Stage Senior Pisa 2008 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia $m = \min\{x + 2y + 3z : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^3y^2z = 1\}$.

   Determinare quale delle seguenti disuguaglianze è vera.

   (A) $m^3 \leq 70$ **(B)** $70 < m^3 \leq 80$ **(C)** $80 < m^3 \leq 90$ **(D)** $90 < m^3 \leq 100$

   (E) $100 < m^3$

2. Determinare *quanti* sono gli interi (relativi) a per cui esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che $p(0) = p(1) = p(3) = 17$ e $|p(a)| < 17$.

   (A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** infiniti

3. Tre amici stanno esaminando un esercizio in cui sono date 2 quaterne (a, b, c, d) e (x, y, z, w) di numeri *reali positivi* che soddisfano le seguenti disuguaglianze:

   $$x + y + z + w \geq 6, \qquad ax + by + cz + dw \leq 18, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{w}{d} \leq 2.$$

   Alberto afferma che la situazione è impossibile.

   Barbara afferma che la situazione è possibile e permette di individuare in maniera univoca il valore di b.

   Cristina afferma che la situazione è possibile e permette di individuare in maniera univoca il valore di z.

   Chi ha ragione?

   (A) Solo Alberto **(B)** Solo Barbara **(C)** Solo Cristina

   (D) Solo Barbara e Cristina **(E)** Nessuno

4. Determinare *quante* sono le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

   $$f(x + yf(x)) = 2xy + 3y + f(x)$$

   per ogni coppia di numeri reali x e y.

   (A) Nessuna **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** Un numero finito, ma più di 2 **(E)** Infinite

5. Un intero positivo si dice *debolmente crescente* se le sue cifre (in base 10), lette da sinistra verso destra, formano una successione debolmente crescente. Ad esempio, 13377 e 13568 sono numeri debolmente crescenti, mentre 10345 e 15466 non lo sono.

   Determinare quanti sono i numeri debolmente crescenti di 5 cifre (si intende che la cifra più a sinistra *non* può essere 0).

   (A) $13 \cdot 11 \cdot 9$ **(B)** $14 \cdot 13 \cdot 11$ **(C)** 9^5 **(D)** $14 \cdot 9$ **(E)** $\frac{9!}{5!}$

6. Sono dati 5 punti A, B, C, D, E.

   Determinare quanti sono i grafi che soddisfano le seguenti 3 condizioni:

   - hanno questi 5 punti come (unici) vertici;
   - contengono *almeno* 5 lati;
   - non contengono nessun triangolo.

   (A) 52 **(B)** 71 **(C)** 72 **(D)** 82 **(E)** 88

7. Sia $X = \{1, 2, \ldots, 2007, 2008\}$, sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X, e sia

$$S = \left\{(A, B) \in [\mathcal{P}(X)]^2 : A \subseteq B\right\}.$$

   Determinare quanti sono gli elementi dell'insieme S.

   (A) $2008 \cdot 2^{2008}$ **(B)** $2008^2 \cdot 2^{2008}$ **(C)** 2^{4015} **(D)** 3^{2008} **(E)** 4^{2008}

8. Un quadrato è suddiviso a scacchiera in 79×79 quadratini di lato unitario (caselle). Rimuoviamo le 4 caselle che stanno al centro dei 4 lati. Vogliamo ora piazzare delle mattonelle 3×1 nella rimanente parte della scacchiera, rispettando la quadrettatura ed evitando di creare sovrapposizioni e di uscire dai bordi.

   Determinare il minimo numero di caselle che rimarranno scoperte, oltre a quelle rimosse inizialmente.

   (A) 0 **(B)** 3 **(C)** 6 **(D)** 9 **(E)** 12

9. Sia $ABCD$ un quadrilatero, e sia P il punto di incontro delle diagonali. Siano O_1, O_2, O_3, O_4, rispettivamente, i circocentri dei triangoli ABP, BCP, CDP, DAP.

   Il quadrilatero $O_1O_2O_3O_4$ risulta ciclico se e solo se

   (A) $ABCD$ è un quadrato **(B)** $ABCD$ è un rettangolo **(C)** $ABCD$ è un rombo

   (D) le diagonali di $ABCD$ sono perpendicolari **(E)** $ABCD$ è ciclico

10. Sia ABC un triangolo, sia H il piede dell'altezza uscente da A, e sia O il circocentro.

    Determinare, usando le notazioni standard (R è il raggio della circonferenza circoscritta, r il raggio di quella inscritta), quale delle seguenti formule rappresenta sempre OH^2.

    (A) $4r^2\cos^2\alpha$ **(B)** $R^2 - bc\cos^2\alpha$ **(C)** $R^2 - 4r^2\sin\beta\sin\gamma$ **(D)** $\dfrac{b^2+c^2-a^2\sin^2\alpha}{15}$

    (E) $R^2(1-\sin(2\beta)\sin(2\gamma))$

11. Siano I_a, I_b, I_c gli ex-centri di un triangolo ABC (si intende che AI_a è la bisettrice *interna* dell'angolo in A, e così via).

    Alberto afferma che sempre si ha che $\angle I_bI_cI_a + \angle BCI_c = 90°$.

    Barbara afferma che l'incentro di ABC è sempre l'ortocentro di $I_aI_bI_c$.

    Cristina afferma che l'asse radicale degli ex-cerchi con centro in I_b ed I_c passa sempre per il punto medio di BC.

    Chi ha ragione?

    (A) Solo Alberto **(B)** Solo Barbara **(C)** Solo Alberto e Cristina

    (D) Solo Alberto e Barbara **(E)** Tutti

12. Sia ABC un triangolo isoscele con $AB = AC$, e sia Γ la sua circonferenza *circoscritta*. Applichiamo l'inversione rispetto alla circonferenza con centro in A e passante per B e C.

    Tale inversione manda la circonferenza *inscritta* ad ABC nella circonferenza

    (A) circoscritta ad ABC (cioè Γ)

    (B) ex-inscritta ad ABC con centro sulla bisettrice interna all'angolo in A

    (C) tangente alle rette AB ed AC e tangente *internamente* a Γ

    (D) tangente alle rette AB ed AC e tangente *esternamente* a Γ

    (E) tangente alle rette AB ed AC e tangente *esternamente* alla circonferenza di inversione

13. Consideriamo la seguente affermazione: "per ogni coppia di interi x e y si ha che $37x + 13y$ è multiplo di 45 se e solo se $ax + 2008y$ è multiplo di 45".

    Determinare per quale dei seguenti valori di a l'affermazione è vera.

    (A) 182 **(B)** 187 **(C)** 192 **(D)** 194 **(E)** 197

14. Determinare quante sono le coppie ordinate (a, b) di interi *positivi* tali che

$$a^2 - b^2 = 10500.$$

(A) 8 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 32 **(E)** 48

15. Sia d il massimo comun divisore di tutti gli interi della forma $n^{31} - n$, al variare di n nell'insieme degli interi positivi.

Determinare quanti sono i divisori (positivi) di d.

(A) 1 (cioè $d = 1$) **(B)** 2 **(C)** 16 **(D)** 32 **(E)** 48

16. Sia

$$D := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \text{ e } n \text{ divide } 12^n + 1\}.$$

Determinare il massimo comun divisore di tutti gli elementi di D.

(A) 1 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 13 **(E)** 143

Stage Senior Pisa 2008 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Siano a_1, a_2, a_3, a_4 le radici (eventualmente complesse e ripetute a seconda della molteplicità) del polinomio
$$x^4 + 7x^3 - 13x^2 + 17x - 5.$$
Calcolare
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}.$$

2. Determinare la più piccola costante M tale che
$$x^2y + y^2z + z^2x \leq M\sqrt{x^3y + y^3z + z^3x}$$
per ogni terna di numeri reali positivi x, y, z tali che $x + y + z = 48$.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" che *non* iniziano con una "S" *e non* terminano con una "I".

4. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinare quante sono le funzioni $f : X \to X$ che soddisfano le seguenti 2 condizioni:
   - $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5\}$;
   - $f^{-1}(\{4, 5\}) = \{1, 2, 3, 6\}$.

5. Determinare le coordinate del centro della circonferenza di Feuerbach del triangolo con vertici nei punti $(3, 4)$, $(-5, 0)$, $(0, -5)$ del piano cartesiano.

6. Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano BL e CN due sue altezze. Si sa che $CN = 10$ e $\cos(A\widehat{B}L) = 2/5$.
Determinare AC.

7. Determinare il più grande intero $n < 2008$ per cui $17^n - 1$ è multiplo di 360.

8. Siano x, y, z, w interi positivi tali che
$$10x + 2 = 401y + 7, \qquad 3x - w = 401z.$$
Determinare il minimo valore possibile per w.

Problemi dimostrativi

9. Siano a, b, c, d numeri reali positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.
Dimostrare che
$$a^2b^2cd + ab^2c^2d + abc^2d^2 + a^2bcd^2 + a^2bc^2d + ab^2cd^2 \leq \frac{3}{32}.$$

10. Sia n un intero positivo. Determinare quante sono le parole di n lettere che soddisfano le seguenti tre condizioni:
    - contengono solo le lettere A, B, C;
    - iniziano e finiscono con una A;
    - non contengono due lettere consecutive uguali.

11. Dimostrare che il centro radicale delle tre circonferenze ex-inscritte ad un triangolo ABC è l'incentro del triangolo mediale (quello cioè che ha come vertici i punti medi dei lati di ABC).

12. Determinare tutte le coppie (a, b) di interi non negativi per cui $6^a + 2^b + 2$ risulta un quadrato perfetto.

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B	C	B	C	A	D	D	C	D	E	E	D	B	A	D	D

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Applicando AM–GM alla sestupla $(x/3, x/3, x/3, y, y, 3z)$ si ottiene che $m = 6/\sqrt[3]{3}$, da cui $m^3 = 72$.

2. Deve essere $p(x) = 17 + x(x-1)(x-3)q(x)$. Per $a \geq 5$ e $a \leq -3$ si ha che $|a(a-1)(a-3)q(a)|$ è o nullo o maggiore di 40, e nessuno dei 2 casi va bene. Per i restanti valori di a (diversi ovviamente da 0, 1, 3) si vede che, scegliendo opportunamente $q(a)$, si riesce ad ottennere $|p(a)| < 17$. Pertanto i valori possibili di a sono -2, -1, 2, 4.

3. Applicando Cauchy-Schwarz alle quaterne

$$A = \left(\sqrt{ax}, \sqrt{by}, \sqrt{cz}, \sqrt{dw}\right), \qquad B = \left(\sqrt{x/a}, \sqrt{y/b}, \sqrt{z/c}, \sqrt{w/d}\right)$$

si ottiene che

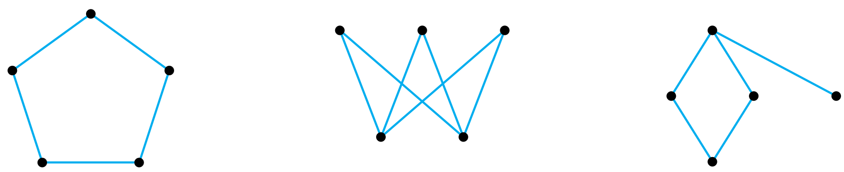
$$6 \leq x + y + z + w \leq (ax + by + cz + dw)^{1/2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{w}{d}\right)^{1/2} \leq 6.$$

Ne segue che le disuguaglianze sono tutte uguaglianze, dunque $A = \lambda B$ (perché?). Risolvendo il sistema (e prestando attenzione a giustificare le semplificazioni!) si ottiene che $a = b = c = d = 3$, mentre basta che $x + y + z + w = 6$, senza ulteriori vincoli (se non la positività delle 4 variabili).

4. Posto $x = 0$ si ottiene che f è una funzione del tipo $f(x) = ax + b$ (attenzione: per questo passaggio serve che $f(0) \neq 0$: come si giustifica?). Sostituendo si trovano le 2 soluzioni $f(x) = \pm(\sqrt{2}\,x + 3/\sqrt{2})$.

5. Siano a, b, c, d, e, nell'ordine, le cifre di un numero debolmente crescente di 5 cifre. Allora $\{a, b+1, c+2, d+3, e+4\}$ è un sottoinsieme di 5 elementi *distinti* di $\{1, 2, \ldots, 13\}$. Si verifica facilmente che tale associazione tra numeri debolmente crescenti di 5 cifre e sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, 13\}$ è biunivoca. Pertanto la risposta è $\binom{13}{5}$.

6. La prima cosa da dimostrare è che i grafi richiesti possono essere solo dei seguenti 3 tipi.



Per dimostrarlo vi sono almeno 2 approcci.

- Non essendo un albero, il grafo deve contenere o un 5-ciclo o un 4-ciclo. Nel caso del 5-ciclo non c'è altro da fare. Nel caso del 4-ciclo, si può aggiungere un lato o al massimo 2 ...
- Per prima cosa si dimostra che un grafo su 5 vertici senza triangoli ha al massimo 6 lati. Se infatti avesse 7 o più lati ci sarebbe o un punto con valenza 4 (in cui cioè arrivano 4 lati), o almeno ... punti con valenza 3, ed entrambe queste situazioni conducono a facili assurdi. Con ragionamenti analoghi si vede che nel caso di 6 lati le valenze devono essere $3+3+2+2+2$ (quanto deve fare la somma?), mentre nel caso di 5 lati possono solo essere $5 \cdot 2$ oppure $3+2+2+2+1$ (perché?).

Si tratta ora di vedere, per ciascuna delle 3 tipologie, in quanti modi la si può realizzare.

- Il primo grafo si può ottenere in $\binom{5}{2} = 10$ modi (perché?).
- Per il secondo grafo abbiamo $\binom{4}{2}$ modi di scegliere i vertici collegati ad A, e a quel punto abbiamo 2 ulteriori modi per concludere, per un totale di 12 modi.
- Il terzo grafo lo possiamo realizzare in $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modi. Si tratta infatti di scegliere, nell'ordine: il vertice con 3 collegamenti, il vertice non raggiunto da lui, il vertice con un collegamento solo.

7. Segnaliamo 3 approcci.

   - Ad ogni elemento di S associamo una funzione $f : X \to \{0,1,2\}$ così costruita: f vale 2 in A, 1 in $B \setminus A$, 0 in $X \setminus B$. Si verifica facilmente che in questo modo abbiamo costruito una corrispondenza biunivoca tra S e l'insieme delle funzioni da X in $\{0,1,2\}$. Pertanto ...
   - Per $k = 0, 1, \ldots, 2008$ definiamo

   $$S_k = \left\{(A,B) \in [\mathcal{P}(X)]^2 : |A| = k \text{ e } A \subseteq B\right\}.$$

   È chiaro che gli S_k sono tutti disgiunti e la loro unione è S. Con un classico double counting si ottiene inoltre che $|S_k| = \binom{2008}{k}2^{2008-k}$ (il binomiale rappresenta i modi di scegliere A, il termine 2^{2008-k} rappresenta i modi di scegliere i B che vanno bene con un dato A: perché?). Per il binomio di Newton si ha pertanto che

   $$|S| = \sum_{k=0}^{2008} |S_k| = \sum_{k=0}^{2008} \binom{2008}{k} 2^{2008-k} = 3^{2008}.$$

8. Coloriamo la scacchiera di bianco, rosso e verde in diagonale. È facile vedere che i vertici e le caselle centrali dei 4 lati hanno tutte lo stesso colore, wlog bianco. È anche facile vedere (come?) che, delle 6241 caselle, ne ce ne saranno 2081 bianche, 2080 rosse e 2080 verdi. Dopo aver tolto le 4 caselle centrali dei lati, restano dunque 2077 bianche, 2080 rosse, 2080 verdi. Poiché ogni mattonella ha una casella per colore, le mattonelle saranno al massimo 2077, lasciando dunque scoperte 6 caselle. Per concludere bisogna dimostrare che effettivamente 2077 mattonelle si possono piazzare ...

9. I lati di $O_1O_2O_3O_4$ sono gli assi dei 4 segmenti che congiungono i vertici con P. Pertanto il quadrilatero è un parallelogrammo, il quale è ciclico se e solo se ... D'altra parte gli angoli del parallelogrammo si ricavano facilmente in funzione di quelli formati dalle diagonali di $ABCD$.

10. Indicato con M il punto medio di BC, abbiamo che

$$OH^2 = OM^2 + MH^2 = (OC^2 - MC^2) + (HC - MC)^2.$$

Ora $HC = b\cos\gamma$, quindi con semplici calcoli si ottiene

$$OH^2 = R^2 + b^2\cos^2\gamma - ab\cos\gamma.$$

Per avere un'espressione più simmetrica in b e c ricordiamo che $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$, da cui

$$OH^2 = R^2 - bc\cos\beta\cos\gamma.$$

Non resta ora che sostituire le espressioni di b e c in funzione di R e degli angoli.

11. Gli ex-centri stanno sulle bisettrici esterne degli angoli di ABC, le quali sono ortogonali alle bisettrici interne. Questo mostra che l'incentro di ABC è l'ortocentro di $I_aI_bI_c$.

Detto I l'incentro di ABC, si ha che $AIBI_c$ è ciclico. Poiché $\angle AIB$ si calcola facilmente, si ottiene pure che $\angle I_bI_cI_a = (\alpha + \beta)/2$, da cui la verità dell'affermazione di Alberto.

Siano ora H e K i punti di tangenza tra la retta BC e gli ex-cerchi con centro in I_b e I_c, rispettivamente. Allora per una proprietà generale (come si dimostra?) si ha che $BH = CK = p$. Detto M il punto medio di BC si ha pertanto che $MK = MH$, dunque M ha la stessa potenza rispetto alle 2 circonferenze.

12. Le rette AB ed AC vanno in se stesse (perché?). La retta BC viene mandata nella circonferenza circoscritta ad ABC (perché?). Pertanto la circonferenza inscritta viene mandata in una circonferenza (perché?) tangente alle rette AB ed AC, e tangente all'immagine della retta BC, cioè la circonferenza Γ. Non resta che capire se la tangenza è interna o esterna ...

13. Interpretando le 2 condizioni modulo 5 si vede che deve essere $a \equiv 2$ modulo 5. Ragionando analogamente modulo 9 si ottiene che $a \equiv 7$ modulo 9 (perché?). Tra i numeri proposti solo 182 verifica queste 2 condizioni.

14. L'equazione può essere riscritta nella forma

$$(a+b)(a-b) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

I due fattori $a+b$ e $a-b$ hanno la stessa parità, dunque sono entrambi pari (perché?). Ne segue che i fattori 2 si dividono, mentre gli altri possono andare dove vogliono. Pertanto le possibilità per $a+b$ e $a-b$ sono tante quanti i divisori (positivi e negativi) di $3 \cdot 5^3 \cdot 7$, cioè 32. In questo modo otteniamo tutte le coppie (a, b) di interi *relativi* che risolvono l'equazione data. Volendo limitarci alle coppie di interi positivi dobbiamo dividere per 4 (perché?).

In alternativa, volendo *da subito* limitarci alle soluzioni positive, possiamo ragionare così: i divisori positivi (dispari) sono 16; quelli maggiori della metà (corrispondenti ad $a+b$) sono la metà.

15. Sia p un numero primo. Non è possibile che p^2 divida tutti i numeri proposti (perché?). Se p divide tutti i numeri proposti, scegliendo come n un generatore della struttura moltiplicativa modulo p si ottiene che $p-1 = \mathrm{ord}_p(n)$ divide 30. Esaminando i divisori di 30 si ottiene quindi che $d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31$, che ha 32 divisori.

16. È banale verificare che $13 \in D$. Resta da dimostrare che tutti gli elementi di D sono divisibili per 13.

    Sia dunque $n \in D$, e sia p il *più piccolo primo* che divide n. Allora la condizione di appartenenza a D implica che $12^n \equiv -1$ modulo p, il che a sua volta implica che $144^n \equiv 1$ modulo p. Consideriamo ora $\mathrm{ord}_p(144)$, l'ordine moltiplicativo di 144 modulo p. Per quanto appena detto $\mathrm{ord}_p(144)$ divide n (perché?), e per un fatto generale (quale?) $\mathrm{ord}_p(144)$ divide $p-1$. Ma, per come abbiamo scelto p, l'unico numero che divide n e $p-1$ è 1.

    Ne segue che $\mathrm{ord}_p(144) = 1$, dunque $144 \equiv 1$ modulo p, da cui $p = 11$ oppure $p = 13$. Non resta che escludere che sia $p = 11$, cioè che un multiplo di 11 possa appartenere a $D \ldots$

    Volendo si poteva ragionare direttamente sul 12, come segue (i dettagli sono analoghi al ragionamento precedente): da $12^n \equiv -1$ modulo p si ottiene che $\mathrm{ord}_p(12) | (2n, p-1)$ e quindi $\ldots$ $\mathrm{ord}_p(12) = 2$, da cui $12 \equiv -1$ modulo p (attenzione ad escludere $p = 2$, e soprattutto ad accorgersi che va escluso a parte!).

Test Finale – Risposte

1. 17/5
2. $16\sqrt{3}$
3. 2880
4. 192
5. $(-1, -1/2)$
6. 25
7. 2004
8. 202
9. $\ldots$
10. $\dfrac{2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1}}{3}$
11. $\ldots$
12. $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,3)$.

Test Finale – “Aiutini”

1. Vi sono 2 approcci sostanzialmente equivalenti.
   - Applicare direttamente le relazioni tra radici e coefficienti
   $$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=\frac{a_2a_3a_4+a_1a_3a_4+a_1a_2a_4+a_1a_2a_3}{a_1a_2a_3a_4}=\frac{-17}{-5}.$$
   - Osservare che $1/a_1$, $1/a_2$, $1/a_3$, $1/a_4$ sono le radici del polinomio $-5x^4+17x^3-13x^2+7x+1$ (perché?), quindi utilizzare la formula per la somma delle radici di questo polinomio.
2. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle terne
   $$(\sqrt{xy},\sqrt{yz},\sqrt{zx}), \qquad (\sqrt{x^3y},\sqrt{y^3z},\sqrt{z^3x}),$$
   e successivamente la disuguaglianza $xy+yz+zx \leq (x+y+z)^2/3$, si ottiene che
   $$x^2y+y^2z+z^2x \leq \sqrt{xy+yz+zx}\cdot\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x} \leq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x}.$$
3. Per il principio di inclusione-esclusione il numero richiesto è dato da
   $$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}-\frac{7!}{2!\cdot 2!}-\frac{7!}{2!\cdot 2!}+\frac{6!}{2!},$$
   in cui
   - il primo addendo è in numero di anagrammi di “STAGISTI”;
   - il secondo addendo è in numero di anagrammi di “STAGISTI” che iniziano con “S”, il quale a sua volta è uguale al numero di anagrammi di “TAGISTI”;
   - il terzo addendo è in numero di anagrammi di “STAGISTI” che finiscono con “I”, il quale a sua volta è uguale al numero di anagrammi di “STAGIST”;
   - il quarto addendo è in numero di anagrammi di “STAGISTI” che iniziano con “S” e terminano con “I”, il quale a sua volta è uguale al numero di anagrammi di “TAGIST”.
4. L’insieme $\{1,2,3\}$ deve andare *surgettivamente* in $\{4,5\}$, il che si può realizzare in 6 modi (perché?). Il 4 ed il 5 possono andare dove vogliono, ma non in 4 o 5. Il 6 può andare solo in 4 od in 5.
5. È facile verificare che il circocentro del triangolo è l’origine. Quando l’origine è nel circocentro, il centro della circonferenza di Feuerbach di un triangolo ABC è dato da $(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})/2$.
6. Basta osservare che $\angle ABL = \angle ACN$ (perchè?), quindi applicare della trigonometria elementare nel triangolo rettangolo ANC.
7. Si tratta di determinare l’ordine moltiplicativo di 17 modulo 360, il quale a sua volta è il minimo comune multiplo (perché?) degli ordini moltiplicativi di 17 modulo 5, 8, 9. Tali ordini sono, rispettivamente, 4, 1, 2. Non resta che trovare il più grande multiplo dell’ordine che sia minore di 2008.

8. Dalla prima equazione segue che x è l'inverso di 2 modulo 401, dunque $x \equiv 201$ modulo 401. Dalla seconda equazione segue che $w \equiv 3x$ modulo 401. Il più piccolo valore positivo con questa proprietà è $603 - 401$. Non resta (ma serve!) che determinare una quaterna in cui $w = 202$.

9. Dopo aver raccolto $abcd$ al primo membro, la disuguaglianza segue banalmente dalle 2 disuguaglianze

$$abcd \leq \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{16}, \qquad ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq \frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).$$

La seconda si può dimostrare sommando tre disuguaglianze del tipo $2ab+2bc \leq a^2+b^2+c^2+d^2$, oppure applicando una delle disuguaglianze di Newton seguita da AM–QM.

In alternativa si poteva omogenizzare ed usare il bunching (sigh!).

10. Indichiamo con U_n il numero di parole che iniziano e terminano per A e non hanno due lettere uguali consecutive. Indichiamo con D_n il numero di parole che iniziano per A, terminano per B o C, e non hanno due lettere uguali consecutive. Segnaliamo 2 possibili modi di procedere.

   - Mostrare che valgono le relazioni ricorrenti
     $$U_{n+1} = D_n, \qquad D_{n+1} = D_n + 2U_n,$$
     da cui
     $$U_{n+2} = D_{n+1} = D_n + 2U_n = U_{n-1} + 2U_n,$$
     quindi applicare la nota formula per le ricorrenze lineari.
   - Mostrare che $U_n + D_n = 2^{n-1}$ e quindi $U_{n+1} = D_n = 2^{n-1} - U_n$. Da questa si deduce per induzione che
     $$U_n = 2^{n-2} - 2^{n-3} + 2^{n-4} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot 2,$$
     e questa è la somma di una progressione geometrica.

11. Basta dimostrare che gli assi radicali sono le bisettrici del triangolo mediale. Questo segue da due fatti:

   - gli assi radicali passano per i punti medi dei lati (come ben sa la Cristina del Test Iniziale);
   - gli assi radicali sono perpendicolari ai lati di $I_aI_bI_c$ (perché?), dunque (come ben sa la Barbara del Test Iniziale) sono paralleli alle bisettrici (sia di ABC, sia del triangolo mediale).

12. Intanto c'è la soluzione $a = b = 0$. Tolta questa, esaminando la congruenza modulo 4, si ottiene che deve essere $a = 1$ oppure $b = 1$. Se $a = 1$ si ha che $2^b + 8$ deve essere un quadrato perfetto, il che non è possibile per $b > 3$ in quanto la massima potenza di 2 che lo divide è ... Se $b = 1$ si ha che $6^a + 4$ deve essere un quadrato perfetto. Per escludere questo ci sono almeno due possibilità.

   - Ragionare modulo 7.
   - Scrivere la relazione nella forma $6^a = (x+2)(x-2)$, quindi osservare che uno dei due fattori al rhs deve per forza essere una potenza di 2 (perché?), dunque $x = 2^k \pm 2$. Se c'è il segno + si ha che $6^a = 2^{k+1}(2^{k-1}+1)$, ma allora il primo fattore è 2^a ed il secondo è 3^a, il che è impossibile per motivi di disuguaglianze (quali?). L'altro caso si esclude similmente.