Stage Senior Pisa 2009 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia $p(x)$ un polinomio a *coefficienti interi* tale che $p(2009) = 2009$.
   Determinare il massimo numero di soluzioni *intere distinte* che può avere l'equazione
   $$p(x) = 2000.$$
   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** può averne un numero grande a piacere

2. Siano a, b, c, d, e numeri *reali positivi* tali che
   $$a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 + 5e^2 \geq \sqrt{a + 4b + 9c + 16d + 5e} \cdot \sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 5e^3}.$$
   Determinare quale delle seguenti disuguaglianze è sicuramente *falsa*.

   (A) $a \leq b$ **(B)** $b \leq c$ **(C)** $c \leq d$ **(D)** $d \leq e$ **(E)** $e \leq a$

3. Sia α un parametro reale positivo. Determinare quale delle seguenti condizioni su α è *equivalente* all'esistenza di una costante $M \in \mathbb{R}$ tale che
   $$x^\alpha + y^2 + z^2 - xy\sqrt{z} \geq M$$
   per ogni terna (x, y, z) di numeri *reali positivi*.

   (A) $\alpha \geq 2$ **(B)** $\alpha \geq 5/2$ **(C)** $\alpha \geq 3$ **(D)** $\alpha \geq 4$ **(E)** $\alpha \geq 5$

4. Consideriamo le seguenti equazioni funzionali:
   $$\begin{aligned} &\text{Equazione 1:} \quad f(x + f(y)) = 2y + f(x), \\ &\text{Equazione 2:} \quad f(x + f(y)) = y + 2f(x), \\ &\text{Equazione 3:} \quad f(x + f(y)) = f(x). \end{aligned}$$
   Determinare per quale (o quali) di queste equazioni esiste una funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tale che
   - f soddisfa l'equazione per ogni coppia di numeri razionali x e y;
   - f soddisfa l'ulteriore condizione $f(\mathbb{Q}) \supseteq \mathbb{N}$.

   (A) Per nessuna **(B)** Solo per la 1 **(C)** Solo per la 2 **(D)** Solo per la 3
   (E) Solo per la 1 e la 2

5. Determinare quante sono le quaterne ordinate (a, b, c, d) di *interi positivi* tali che, comunque si scelgano 3 delle 4 componenti, si ottengono 3 interi (non necessariamente distinti) il cui *minimo comune multiplo* è $3^5 \cdot 5^3$.

(A) $4^2 \cdot 6^2$ **(B)** $2^{12} \cdot 3^4$ **(C)** $3^4 \cdot 5^4$ **(D)** $3^2 \cdot 19 \cdot 67$ **(E)** $13 \cdot 31$

6. Sia $X = \{1, 2, \ldots, 2008, 2009\}$, e sia $\mathcal{P}_\star(X)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi *non vuoti* di X. Sia

$$S = \sum_{A \in \mathcal{P}_\star(X)} \max(A) + \sum_{A \in \mathcal{P}_\star(X)} \min(A).$$

Determinare quale dei seguenti numeri primi *non* divide S.

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 41 **(D)** 67 **(E)** 127

7. In una nazione ci sono 2009 città, che per comodità indichiamo con C_1, C_2, ..., C_{2009}. La città C_i e la città C_j sono collegate da un volo (andata e ritorno) se e solo se $(i - j)$ è dispari. Fissate 2 città collegate, i voli di andata e ritorno tra di esse sono operati dalla stessa compagnia. Al contrario, voli tra coppie diverse di città sono sempre operati da compagnie diverse.

Un turista vuole fare un tour che parte da una città a sua scelta e fa ritorno alla stessa città senza mai volare 2 volte con la stessa compagnia (il turista può però passare più volte per la stessa città).

Determinare il minimo numero di compagnie con le quali il turista *non* volerà durante il suo tour.

(A) 0 **(B)** 1004 **(C)** 1005 **(D)** 2009 **(E)** $1004 \cdot 1005 - 2009$

8. Un quadrato è suddiviso a scacchiera in 50×50 quadratini di lato unitario (caselle). Sul quadrato sono state piazzate delle mattonelle 3×1, rispettando la quadrettatura ed evitando di creare sovrapposizioni e di uscire dai bordi. Guardando come sono state posizionate le mattonelle, risulta che una delle 2 diagonali principali è totalmente scoperta.

Determinare il minimo numero di caselle che sono rimaste scoperte, *oltre* a quelle della diagonale citata precedentemente.

(A) 2 **(B)** 20 **(C)** 32 **(D)** 50 **(E)** 98

9. Sia ABC un triangolo. Siano D, E, F i punti in cui la circonferenza inscritta tocca i lati AB, BC, CA, rispettivamente. Sapendo che il quadrilatero $ADEF$ è ciclico, determinare quale delle seguenti conclusioni è corretta.

(A) Il triangolo è equilatero

(B) Il triangolo non è equilatero, ma i suoi angoli sono univocamente determinati

(C) L'angolo $\angle BAC$ è univocamente determinato, gli altri angoli di ABC no

(D) Se $\angle BAC = 36°$, allora i restanti angoli sono univocamente determinati

(E) La situazione è impossibile

10. Sia $ABCD$ un quadrilatero (convesso). Siano P, Q, R, S punti sui lati AB, BC, CD, DA, rispettivamente, tali che

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RD} = \frac{DS}{SA} = \lambda < 1.$$

Si sa inoltre che l'area di $PQRS$ è il 52% dell'area di $ABCD$.

Determinare il valore di λ (attenzione: λ è il rapporto tra le lunghezze delle 2 parti in cui ogni lato di $ABCD$ è suddiviso).

(A) 2/3 **(B)** 3/4 **(C)** 4/5 **(D)** 4/7 **(E)** 5/7

11. Alcuni amici stanno esaminando un problema in cui si parla di un generico quadrilatero *convesso* $ABCD$.

Alberto afferma che esiste sempre un'affinità che manda $ABCD$ in un quadrilatero con le diagonali perpendicolari.

Barbara afferma che esiste sempre un'affinità che manda $ABCD$ in un quadrilatero in cui una delle due diagonali passa per il punto medio dell'altra.

Cristina afferma che esiste sempre un'affinità che manda $ABCD$ in un quadrilatero ciclico.

Chi ha ragione?

(A) Solo Alberto **(B)** Solo Cristina **(C)** Solo Alberto e Barbara

(D) Solo Alberto e Cristina **(E)** Tutti

12. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con $AB = 20$ e $AC = 21$. Sia M il punto medio di AC, e sia N il punto di AC tale che $\angle ABN = \angle MBC$. Sia L l'intersezione tra BN e l'altezza AH.

Determinare quale delle seguenti affermazioni sulla lunghezza di AL è vera.

(A) $AL = 7$ **(B)** $AL < 7$ è un numero razionale **(C)** $AL > 7$ è un numero razionale

(D) $AL < 7$ è un numero irrazionale **(E)** $AL > 7$ è un numero irrazionale

13. Consideriamo il numero

$$N = 69\underbrace{2009\,2009\ldots 2009}_{n \text{ volte}},$$

cioè il numero la cui rappresentazione decimale è costituita dalle cifre 69 seguite dalle cifre 2009 ripetute n volte.

Determinare il più piccolo valore di n per cui N risulta multiplo di 99.

(A) 42 **(B)** 51 **(C)** 60 **(D)** 69 **(E)** 78

14. Siano m ed n due numeri *interi* (non necessariamente positivi) tali che

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{10}.$$

Determinare quanto può valere, al massimo, la somma $|m| + |n|$.

(A) 7 **(B)** 15 **(C)** 24 **(D)** 27 **(E)** 33

15. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $2009^n - 1$ è divisibile per 2^{2009}.

(A) 2008 **(B)** 2009 **(C)** 2^{2006} **(D)** 2^{2007} **(E)** 2^{2008}

16. Sia S l'insieme di tutti gli interi che si scrivono nella forma $p^{666} - q^{666}$, dove p e q sono numeri primi maggiori di 10. Sia d il massimo comun divisore di tutti gli elementi di S.

Determinare il numero dei divisori positivi di d (inclusi 1 e d stesso).

(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 16 **(D)** 24 **(E)** 32

Stage Senior Pisa 2009 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Determinare quale resto si ottiene dividendo il polinomio
$$x^{9002} + x^{2009} + x^{903} + x^{309}$$
per $x^2 + 1$.

2. Determinare per quali valori del parametro reale α esiste almeno una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che
$$f(x + f(y)) = 3y + \alpha x + 7$$
per ogni coppia (x, y) di numeri reali.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" in cui la prima e l'ultima lettera sono *diverse*.

4. Calcolare
$$\sum_{k=0}^{1004} \binom{2009}{2k} 9^k.$$

5. Sia AB una corda di una circonferenza, e sia P un punto sulla retta AB. Si sa che la circonferenza ha raggio 5, e $AP \cdot BP = 32$.

   Determinare la distanza di P dal centro della circonferenza.

6. Sia ABC un triangolo, sia O il suo circocentro, e sia M il punto medio del lato BC. Si sa che $OM = 3$ ed il coseno dell'angolo in A vale $-5/7$.

   Determinare il raggio della circonferenza circoscritta.

7. Siano x ed y due interi tali che
   - $37x + 27y = 1$;
   - $x + y$ è più vicino possibile a 2009.

   Determinare $x + y$.

8. Sia n un intero positivo tale che, nell'espressione decimale di n^{2009}, la penultima cifra è 7, cioè
$$n^{2009} = * * * * \ldots * 7 * .$$

   Determinare i possibili valori dell'ultima cifra.

Problemi dimostrativi

9. Determinare la più grande costante reale K tale che

$$\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\geq K\sqrt{a+b+c}$$

per ogni terna (a,b,c) di numeri reali *positivi*.

10. Un quadrato è suddiviso a scacchiera in 7×7 quadratini di lato unitario (caselle).

    (a) Sul quadrato sono state piazzate 16 mattonelle 3×1, rispettando la quadrettatura ed evitando di creare sovrapposizioni e di uscire dai bordi. Determinare in quali posizioni può venire a trovarsi la casella rimasta scoperta.

    (b) Determinare se è possibile piazzare sulla scacchiera (come sempre rispettando la quadrettatura ed evitando di creare sovrapposizioni ed uscire dai bordi) 15 mattonelle 3×1 ed un tromino ad L (cioè il pezzo che si ottiene rimuovendo una casella da un quadrato 2×2).

11. Sia ABC un triangolo rettangolo in A.

    (a) Siano AH, AK, AM, rispettivamente, l'altezza, la bisettrice e la mediana uscenti dal vertice A.
    Dimostrare che $\angle HAK=\angle KAM$.

    (b) Dimostrare che le simmediane di ABC (cioè le simmetriche delle mediane rispetto alle bisettrici uscenti dagli stessi vertici) concorrono nel punto medio di AH.

12. Per ogni intero positivo n, sia

$$T_n:=1+2+\ldots+n.$$

    (a) Determinare se esistono valori di n per cui l'espressione decimale di T_n termina (a destra) con le cifre 2009.

    (b) Determinare se esistono valori di n per cui l'espressione decimale di T_n termina (a destra) con le cifre 2010.

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
C	D	D	D	D	C	B	E	E	A	D	C	A	E	C	E

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Il polinomio
$$p(x) = 2000 + (x - 2008)(x - 2010)(x - 2006)(x - 2012)$$
vale 2000 per 4 valori distinti della x, e vale 2009 in 2009. Questo mostra che almeno 4 soluzioni ci possono essere.

   Sia ora $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi che vale 2000 per almeno 5 valori della x. Allora, detti a, b, c, d, e tali valori, possiamo scrivere (perché?)
$$p(x) = 2000 + (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)q(x),$$
dove $q(x)$ è un opportuno polinomio a coefficienti interi. Imponendo che $p(2009) = 2009$ ci ritroviamo la condizione
$$(2009 - a)(2009 - b)(2009 - c)(2009 - d)(2009 - e)q(2009) = 9,$$
la quale è impossibile perché non esistono 5 interi *distinti* il cui prodotto divide 9 (nota bene: solo dei primi 5 fattori sappiamo che sono distinti). Pertanto più di 4 soluzioni non ci possono essere.

2. Applicando Cauchy-Schwarz alle quintuple
$$A = \left(\sqrt{a}, 2\sqrt{b}, 3\sqrt{c}, 4\sqrt{d}, \sqrt{5}\sqrt{e}\right), \qquad B = \left(a\sqrt{a}, b\sqrt{b}, c\sqrt{c}, d\sqrt{d}, \sqrt{5}\, e\sqrt{e}\right),$$
si ottiene la disuguaglianza opposta a quella data. Ne segue che c'è uguaglianza, dunque $B = \lambda A$. Imponendo questa condizione, e risolvendo il sistema che se ne ricava, si ottiene che $b = 2a$, $c = 3a$, $d = 4a$, $e = a$, da cui la conclusione.

3. Segnaliamo 4 approcci.

   - *Equazioni di secondo grado e discriminanti.* Interpretando l'espressione data come una disequazione di secondo grado nella variabile y ci troviamo ad imporre che il discriminante sia negativo (attenzione: occorre avere molto chiaro come, dalla positività assunta solo per $y > 0$, si arriva al discriminante), cioè
$$x^2 z - 4x^\alpha - 4z^2 + 4M \leq 0 \qquad \forall x > 0,\ \forall z > 0.$$
Ora questa la possiamo interpretare come una disequazione di secondo grado nella variabile z. Ragionando sul discriminante come prima si ottiene che deve essere
$$x^4 - 64x^\alpha + 64M \leq 0 \qquad \forall x > 0.$$
Si vede ora abbastanza facilmente (come?) che questa condizione è equivalente a $\alpha \geq 4$.

- *Deus ex machina.* Consideriamo il caso $\alpha = 4$. Applicando AM–GM alla quaterna (x^4, y^2, y^2, z^2) otteniamo che

$$x^4 + y^2 + z^2 \geq \frac{x^4 + 2y^2 + z^2}{4} \geq xy\sqrt{z},$$

  il che basta per concludere che per $\alpha = 4$ l'espressione data è sempre positiva.
  Consideriamo il caso $\alpha > 4$. Osservato che $x^\alpha \geq x^4 - 1$ per ogni $x > 0$ (perché?), ci si riconduce facilmente (come?) al caso precedente.
  Consideriamo infine il caso $\alpha < 4$. Ponendo $x = n^{2/\alpha}$, $y = n$, $z = n$, e facendo tendere $n \to +\infty$ si ha che ...

- *AM–GM pesata.* L'idea è di utilizzare la disuguaglianza

$$pa + qb + rc \geq a^p b^q c^r,$$

  valida quando tutti le variabili in gioco sono numeri reali positivi e $p+q+r = 1$. Scegliendo $a = x^\alpha$, $b = y^2$, $c = z^2$, pensando al termine $xy\sqrt{z}$ è naturale scegliere $q = 1/2$ ed $r = 1/4$, dunque necessariamente $p = 1/4$. Si ottiene così che

$$\frac{x^\alpha}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} \geq x^{\alpha/4} y\sqrt{z}.$$

  Da qui si capisce che lo "spartiacque" è $\alpha = 4$, e si può procedere come nel caso precedente.

- *Pareggiamento degli esponenti.* Poniamo $x = w^{2/\alpha}$. La funzione da considerare diventa così

$$w^2 + y^2 + z^2 - w^{2/\alpha} y\sqrt{z}.$$

  Passiamo ora in coordinate sferiche ponendo

$$w = \rho\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = \rho\sin\varphi.$$

  La funzione diventa quindi

$$\rho^2 - \rho^{2/\alpha+1+1/2} \cdot (\text{prodotto di seni e coseni a potenze opportune}).$$

  Il coefficiente del secondo termine è minore strettamente di 1 (questo andrebbe giustificato, ma comunque per quello che segue basta che sia limitato). Ora è chiaro che tutto si gioca su quale dei due esponenti di ρ è il maggiore.

4. La prima equazione funzionale ha come soluzioni le funzioni $f(x) = \pm x\sqrt{2}$, che non soddisfano la condizione $f(\mathbb{Q}) \supseteq \mathbb{N}$. La seconda equazione funzionale non ha soluzioni. La terza equazione funzionale ha infinite soluzioni, di cui parecchie soddisfano la condizione $f(\mathbb{Q}) \supseteq \mathbb{N}$. Dimostriamo questi claim.

   - *Equazione 1.* La procedura è totalmente standard. Posto $x = 0$ otteniamo che $f(f(y)) = 2y + f(0)$, da cui l'iniettività di f (achtung: trattandosi di $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, cosa possiamo dire della surgettività?). Ponendo ora $y = 0$ si ha che $f(f(0)) = f(0)$ da cui $f(0) = 0$ (perché?). Ponendo quindi $y = f(z)$ nell'equazione iniziale otteniamo che $f(x + 2z) = 2f(z) + f(x)$. Per $x = 0$ questa dice che $f(2z) = 2f(z)$. Mettendo tutto insieme otteniamo

$$f(x + 2z) = f(x) + f(2z),$$

     che è sostanzialmente la solita equazione di Cauchy (perché?). Essendo $\mathbb{Q}$ l'insieme di partenza, le soluzioni sono pertanto del tipo $f(x) = \lambda x$. Sostituendo nell'equazione iniziale troviamo che i valori ammissibili di λ sono $\pm\sqrt{2}$.

- *Equazione 2.* Posto $x = 0$ otteniamo che $f(f(y)) = y + 2f(0)$. Posto ora $y = f(z)$ nell'equazione iniziale ricaviamo che

  $$f(x + z + 2f(0)) = f(z) + 2f(x).$$

  Scambiando x e z il lhs non cambia, dunque deve essere

  $$f(z) + 2f(x) = f(x) + 2f(z).$$

  Da qui segue (come?) che f è costante, ma poi per sostituzione si verifica che nessuna costante va bene.

- *Equazione 3.* Ogni funzione 1-periodica con immagine contenuta in $\mathbb{N}$ è soluzione dell'equazione (facile verifica). Basta ora mostrare l'esistenza di una funzione 1-periodica la cui immagine è esattamente $\mathbb{N}$.

5. È chiaro che i 4 numeri hanno come fattori primi soltanto 3 e 5. Esaminiamo la divisibilità per 3. Almeno 2 dei numeri sono divisibili per 3^5 (perché?). I restanti 2 sono divisibili per una potenza di 3 con esponente tra 0 e 4 (estremi compresi). Abbiamo quindi 3 possibili casi.

   - Tutti sono divisibili per 3^5: una sola possibilità.
   - Tre sono divisibili per 3^5 e uno per una potenza inferiore: $4 \cdot 5 = 20$ possibilità (perché?).
   - Due sono divisibili per 3^5 e due per una potenza inferiore: $\binom{4}{2} \cdot 5^2 = 150$ possibilità (perché?).

   Pertanto, per quanto riguarda la divisibilità per 3, abbiamo in totale $1 + 20 + 150 = 171$ possibilità.

   Ragionando in maniera analoga con i fattori 5, otteniamo che le possibilità sono $1+4\cdot3+\binom{4}{2}\cdot3^2 = 67$.

   Le possibili quaterne sono dunque $171 \cdot 67$ (perché si moltiplica?).

6. Trattiamo più in generale il caso in cui X contiene gli interi da 1 fino ad n. Abbiamo 2^{n-1} sottoisiemi con massimo n, 2^{n-2} sottoinsiemi con massimo $n-1$, 2^{n-3} sottoinsiemi con massimo $n-2$, e così via (perché?). La sommatoria dei massimi vale pertanto

   $$n \cdot 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^{n-2} + (n-2) \cdot 2^{n-3} + \ldots + 1 \cdot 2^0.$$

   Analogamente abbiamo 2^{n-1} sottoisiemi con minimo 1, 2^{n-2} sottoinsiemi con minimo 2, 2^{n-3} sottoinsiemi con minimo 3, e così via (perché?). La sommatoria dei minimi vale pertanto

   $$1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-3} + \ldots + n \cdot 2^0.$$

   Quando sommiamo le 2 sommatorie otteniamo pertanto

   $$S = (n+1)\left(2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1\right) = (n+1)\left(2^n - 1\right).$$

   Nel nostro caso quindi $S = 2010 \cdot (2^{2009} - 1)$. La divisibilità per 3, 5, 67 è ovvia. Quella per 127 segue (come?) dal fatto che $2^7 \equiv 1 \pmod{127}$ e 2009 è multiplo di 7. Resta da dimostrare che S non è multiplo di 41. Questo segue dal fatto che (cosa stiamo usando nella prima congruenza?)

   $$2^{2009} \equiv 2^9 = 512 \not\equiv 1 \pmod{41}.$$

Nota: non è difficile calcolare esplicitamente anche la sola somma dei massimi (dunque anche la sola somma dei minimi). Riportiamo qui il calcolo con le derivate che permette di ricavare la formula stessa:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x^{k+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{kx^{k+1}-(k+1)x^k+1}{(x-1)^2}.$$

Nel caso $x = 2$ la formula si riduce ulteriormente e potrebbe anche essere facilmente congetturata e dimostrata direttamente per induzione.

7. Interpretiamo tutto in termini di grafi. Abbiamo un grafo in cui i lati sono tutti e soli quelli che collegano le città "pari" con le città "dispari" (questo è quello che si chiama un grafo bipartito). Il turista vuole costruire una cammino chiuso più lungo possibile che passi al più una volta per ogni lato del grafo.

   È ben noto che un cammino del genere coinvolge un numero *pari* di lati uscenti da ogni vertice (perché?). Da ciascuna delle 1005 città dispari escono 1004 lati, che è pari, dunque non crea ostruzioni. Da ciascuna delle 1004 città pari escono 1005 lati, che è dispari. Almeno uno di tali lati dunque non potrà far parte del tour del turista. Questo ci dice che almeno 1004 lati (uno per ogni città pari) sarà escluso dal cammino. Si noti che non abbiamo contanto 2 volte nessun lato.

   Resta ora da far vedere l'esistenza di un cammino che esclude solo 1004 lati. A tal fine eliminiamo dal grafo tutti i collegamenti tra C_1 e le città pari. Ci resta così un grafo, con 1004 collegamenti in meno rispetto a quello originario, in cui *da ogni vertice parte un numero pari di lati*. Per un ben noto risultato questa proprietà è la condizione *necessaria e sufficiente* per l'esistenza di un cammino chiuso che passa una ed una sola volta per ogni lato (circuito hamiltoniano).

8. Consideriamo uno qualunque dei 2 triangoli in cui la scacchiera risulta suddivisa dopo aver eliminato la diagonale scoperta, e coloriamo le sue caselle di bianco, rosso e verde in diagonale (parallelamente alla diagonale scoperta). In questo modo, delle 1225 caselle del triangolo, ce ne saranno 425 bianche, 392 rosse e 408 verdi (perché?). Poiché ogni mattonella ha una casella per colore, le mattonelle saranno al massimo 392 per triangolo, lasciando dunque scoperte $2450 - 392 \cdot 2 \cdot 3 = 98$ caselle. Per concludere bisogna dimostrare che effettivamente 392 mattonelle si possono piazzare su ogni triangolo, ma per questo basta disporre su ogni riga tutte le mattonelle che ci stanno.

9. Utilizzando le notazioni standard, si ha che $\angle BED = 90° - \beta/2$ e $\angle CEF = 90° - \gamma/2$, da cui $\angle DEF = (\beta + \gamma)/2$. Imponendo la condizione di ciclicità $\angle DEF + \angle DAF = 180°$ si giunge facilmente ad un assurdo (come?).

10. Il problema è equivalente ad imporre che la somma delle aree dei 4 triangolini "scartati" sia uguale al 48% dell'area di $ABCD$. Abbiamo ora (perché?) che

$$[BPQ] = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}[BAC], \qquad [DRS] = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}[DAC].$$

   Sommando otteniamo che

$$[BPQ] + [DRS] = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}([BAC] + [DAC]) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}[ABCD].$$

In modo del tutto analogo abbiamo che

$$[CRQ]+[APS]=\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}([CBD]+[DAB])=\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}[ABCD].$$

La condizione da imporre è quindi che $2\lambda/(\lambda+1)^2=48/100$, da cui la conclusione.

11. Sia P il punto di incontro delle diagonali. Mandando APB in un triangolo $A'P'B'$ rettangolo in P' abbiamo realizzato il desiderio di Alberto (perché si può? dove va a finire $ABCD$?).

    Prendiamo ora $A'P'B'$, e applichiamo un'affinità che dilata (o contrae) nella direzione di $P'B'$ e non fa nulla nella direzione ortogonale. In questo modo possiamo fare in modo che $A'B'C'D'$ vada a finire in un quadrilatero $A''B''C''D''$ in cui $P''A''\cdot P''C''=P''B''\cdot P''D''$. Questo realizza il desiderio di Cristina.

    Il desiderio di Barbara è invece irrealizzabile, in quanto un'affinità non può modificare i rapporti PA/PC e PB/PD facendone diventare uno uguale ad $1/2$ anche se non lo era all'inizio.

12. Il punto fondamentale è che L è il punto medio dell'altezza, da cui $AL=210/29$, che è un numero razionale di poco superiore a 7. Per dimostrarlo segnaliamo 2 approcci.

    - *Approccio trigonometrico bovino.* Indichiamo con θ i 2 angoli che sono uguali per ipotesi. Calcoliamo la lunghezza di BM mediante il teorema di Pitagora, quindi applichiamo il teorema dei seni in BMC. Con qualche calcolo si trova che

      $$\sin\theta=\frac{bc}{a\sqrt{4c^2+b^2}},$$

      quindi anche (qui bisogna essere un minimo astuti con il numeratore)

      $$\cos\theta=\frac{\sqrt{4a^2c^2+a^2b^2-b^2c^2}}{a\sqrt{4c^2+b^2}}=\frac{a^2+c^2}{a\sqrt{4c^2+b^2}}.$$

      Applicando ora il teorema dei seni in ALB si ha che

      $$\frac{AL}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin(\gamma+\theta)}=\frac{AB}{\sin\gamma\cos\theta+\sin\gamma\cos\theta}.$$

      Ora AB e le funzioni trigonometriche di γ e θ si esprimono in funzione dei lati a, b, c. Si ottiene così che $AL=bc/(2a)$, cioè metà dell'altezza.

    - *Approccio "portato da casa".* La lettera usata per indicare il punto L non è casuale: si tratta infatti del *punto di Lemoine*, cioè il coniugato isogonale del baricentro, dunque il punto in cui concorrono le simmediane. Ora è ben noto che

      – *in un triangolo rettangolo l'altezza è anche una simmediana* (questo si dimostra con un semplice angle chasing dopo aver tracciato la circonferenza circoscritta ed aver osservato che la bisettrice dell'angolo retto incontra nuovamente la circonferenza circoscritta proprio sull'asse dell'ipotenusa);

      – *in un triangolo rettangolo il punto di Lemoine è proprio il punto medio dell'altezza* (vedi Test Finale).

13. Applichiamo i criteri di divisibilità per 9 e per 11. Si ha così che N è divisibile per 9 se e solo se $2n+6$ è divisibile per 9, mentre N è divisibile per 11 se e solo se $7n+3$ è divisibile per 11. Risolvendo il sistema di congruenze si ottiene che $n \equiv 6 \pmod 9$ e $n \equiv 9 \pmod{11}$, da cui $n \equiv 42 \pmod{99}$.

14. L'equazione può essere riscritta nella forma $10(m+n) = 3mn$. Risolvendo rispetto ad m si ottiene
$$m = \frac{10n}{3n-10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{30n - 100 + 100}{3n-10} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{100}{3n-10}\right).$$
Ne segue che $3n-10$ deve essere un divisore di 100 (positivo o negativo). Esaminando con pazienza le varie possibilità, si ottengono le soluzioni $(4,20)$, $(5,10)$, $(2,-5)$, $(3,-30)$, e simmetriche.

15. La risposta si deduce facilmente dal seguente risultato generale: se $n = 2^k \cdot d$, con d dispari, allora il primo 2 compare nella fattorizzazione di $2009^n - 1$ con esponente 2^{k+3}. La dimostrazione di questo fatto segue in maniera piuttosto standard dai seguenti passi.

   - L'esponente di 2 nella fattorizzazione di $2009^n - 1$ è uguale all'esponente di 2 nella fattorizzazione di $2009^{2^k} - 1$ (cioè sostanzialmente d non conta nulla). Si ha infatti che
   $$2009^{2^k \cdot d} - 1 = (2009^{2^k} - 1)(\text{somma di } d \text{ addendi dispari}).$$
   Basta dunque considerare il caso in cui $d = 1$.
   - La tesi è banalmente vera per $k = 0$.
   - Per induzione
   $$2009^{2^{k+1}} - 1 = \left(2009^{2^k}\right)^2 - 1 = \left(2009^{2^k} - 1\right) \cdot \left(2009^{2^k} + 1\right).$$
   Il secondo fattore è congruo a 2 modulo 4 (perché?), dunque si guadagna un fattore 2 per volta.

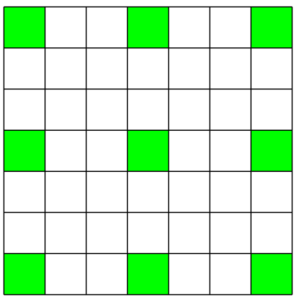
16. Si ha che $d = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$. La dimostrazione segue da alcune osservazioni.

   - Nella fattorizzazione di d non compaiono primi maggiori di 10 (perché?).
   - Esistono elementi di S che non sono divisibili per 5: basta prendere, per esempio, $19^{666} - 17^{666}$ (perché?).
   - I quadrati dei numeri dispari sono sempre congrui ad 1 modulo 8, dunque tutti gli elementi di S sono multipli di 8.
   - L'esponente 666 è multiplo di $\phi(27)$ e di $\phi(7)$. Ne segue (perché?) che tutti gli elementi di S sono multipli di 27 e di 7.
   - Esistono elementi di S che non sono multipli di 16: basta osservare che
   $$p^{666} - q^{666} = (p^2 - q^2) \cdot (\text{somma di 333 numeri dispari}),$$
   e poi prendere, per esempio, $p = 19$ e $q = 17$.
   - Esistono elementi di S che non sono multipli di 81 o 49. Per dimostrarlo vi sono almeno 2 strade.

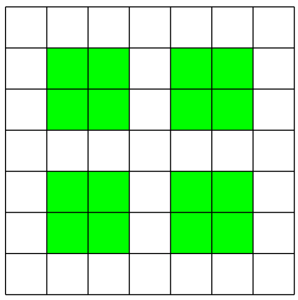
- Fornire degli esempi espliciti ...
- Sfruttare la ciclicità della struttura moltiplicativa modulo 81 e modulo 49, ed il teorema di Dirichlet per l'esistenza dei primi nelle progressioni aritmetiche.
  Esaminiamo per esempio l'81. Preso un generatore g modulo 81, poiché $\phi(81)$ non divide 666, sappiamo che $g^{666} \not\equiv 1 \pmod{81}$. D'altra parte per Dirichlet sappiamo che esiste un primo $p \equiv 1 \pmod{81}$, ed esiste un primo $q \equiv g \pmod{81}$. A questo punto è chiaro che $p^{666} - q^{666}$ non è multiplo di 81.

Test Finale – Risposte

1. $x - 1$
2. La funzione esiste se e solo se $\alpha = \pm\sqrt{3}$
3. 4500
4. $2^{2008}(2^{2009} - 1)$
5. $\sqrt{57}$
6. 21/5
7. 2013
8. I possibili valori dell'ultima cifra sono 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9.
9. $\sqrt{3}$
10. Le possibili posizioni del buco sono le caselle ombreggiate nelle figure sottostanti.



(a)



(b)

11. (a) ...
    (b) ...
12. (a) Non esistono.
    (b) Esistono.

Test Finale – “Aiutini”

1. Segnaliamo 2 approcci.
   - Dalla divisione tra polinomi possiamo scrivere
   $$x^{9002} + x^{2009} + x^{903} + x^{309} = q(x)(x^2 + 1) + ax + b,$$
   dove a e b sono opportuni coefficienti (perché i coefficienti incogniti sono solo 2?). Sostituendo ora $x = \pm i$ (perché proprio questi valori?) si ottiene un sistema lineare di 2 equazioni nelle incognite a e b, che dunque si determinano facilmente.
   - Usando le congruenze tra poliniomi abbiamo che $x^2 \equiv -1 \pmod{(x^2+1)}$, e di conseguenza (perché?)
   $$x^{9002} + x^{2009} + x^{903} + x^{309} \equiv -1 + x - x + x \pmod{(x^2 + 1)},$$
   da cui la tesi.
2. Ponendo $y = 0$ e $x = z-f(0)$ si ottiene che $f(x)$ è una funzione affine, cioè del tipo $f(x) = ax+b$. Sostituendo si ha dunque che
   $$ax + a^2y + ab + b = 3y + \alpha x + 7.$$
   Dovendo tale relazione essere verificata per ogni scelta di x e y, si ottiene (perché?) che $a^2 = 3$, $b(a + 1) = 7$, $a = \alpha$. Si vede facilmente che tale sistema ha soluzione se e solo se $\alpha = \pm\sqrt{3}$.
3. Gli anagrammi richiesti sono
   $$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} - 3 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2!},$$
   e cioè la totalità degli anagrammi, meno quelli che iniziano e finiscono per “S”, oppure per “T”, oppure per “I”. Come sono stati calcolati questi ultimi?
4. Sia $2n + 1$ un numero dispari. Allora per il binomio di Newton si ha che
   $$(1 + x)^{2n+1} + (1 - x)^{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} x^i + \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i \binom{2n+1}{i} x^i = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} x^{2k}.$$
   Infatti le potenze pari si sommano e quelle dispari si cancellano. Si tratta ora di applicare questa formula con $x = 3$ e l’opportuno valore di n.
5. È ben noto che $AP \cdot BP$ è la potenza di P rispetto alla circonferenza, la quale a sua volta è data dalla formula $|R^2 - d^2|$, in cui R è il raggio della circonferenza, e d è la distanza di P dal centro. Non resta che sostituire i valori numerici dati, e prestare attenzione alla gestione del valore assoluto.
6. Intanto bisogna osservare che il punto O è esterno al triangolo (perché?). Sia ora α l’angolo in A. Allora $\angle BOC = 2(180° - \alpha) = 360° - 2\alpha$ (perché?), quindi $\angle BOM = 180° - \alpha$. Non resta ora che applicare della trigonometria elementare nel triangolo BOM, tenendo conto che $\cos(\angle BOM) = -\cos\alpha$.

7. Con il metodo delle divisioni successive si vede che $37 \cdot (-8) + 27 \cdot 11 = 1$. Tutte le soluzioni sono quindi del tipo $x = -8 - 27k$, $y = 11 + 37k$, al variare di k tra gli interi (perché?). Pertanto $x + y = 10k + 3$, da cui $x + y \equiv 3 \pmod{10}$. Il valore più vicino a 2009 con questa proprietà è 2013. Siano sicuri che sia ottenibile?

8. Si tratta di determinare i residui delle potenze 2009-esime modulo 100, cioé modulo 4 e modulo 25. Modulo 4 le potenze 2009-esime possono essere 0, 1, 3 (perché?). Modulo 25 possono essere 0, oppure una qualunque classe coprima con 25: infatti la potenza 2009-esima è bigettiva modulo 25 dal momento che 2009 e $\phi(25)$ sono coprimi. I finali da scartare sono quindi (perché?) 70, 74, 78.

9. Ponendo $a = b = c = 1$ si ottiene che $K \leq \sqrt{3}$. Per la disuguaglianza opposta segnaliamo 2 approcci.

   - Porre $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$, e ridursi con qualche semplice calcolo a
     $$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$
     A questo punto basta fare i quadrati e quello che resta dopo aver semplificato è un banale riarrangiamento o bunching.
   - Chiamare x, y, z i 3 addendi al rhs, quindi applicare l'opportuna disuguaglianza di MacLaurin (quale?).

10. Entrambe le domande si trattano considerando le due colorazioni con 3 colori che si ottengono colorando "parallelamente alle due diagonali principali".

   (a) In entrambe le colorazioni ci sono 17 caselle del colore scelto per la diagonale, e 16 caselle degli altri due colori. Inoltre ogni pezzo occupa una casella per colore in entrambe le colorazioni. Ne segue che in entrambe le colorazioni la casella che avanza ha lo stesso colore della diagonale parallelamente alla quale si è colorato. Questa condizione individua 9 caselle. Si verifica poi che in tutti e 9 i casi esiste effettivamente una costruzione che le lascia libere (per simmetria basta considerare 3 casi: quali?).

   (b) L'osservazione fondamentale è che il tromino ad L occupa una casella per colore in una delle colorazioni, ed è del tipo $2+1$ nella restante colorazione. In quest'ultima colorazione il colore che occupa 2 caselle è necessariamente quello presente sulla diagonale (perché?). Ne segue che la casella che avanza avrà il colore della diagonale in una delle 2 colorazioni, ed un colore diverso dalla diagonale nell'altra. Questa condizione individua 16 caselle, suddivise in 4 quadrati 2×2 simmetrici. Non resta ora che far vedere che è possibile tassellare il complementare di uno di questi quadrati con i 15 pezzi 3×1, quindi mettere il tromino ad L dove serve.

11. (a) Sia AB il cateto più corto. Segnaliamo 2 approcci.

   - Dimostrare che $\angle BAH = \angle MAC$, in quanto entrambi uguali a $\angle BAC$, nel primo caso per una similitudine (quale?), nel secondo perché MAC è isoscele.
   - Prolunghiamo AK fino ad incontrare nuovamente la circonferenza circoscritta in N. Allora si ha che N è il punto medio dell'arco BC, $\angle HAK = \angle KNM$ per il parallelismo di ..., e ANM è isoscele. Come si conclude?

(b) Sia L il punto medio di AH. Per dimostrare che L è il punto di Lemoine, segnaliamo 2 approcci.

- Sappiamo dal punto precedente che AH è la simmediana uscente dal vertice A. Wlog basta dimostrare che CL è una bisettrice di ABC. Consideriamo la simmetria rispetto alla bisettrice uscente da C. Questa manda il triangolo CAH in un triangolo omotetico (da C) ad ABC (perché?). Questa omotetia manda dunque il riflesso di H in A, ed il riflesso di A in B. Ne segue che questa omotetia manda L (punto medio di AH) nel punto medio di AB, quindi manda la retta CL nella mediana uscente da C. Pertanto CL è una simmediana.
- Usando le coordinate trilineari, si tratta di dimostrare che L ha le stesse trilineari del punto di Lemoine, e cioè $[a : b : c]$ (perché il punto di Lemoine ha queste coordinate?). Per far questo, dette P e Q le proiezioni di L su AB ed AC, basta osservare le similitudini tra i triangoli ABC, APL, AQL.

12. (a) Il problema è equivalente a risolvere

$$\frac{n^2+n}{2} \equiv 2009 \pmod{10000}.$$

Ragionando modulo 5 si vede che l'equazione non ha soluzioni.

(b) Il problema è equivalente a risolvere

$$\frac{n^2+n}{2} \equiv 2010 \pmod{10000},$$

il quale a sua volta è equivalente a risolvere (perché?)

$$n^2+n \equiv 4020 \pmod{20000}.$$

Questa equazione ha soluzioni. Per dimostrarlo segnaliamo 2 approcci.

- Fornire un esempio esplicito di soluzione, ad esempio $n = 379$.
- Spezzare la congruenza richiesta nelle 2 congruenze

$$n^2+n \equiv 20 \pmod{32}, \qquad\qquad n^2+n \equiv 4020 \pmod{5^4}.$$

  La prima ha banalmente la soluzione $n = 4$. Per la seconda vi sono a sua volta almeno due approcci.

  – Dimostrare più in generale questo enunciato: se la congruenza $n^2+n \equiv M$ ha soluzione modulo 5, allora la stessa congruenza ha soluzione modulo 5^k per ogni intero positivo k. Questo enunciato si dimostra abbastanza facilmente per induzione (si tratta in fondo di una caso molto particolare del lemma di Hensel).
  – Riscriverla nella forma equivalente $n^2+n \equiv 16081 \pmod{5^4}$ (la quale si dimostra con l'usuale trucco che riduce un'equazione di secondo grado ad un quadrato), quindi utilizzare il fatto che, tra i numeri coprimi con 5, i residui quadratici modulo 5^k sono tutte e sole le classi congrue a ± 1 modulo 5. La dimostrazione di questo fatto generale si può fare sostanzialmente come nell'approccio precedente, oppure sfruttando il generatore per contare quanti devono essere i residui quadratici modulo 5^k.