più piccola costante reale per cui $\sqrt[3]{x} \le k(x + 1)$ per ogni $x \ge 0$.

   Determinare quale delle seguenti disuguaglianze è verificata da $k^3$.

   **(A)** $k^3 \le \frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{8} < k^3 \le \frac{1}{7}$ **(C)** $\frac{1}{7} < k^3 \le \frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{6} < k^3 \le \frac{1}{5}$ **(E)** $k^3 \ge \frac{1}{5}$

5. Determinare quante sono le permutazioni di un insieme di 6 elementi che hanno almeno un punto fisso ed hanno ordine 6 (si ricorda che l'*ordine* di una permutazione è il più piccolo intero $n > 1$ per cui l'iterata $n$-esima della permutazione stessa è l'identità).

**(A)** 0 **(B)** 20 **(C)** 60 **(D)** 120 **(E)** 240

6. Sia $X$ un insieme con 2007 elementi. Sia $\mathcal{P}_2(X) = \{A \subseteq X : |A| \text{ è pari}\}$. Calcolare

$$\sum_{A \in \mathcal{P}_2(X)} |A|.$$

**(A)** $2007 \cdot 2^{2005}$ **(B)** $2007 \cdot 2^{2006}$ **(C)** $1003 \cdot 2^{2007}$ **(D)** $2006 \cdot 2^{2007}$

**(E)** $1003 \cdot 2^{2006}$

7. Un intero $k \geq 0$ si dice *d'annata* se esiste un grafo che ha 2007 vertici, in cui da ogni vertice partono esattamente $k$ lati. Ad esempio è facile verificare che $k = 0$ e $k = 2006$ sono interi d'annata.

Determinare quanti sono gli interi d'annata.

**(A)** 6 **(B)** 232 **(C)** 502 **(D)** 1004 **(E)** 2007

8. Un rettangolo è stato suddiviso in $2007 \times 2009$ quadratini di lato unitario, indicati con coppie $(i, j)$ di interi con $1 \leq i \leq 2007$ e $1 \leq j \leq 2009$. Alcuni amici vorrebbero eliminare un quadratino e tassellare la parte rimanente con pezzi $2 \times 1$.

Alberto afferma che è possibile se si elimina il quadratino $(1000, 1000)$.

Barbara afferma che è possibile se si elimina il quadratino $(729, 1355)$.

Cristina afferma che è possibile se si elimina il quadratino $(846, 1983)$.

Dario afferma che è possibile se si elimina il quadratino $(54, 2009)$.

Chi ha ragione?

**(A)** Tutti **(B)** Nessuno **(C)** Solo Alberto **(D)** Solo Cristina e Dario

**(E)** Solo Alberto e Barbara

9. Sia $ABC$ un triangolo equilatero. Applichiamo l'inversione rispetto al punto $A$ con raggio $AB$. L'immagine della retta $BC$ è

**(A)** la retta $BC$ stessa **(B)** la retta parallela a $BC$ passante per $A$

**(C)** la circonferenza circoscritta ad $ABC$ **(D)** la circonferenza con centro in $A$ e raggio $AB$

**(E)** la circonferenza tangente alle rette $AB$ e $AC$ nei punti $B$ e $C$, rispettivamente

10. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo con ortocentro $H$ e circocentro $O$. I punti $A$, $H$, $O$, $B$ stanno su una stessa circonferenza

**(A)** sempre **(B)** se e solo se $ABC$ è equilatero **(C)** se e solo se $CA = CB$
**(D)** se e solo se $\widehat{C} = 60°$ **(E)** se e solo se $\widehat{C} = 45°$

11. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo. Usando le notazioni standard, la distanza di $A$ dall'ortocentro è data dalla formula

**(A)** $\dfrac{a}{\tan\alpha}$ **(B)** $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$ **(C)** $a\cos\alpha$ **(D)** $\dfrac{a\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$ **(E)** $a\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

12. Consideriamo 2 circonferenze $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$, con centri distinti e raggi $r_1$ ed $r_2$, rispettivamente. Siano $d_1$ e $d_2$ le distanze del centro di $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$, rispettivamente, dall'asse radicale.

Determinare quale delle seguenti relazioni è sicuramente verificata.

**(A)** $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ **(B)** $d_1 d_2 = r_1 r_2$ **(C)** $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$ **(D)** $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$
**(E)** $d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2$

13. Determinare il più piccolo intero $n > 1$ per cui $7^n - 1$ è multiplo di 125.

**(A)** 20 **(B)** 25 **(C)** 50 **(D)** 100 **(E)** 124

14. Determinare quante sono le coppie ordinate $(a, b)$ di interi (relativi) tali che

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2007}.$$

**(A)** 8 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** 29 **(E)** 30

15. Sia $n$ il più piccolo intero maggiore di 1 tale che $n+1$ è multiplo di 2, $n+2$ è multiplo di 3, $n+3$ è multiplo di 4, e così via fino ad $n+9$ che è multiplo di 10.

Allora

**(A)** $n \leq 1000$ **(B)** $1000 < n \leq 2000$ **(C)** $2000 < n \leq 4000$ **(D)** $4000 < n \leq 8000$
**(E)** $n > 8000$

16. Determinare quanti sono gli interi positivi $n$ tali che

- $0 \leq n \leq 1000$;
- $n^2 - 1$ è multiplo di 1000.

**(A)** 2 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** 16 **(E)** 32

# Stage Senior Pisa 2007 – Test Finale

## Problemi a risposta rapida

1. Determinare quale resto si ottiene dividendo il polinomio $x^{2007} + 2007$ per $x^5 + 5$.
2. Sia $a_n$ la successione definita per ricorrenza da $a_0 = 2007$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$.

   Determinare la parte intera di $2^{-100} \cdot a_{100}$.
3. Determinare quante sono le funzioni $f : \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, 3\}$ tali che $|f^{-1}(\{2\})| = 3$.
4. In un'urna disponiamo le 8 lettere che compongono la parola "STAGISTI". Successivamente per 8 volte estraiamo una lettera a caso dall'urna, la segniamo su un foglio di carta, quindi la rimettiamo nell'urna per l'estrazione successiva.

   Determinare la probabilità che anagrammando le 8 lettere estratte si possa ottenere la parola "STAGISTI".
5. Determinare l'equazione dell'asse radicale delle 2 circonferenze di equazione $2x^2+2y^2+3x-5 = 0$ e $x^2 + y^2 - 3y = 0$.
6. Sia $ABC$ un triangolo acutangolo e sia $AK$ una sua altezza. Sia $A'$ l'ulteriore intersezione tra $AK$ e la circonferenza circoscritta ad $ABC$. Sia $H$ l'ortocentro.

   Sapendo che $AH = 6$ ed $AA' = 11$, determinare la lunghezza dell'altezza $AK$.
7. Determinare il più piccolo intero positivo $x$ tale che $7^{18} \cdot x - 1$ è multiplo di 125.
8. Determinare *quali* valori può assumere la cifra delle unità della potenza 2008-esima di un intero positivo.

## Problemi dimostrativi

9. Siano $a$, $b$, $c$, $d$ numeri reali positivi tali che $a + b + c + d = 1$.

   Dimostrare che
   $$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}.$$
10. Determinare tutti i rettangoli $m \times n$ che si possono tassellare con il classico tromino ad L (ottenuto rimuovendo un quadratino da un quadrato $2 \times 2$).
11. Siano date una circonferenza $\Gamma$ ed un retta $r$ che non la interseca. Sia $A$ un punto fisso su $\Gamma$ e sia $B$ un punto fisso su $r$. Sia $P$ un punto variabile su $\Gamma$, non allineato con $A$ e $B$, e sia $Q$ l'ulteriore intersezione tra $r$ e la circonferenza circoscritta ad $ABP$.

    Dimostrare che tutte le rette $PQ$ ottenute in questo modo hanno un punto in comune.
12. Dimostrare non esistono interi $n \geq 1$ per cui l'intero la cui espressione decimale è
    $$8\underbrace{0\ldots0}_{n}1$$
    risulta un quadrato perfetto.

# Test Iniziale – Risposte

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | E | B | C | D | A | D | E | C | D | A | A | A | D | C | C |

# Test Iniziale – "Aiutini"

1. Posto $y = 0$ si ottiene che $f$ è del tipo $f(x) = ax + b$. Sostituendo si verifica che l'unica soluzione è $f(x) = -x - 7$.

2. Applicando Cauchy-Schwarz alle terne $(a, b, c)$ e $(ab, bc, ca)$ si ottiene che la disuguaglianza vale per ogni terna di reali $a$, $b$ e $c$. Inoltre si ha uguaglianza se e solo se esiste $\lambda \geq 0$ tale che $(a, b, c) = \lambda(ab, bc, ca)$. Risolvendo il sistema (e prestando attenzione a non semplificare allegramente!) si ha che l'uguaglianza vale se e solo se $a = b = c \geq 0$ oppure 2 delle 3 variabili sono nulle. Questa è l'unione di 3 rette ed una semiretta dello spazio.

3. Deve essere $p(x) = x^2 + (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)q(x)$ da cui $p(5) = 25 + 24q(0)$. La scelta ottimale che rispetta il vincolo $p(5) < 25$ si ha per $q(0) = -1$.

4. Applicando AM–GM alla terna $(x, 1/2, 1/2)$ si vede che deve essere $k = \sqrt[3]{4}/3$.

5. L'ordine è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli che compongono la permutazione. Non potendosi avere un ciclo di lunghezza 6, dovremo per forza avere un punto fisso, un ciclo di lunghezza 2 ed un ciclo di lunghezza 3. Il punto fisso si può scegliere in 6 modi, il ciclo di lunghezza 2 in $\binom{5}{2}$ modi. A questo punto il ciclo di lunghezza 3 è fissato, ma ci sono 2 modi possibili di percorrerlo.

6. Double counting! Ogni elemento $x \in X$ viene contato tante volte quanti sono i sottoinsiemi di $X$ che lo contengono e hanno cardinalità pari. Questi a loro volta sono tanti quanti i sottoinsiemi di $X \setminus \{x\}$ con cardinalità dispari. Per un fatto generale i sottoinsiemi con cardinalità pari/dispari di un insieme con $n$ elementi sono $2^{n-1}$ (dimostrarlo!).

7. Gli interi d'annata sono tutti i pari tra 0 e 2006 (estremi inclusi). Per dimostrare che sono d'annata basta disporre 2007 punti lungo una circonferenza e poi collegare ogni punto con i $k/2$ che stanno alla sua destra ed i $k/2$ alla sua sinistra. Per dimostrare che i dispari non sono d'annata basta ricordare che in un grafo non è possibile avere un numero dispari di punti da cui parte un numero dispari di lati.

8. Coloriamo a scacchiera. Avanza un quadratino dello stesso colore dei vertici. Poiché ogni mattonella $2 \times 1$ ricopre 2 quadratini di colore diverso, dobbiamo eliminare un quadratino dello stesso colore dei vertici. È facile verificare che si tratta dei quadratini con le coordinate della stessa parità.

9. Una retta che non passa per il centro dell'inversione viene mandata in una circonferenza che passa per il centro dell'inversione. I punti $B$ e $C$ restano fissi.

10. Il fatto che i 4 punti stiano sulla stessa circonferenza è equivalente al fatto che $H$ ed $O$ vedono $AB$ sotto lo stesso angolo. Unsango le notazioni classiche si ha che $A\widehat{H}B = 180° - \gamma$ e $A\widehat{O}B = 2\gamma$. Non resta che uguagliare.

11. Nel triangolo $AHB$ l'angolo in $B$ misura $90° - \alpha$, l'angolo in $H$ misura $180° - \gamma$. Applicando il teorema dei seni di ha che

$$\frac{AH}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{c}{\sin(180° - \gamma)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}.$$

12. Il punto di minima distanza è l'intersezione tra l'asse radicale e la retta che congiunge i centri. Tale punto ha la stessa potenza rispetto alle 2 circonferenze. La potenza di un punto rispetto ad una circonferenza è uguale al quadrato del raggio meno il quadrato della distanza del punto stesso dal centro.

13. Si tratta di determinare l'ordine di 7 modulo 125. È immediato verificare che $7^2 \equiv -1 \pmod{25}$ e dunque $7^4 \equiv 1 \pmod{25}$. Ne segue che l'ordine di 7 modulo 25 è 4. Per verifica diretta si ha che $7^4 = 49^2 \not\equiv 1 \pmod{125}$, e pertanto l'ordine di 7 modulo 125 non è 4, ma un suo multiplo. Scritto $7^4 = 25k + 1$ e posto $7^{4h} = (25k + 1)^h \equiv 1 \pmod{125}$, dal binomio di Newton si vede che $(25k + 1)^h \equiv 1 + 25hk \pmod{125}$, e dunque $h$ deve essere come minimo 5.

14. Con semplici calcoli si arriva all'espressione

$$a = \frac{2007b}{b - 2007} = 2007 + \frac{2007^2}{b - 2007}.$$

Pertanto $b - 2007$ deve essere un divisore (positivo o negativo) di $2007^2 = 3^4 \cdot 223^2$. I divisori positivi di questo numero sono $(4 + 1)(2 + 1) = 15$. Non resta che moltiplicare per 2 per tener conto dei divisori negativi ed eliminare il caso $b = 0$.

15. Si tratta di risolvere un sistema di congruenze che ha $n = 1$ tra le sue soluzioni. Le altre soluzioni si ottengono aggiungendo un multiplo di $\mathrm{mcm}\{2, 3, \ldots, 9, 10\} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. La soluzione successiva è quindi 2521.

16. Deve essere $n^2 \equiv 1$ modulo 125 e modulo 8. Modulo 125 la congruenza ha 2 soluzioni ($\pm 1$), modulo 8 ha 4 soluzioni (le classi dei dispari). Per il teorema cinese del resto ci sono dunque $2 \cdot 4$ possibilità.

# Test Finale – Risposte

1. $-5^{401}x^2 + 2007$
2. 2009
3. 1792
4. $\dfrac{7!}{8^6}$
5. $3x - 6y - 5 = 0$
6. 17/2
7. 49
8. 0, 1, 5, 6.

9. ...
10. Posti i vincoli ovvi $m \geq 2$ ed $n \geq 2$, i rettangoli tassellabili sono tutti tranne quelli che hanno un lato uguale a 3 e l'altro dispari.
11. Il punto in comune è l'ulteriore intersezione tra $PQ$ e la circonferenza $\Gamma$.
12. ...

# Test Finale – "Aiutini"

1. Vi sono almeno 2 approcci:
   - trovare e dimostrare per induzione la formula che descrive il "resto" dopo $k$ passaggi della divisione;
   - usare le congruenze tra polinomi, dicendo che $x^5 \equiv -5 \pmod{x^5+5}$, dunque
   $$x^{2007} + 2007 \equiv (x^5)^{401} \cdot x^2 + 2007 \equiv (-5)^{401} \cdot x^2 + 2007 \pmod{x^5+5}.$$
2. Per una nota formula si ha che $a_n = 2^n \cdot 2007 + (2^n - 1) \cdot 3$.
3. I 3 elementi che vanno in 2 si possono scegliere in $\binom{8}{3}$ modi, ciascuno dei restanti 5 può andare in 2 valori diversi. Il numero delle funzioni è pertanto $\binom{8}{3} \cdot 2^5$.
4. Intanto la probabilità che le lettere estratte formino nell'ordine la parola STAGISTI è
   $$\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{8^6}.$$
   Poiché la probabilità di uscire di ogni suo anagramma è la stessa, non resta che moltiplicare per il numero degli anagrammi.
5. Basta sottrarre le 2 equazioni dopo averle fatte iniziare entrambe per $2x^2 + 2y^2$ (perché?).
6. Basta ricordare che $K$ è il punto medio di $HA'$.
7. Si ha che $\mathrm{ord}_{125}(7) = 20$ (vedi Test Iniziale). Dunque $7^{18} \cdot 7^2 \equiv 1 \pmod{125}$.
8. Si ha che $a^{2008} \equiv a \equiv 0,\ 1 \pmod 2$ e $a^{2008} \equiv a^4 \equiv 0,\ 1 \pmod 5$. Dal teorema cinese si ricavano le 4 possibili classi modulo 10.
9. Segue banalmente dalle 2 disuguaglianze
   $$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq \frac{1}{8}, \qquad 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$
   La prima deriva da CM–AM. La seconda si può dimostrare in almeno 2 modi:
   - applicando Chebycheff alle quadruple $\{a, b, c, d\}$ e $\{a^2, b^2, c^2, d^2\}$;
   - moltiplicando $\mathrm{CM}^2 \geq \mathrm{QM}^2$ per $\mathrm{CM} \geq \mathrm{AM}$.

   In alternativa si poteva omogenizzare ed usare il bunching (sigh!).

10. Si può procedere in vari passi
    - se l'area non è multipla di 3 c'è poco da fare ...;
    - se l'area è multipla di 6 si tassella con rettangoli $3 \times 2$ (risultato classico);
    - il caso $3 \times$ dispari si esclude o ragionando direttamente su come possono essere disposti i pezzi in un angolo, o colorando "un quadratino su 4" a partire dai vertici e osservando che così ogni pezzo copre al massimo un quadratino colorato, mentre i quadratini colorati sono in realtà più di un terzo;
    - il $9 \times 5$ si tassella (con un po' di fatica) e fatto questo ogni altro rettangolo tassellabile si riduce ai casi precedenti.

11. Sia $S$ l'ulteriore intersezione tra $PQ$ e $\Gamma$. L'idea è dimostrare che l'angolo $\angle APS$ ha ampiezza costante (in realtà ha 2 possibili ampiezze ...), dunque $S$ è fisso. Per far questo occorre considerare varie configurazioni, a seconda che $P$ e $Q$ stiano o no nello stesso semipiano delimitato dalla retta $AB$. Se ad esempio $P$ e $Q$ stanno nello stesso semipiano si usa la ciclicità di $APQB$.

12. Il problema si riduce all'equazione $8 \cdot 10^{n+1} = a^2 - 1$. Osservato che $a$ è dispari, e posto $a = 2k + 1$, ci si riconduce all'equazione $2^{n+2} \cdot 5^{n+1} = k(k + 1)$. Ora i 2 fattori al rhs sono coprimi, dunque ci sono 2 possibilità ... entrambe impossibili in quanto $5^{n+1} > 2^{n+2} + 1$ per ogni $n \geq 1$ (facile induzione che comunque va fatta).