Stage Senior Pisa 2010 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo il numero reale
$$A_n = \min\{x^2 + y^4 + z^6 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ xyz = n\}.$$
Non è difficile dimostrare che esistono due costanti positive K_1 e K_2 ed un esponente α tali che
$$K_1 n^\alpha \leq A_n \leq K_2 n^\alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Determinare il valore di α.

(A) 2/3 **(B)** 1 **(C)** 12/11 **(D)** 4/3 **(E)** 2

2. Siano a, b, c, d quattro numeri reali (di segno qualunque) che soddisfano le due uguaglianze
$$a + 2b + 2c + d = 1, \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$
Siamo M ed m, rispettivamente, il massimo ed il minimo valore di a compatibili con i vincoli. Determinare $M - m$.

(A) 1 **(B)** 4/3 **(C)** 8/5 **(D)** 5/3 **(E)** 9/5

3. Sia $S = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} : (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$. Alcuni amici stanno esaminando l'insieme delle funzioni $f : S \to S$ tali che
$$f(2010) \in \mathbb{Q}$$
e
$$f(x + f(y)) = y + f(x)$$
per ogni $x \in S$ e ogni $y \in S$.

- Alberto afferma: "di sicuro f è iniettiva".
- Barbara afferma: "di sicuro $f(0) = 0$".
- Cristina afferma: "di sicuro $f(2) \cdot f(1/2) = 1$".
- Dario afferma: "di sicuro $f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{8}) = 4$".

Chi ha ragione?

(A) Nessuno **(B)** Tutti **(C)** Solo Alberto **(D)** Solo Alberto e Barbara

(E) Tutti tranne Dario

4. Sia $p(x)$ un polinomio a *coefficienti interi* tale che $p(2) = p(4) = 5$ e $p(3) = 7$.

   Determinare quale dei seguenti numeri potrebbe essere il termine noto di $p(x)$.

   (A) 1993 **(B)** 2005 **(C)** 2009 **(D)** 2011 **(E)** 2017

5. Un rettangolo è stato suddiviso in 10×8 quadratini, indicati con coppie (i, j) di interi con $1 \leq i \leq 10$ e $1 \leq j \leq 8$. Un *cammino* S–E è una successione di quadratini con la proprietà che, dal secondo in poi, ogni quadratino si ottiene dal precedente incrementando di 1 l'indice di riga o l'indice di colonna (in particolare 2 quadratini successivi hanno sempre un lato in comune).

   Determinare quanti sono i cammini S–E che partono da $(1, 1)$ ed arrivano in $(10, 8)$ senza mai passare per $(3, 5)$.

   (A) 9640 **(B)** 10320 **(C)** 11305 **(D)** 22460 **(E)** 46640

6. Sia T il numero delle terne ordinate (A, B, C) tali che

   - A, B, C sono sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, 2010\}$,
   - $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1$,
   - $A \cap B \cap C = \emptyset$.

   Determinare con quale esponente compare il primo $p = 2$ nella fattorizzazione di T.

   (A) 2007 **(B)** 2010 **(C)** 2013 **(D)** 4017 **(E)** 4018

7. In un grafo, il *grado* di un vertice è definito come il numero di lati uscenti da quel vertice.

   Consideriamo le seguenti quattro situazioni:

   - ogni vertice ha grado 37,
   - metà dei vertici ha grado 2 e metà ha grado 4,
   - metà dei vertici ha grado 3 e metà ha grado 5,
   - metà dei vertici ha grado 4 e metà ha grado 5.

   Determinare *quante* delle situazioni appena descritte sono *impossibili* in un grafo con 2010 vertici.

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

8. Una pila contiene inizialmente M monete. Alberto e Barbara, a turno, prelevano k monete dalla pila, dove k può essere 1, 3 o 4 (a scelta del giocatore, anche diverso ogni volta). Inizia Alberto e vince chi preleva l'ultima moneta.

   Determinare per quale dei seguenti valori di M esiste una strategia vincente per Barbara.

   (A) 2010^{2009} **(B)** 2011^{2011} **(C)** 2011^{2009} **(D)** 2012^{2010} **(E)** 2008^{2011}

9. In un triangolo ABC si ha che $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$. Sia D il punto in cui la circonferenza inscritta tocca il lato BC.

   Determinare la lunghezza di AD.

   (A) $\sqrt{44}$ **(B)** $\sqrt{45}$ **(C)** $\sqrt{46}$ **(D)** $\sqrt{47}$ **(E)** $\sqrt{48}$

10. Consideriamo, nel piano cartesiano, la circonferenza Γ_1 con centro nell'origine e raggio 3. Siano $P = (0, -3)$, $Q = (1, 0)$, e sia Γ_2 una circoferenza con centro in Q e raggio r.

    Determinare per quale valore di r esiste un'*unica* corda di Γ_1 che passa per P ed interseca Γ_2 in due punti che dividono la corda in tre parti, di cui quella contenente P è $1/3$ della corda stessa.

    (A) 1 **(B)** $6/5$ **(C)** $3(\sqrt{2} - 1)$ **(D)** $\sqrt{5} - 1$ **(E)** $2(\sqrt{3} - 1)$

11. Due circonferenze Γ_1 e Γ_2 si incontrano in due punti P e Q. Sia r la tangente comune alla due circonferenze più vicina a Q che a P. La parallela ad r passante per P incontra nuovamente Γ_1 in A e Γ_2 in B.

    Facciamo ora l'inversione rispetto ad una qualunque circonferenza di centro P, e siano Q', A', B' le immagini di Q, A, B, rispettivamente.

    Determinare l'immagine della retta r.

    (A) La circonferenza inscritta ad $A'B'Q'$ **(B)** La circonferenza circoscritta ad $A'B'Q'$

    (C) Una delle circonferenze ex-inscritte ad $A'B'Q'$

    (D) La circonferenza inscritta ad $A'B'P$ **(E)** La circonferenza circoscritta ad $A'B'P$

12. Sia ABC un triangolo, e siano D ed E, rispettivamente, le intersezioni tra la circonferenza inscritta ad ABC ed i lati AB ed AC. Siano I_b ed I_c, rispettivamente, i centri degli ex-cerchi tangenti internamente ai lati AC e AB.

    Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

    (A) Il quadrilatero BCI_bI_c è sempre ciclico.

    (B) Il quadrilatero BCI_bI_c è un trapezio se e solo se $AB = AC$.

    (C) L'incentro di ABC è il punto d'incontro delle diagonali di BCI_bI_c.

    (D) La retta I_bI_c è parallela alla retta DE.

    (E) Le diagonali di BCI_bI_c possono essere perpendicolari.

13. Siano x ed y due interi tali che $y > x$ e $11x + 7y = 2010$.

Determinare il *minimo* valore possibile per $y - x$.

(A) 4 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 12 **(E)** 15

14. Determinare quante sono le terne ordinate (a, b, c) di interi *positivi* tali che

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

(A) 4 **(B)** 7 **(C)** 10 **(D)** 16 **(E)** 22

15. Determinare per quale dei seguenti valori di k esiste un intero positivo x tale che

$$2^{2010} | (x^2 - k).$$

(A) 2000 **(B)** 2005 **(C)** 2010 **(D)** 2015 **(E)** 2020

16. Dato un numero primo p, sia

$$S_p = \{n \in \mathbb{N} : n \leq p \text{ e } p | (n^{35} + 1)\}.$$

Determinare *quanti* valori assume $|S_p|$ quando p varia nell'insieme dei numeri primi maggiori di 2010.

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 35 **(E)** Infiniti

Stage Senior Pisa 2010 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Siano a, b, c le radici complesse del polinomio $x^3 + x + 1$.

   Determinare il polinomio di terzo grado monico che ha come radici $a + b$, $b + c$, $c + a$.

2. Sia a_n una successione *limitata inferiormente* tale che $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   Sapendo che $a_{201} = 201$, determinare il valore di a_{2010}.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" in cui *non* compaiono due *consonanti* uguali in posizioni consecutive.

4. Sia S la somma di tutti gli interi n, con $0 \leq n \leq 10000$, nella cui espressione decimale non compare la cifra 1.

   Determinare la fattorizzazione di S.

5. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza di raggio 1, e sia P il punto di incontro delle diagonali.

   Sapendo che $AP = 1/3$ e $CP = 2/3$, determinare il massimo valore possibile per la differenza tra le lunghezze di BP e DP.

6. Sia AH un'altezza di un triangolo ABC. Sappiamo che $AH = 4$, $BH = 3$, ed il raggio della circonferenza circoscritta è 3.

   Determinare la lunghezza del lato AC.

7. È ben noto che la progressione aritmetica

   $$8, 21, 34, 47, \ldots$$

   contiene infiniti termini che si scrivono in base 10 usando solo cifre 9. Il primo di tali termini è 99.

   Determinare con quante cifre 9 si scrive il centesimo termine della successione con questa stessa proprietà.

8. Sia

   $$T = \sum_{n=0}^{2010} n^{2010}.$$

   Determinare quale resto si ottiene dividendo T per 41.

Problemi dimostrativi

9. (a) Siano a, b, c numeri reali tali che $a \geq b \geq c > 0$. Dimostrare che

$$(a-b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 1.$$

(b) Determinare se esiste una costante K tale che

$$(a-b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq K$$

per ogni terna di numeri reali a, b, c tali che $a \geq b \geq c > 0$.

10. Sia n un intero positivo. Ogni casella di una matrice $2n \times 2n$ è colorata di bianco o di nero. Consideriamo le seguenti condizioni.

(i) Il numero totale di caselle bianche è uguale al numero totale di caselle nere.

(ii) Comunque si scelgano 2 righe, ci sono esattamente n colonne che intersecano le 2 righe in caselle dello stesso colore.

Dimostrare le seguenti implicazioni.

(a) Se valgono la (i) e la (ii), allora n è pari.

(b) Se vale la condizione (ii) e $n > 1$, allora n è pari.

11. Sia $ABCD$ un trapezio in cui la base maggiore AB è il triplo della base minore CD. Sia Γ_1 la circonferenza con centro in C e passante per il punto medio di AC, e sia Γ_2 la circonferenza con centro in D e passante per il punto medio di BD. Sia M il punto medio di AB, e siano P e Q le intersezioni tra Γ_1 e Γ_2.

Dimostrare che M, P, Q sono allineati.

12. Sia N il numero delle quintuple *ordinate* (a, b, c, d, e) di numeri interi *positivi* tali che

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1.$$

Determinare se il numero N è pari o dispari.

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
C	E	E	B	A	E	B	B	C	D	A	E	D	C	E	C

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Applicando AM–GM agli 11 termini
$$\frac{x^2}{6},\quad \frac{x^2}{6},\quad \frac{x^2}{6},\quad \frac{x^2}{6},\quad \frac{x^2}{6},\quad \frac{x^2}{6},\quad \frac{y^4}{3},\quad \frac{y^4}{3},\quad \frac{y^4}{3},\quad \frac{z^6}{2},\quad \frac{z^6}{2}$$
otteniamo che
$$x^2 + y^4 + z^6 \geq 11 \cdot \frac{1}{2^{8/11}3^{9/11}} [xyz]^{12/11}.$$
Inoltre si ha uguaglianza non appena
$$\frac{x^2}{6} = \frac{y^4}{3} = \frac{z^6}{2}.$$
Questo mostra che il minimo richiesto cresce come $n^{12/11}$.

2. Applicando Cauchy-Schwarz alle terne
$$A = (2, 2, 1), \qquad B = (b, c, d)$$
si ha che
$$1 - a = 2b + 2c + d \leq \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = 3\sqrt{1 - a^2}.$$
Con semplici calcoli questo conduce alla disequazione $5a^2 - a - 4 \leq 0$, che ha come soluzioni $-4/5 \leq a \leq 1$. Resta da verificare che il massimo ed il minimo valore di a trovati così sono compatibili con gli altri vincoli, ma per questo basta esibire le quaterne
$$(-4/5, 2/5, 2/5, 1/5), \qquad (1, 0, 0, 0).$$

3. Si tratta di applicare i più classici procedimenti per equazioni funzionali.
   - Ponendo $x = 0$ si ottiene che
   $$f(f(y)) = y + f(0),$$
   da cui (perché?) l'iniettività e la surgettività di f, il che dà ragione ad Alberto.
   - Una volta acquisita la surgettività, sappiamo che esiste un $a \in S$ tale che $f(a) = 0$. Ponendo $x = y = a$, si vede immediatamente (come?) che anche Barbara ha ragione.

- Una volta saputo che $f(0) = 0$, ponendo $y = f(z)$ ed utilizzando l'identità ottenuta al primo punto, ricaviamo che
$$f(x + z) = f(x) + f(z),$$
che è la solita equazione di Cauchy. Sapendo che $f(2010) \in \mathbb{Q}$, possiamo dedurre (come?) che $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e che anzi esiste una costante $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) = \lambda x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$. Per sostituzione nell'equazione si ricava che $\lambda = \pm 1$ (occhio: cosa si sostituisce? quali valori si danno ad x e y?). In entrambi i casi Cristina ha ragione.
- Osserviamo infine che la funzione $f : S \to S$ definita da
$$f(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{2}$$
verifica l'equazione funzionale proposta (controllare!), ma non la proprietà asserita da Dario, che quindi ha torto.

4. Osserviamo che il polinomio $7-2(x-3)^2$ verifica le 3 condizioni richieste. Ogni altro polinomio a coefficienti interi che le soddista sarà quindi della forma (perché?)
$$p(x) = 7 - 2(x - 3)^2 + (x - 2)(x - 3)(x - 4)q(x)$$
per un opportuno polinomio $q(x)$ a coefficienti interi. Ne segue che il suo termine noto è
$$p(0) = -11 - 24q(0),$$
e dunque in particolare congruo a -11 modulo 24. L'unico numero indicato nelle risposte con questa proprietà è 2005. A rigor di logica bisognerebbe verificare che *tutti* i numeri congrui a -11 modulo 24 possono essere $p(0)$. Perché questo è vero?

5. Per andare da $(1, 1)$ a $(10, 8)$ dobbiamo fare 9 spostamenti in una direzione e 7 nell'altra, nell'ordine che preferiamo. Si tratta quindi di scegliere 7 oggetti su 16, il che si può fare in $\binom{16}{7}$ modi. Dobbiamo ora escludere i cammini che passano da $(3, 5)$. Ognuno di questi si spezza in un cammino da $(1, 1)$ a $(3, 5)$ più un cammino da $(3, 5)$ a $(10, 8)$.

   In conclusione il numero richiesto è (perché?)
$$\binom{16}{7} - \binom{6}{2} \cdot \binom{10}{3} = 11440 - 15 \cdot 120 = 9640.$$

6. Si tratta di dimostrare che $T = 2010 \cdot 2009 \cdot 2008 \cdot 4^{2007}$.

   Infatti, scegliere un terna con le proprietà richieste è equivalente (perché?) a scegliere una terna ordinata (x, y, z) di elementi distinti (pensati in modo tale che $A \cap B = \{x\}$, $B \cap C = \{y\}$, $C \cap A = \{z\}$) e scegliere per ognuno dei restanti 2007 elementi tra 4 possibilità (cioè se stare in A, in B, in C, o in nessuno). Queste considerazioni portano (come?) al conteggio riportato sopra.

7. È ben noto che in un grafo il numero dei vertici con grado dispari è necessariamente pari (classico double counting: la somma delle valenze è sempre uguale al doppio del numero dei lati). Questo basta per concludere che l'ultima situazione è impossibile.

   Resta da verificare che le rimanenti sono possibili, il che si può fare in tanti modi diversi. Ne riportiamo uno per tipo.

- Disponiamo i vertici lungo una circonferenza e poi colleghiamo ciascuno con i 18 che lo precedono, i 18 che lo seguono, e quello opposto: in questo modo ogni vertice ha grado 37 (ma la costruzione funziona?).
- Prendiamo 1005 vertici e li colleghiamo come in un poligono con 1005 lati. I restanti li dividiamo in gruppetti da 5 in cui facciamo tutti i collegamenti possibili (grafo completo su 5 punti). In questo modo i primi avranno grado 2, i restanti grado 4.
- Prendiamo la costruzione descritta al punto precedente, e poi uniamo ciascun vertice del primo gruppo con uno ed un solo vertice del secondo. In questo modo i primi avranno grado 3, i restanti grado 5.

8. Si tratta di mostrare che esiste una strategia vincente per Barbara se e solo se M è congruo a 0 o 2 modulo 7. A questo punto le classi modulo 7 dei numeri indicati nelle risposte sono, nell'ordine (perché?), 1, 2, 4, 1, -1 e quindi l'unica favorevole a Barbara è la seconda.

   Per dimostrare la caratterizzazione iniziale basta fare le seguenti 3 osservazioni.

   - Se un giocatore trova un pila con un numero di monete congruo a 0 o 2 modulo 7, allora è costretto a lasciare un numero di monete di una delle restanti 5 classi.
   - Se un giocatore trova un pila con un numero di monete delle restanti 5 classi, allora può muovere in modo tale da lasciare un numero di monete congruo a 0 o 2 modulo 7.
   - La condizione finale (cioè 0 monete) è congrua a 0 modulo 7.

   In che modo le 3 osservazioni precedenti permettono di caratterizzare i casi favorevoli ad Alberto o Barbara? Come si arriva a congetturare una struttura del genere? Come si ottengono le classi modulo 7 dei numeri indicati nelle risposte?

9. Utilizzando le notazioni standard, si ha che (perché?)

   $$BD = \frac{a+c-b}{2} = 3.$$

   Applicando quindi il teorema di Carnot nel triangolo ABD si ha che

   $$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos\beta = 58 - 42\cos\beta.$$

   Per ricavare $\cos\beta$ scriviamo il teorema di Carnot nel triangolo ABC ottenendo che

   $$81 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta = 49 + 64 - 112\cos\beta,$$

   da cui $\cos\beta = 2/7$. A questo punto la conclusione è immediata.

10. Consideriamo l'omotetia con centro in P e fattore $1/3$. L'immagine di Γ_1 è la circonferenza Γ_3 con centro in $(0,-2)$ e raggio 1.

    L'idea fondamentale è che le corde con la proprietà richiesta sono tutte e sole quelle che passano per P e per le intersezioni tra Γ_2 e Γ_3, e quindi possono essere nessuna, una o due, a seconda che le circonferenze siano esterne, tangenti, o secanti (perché tutto ciò è vero? cosa c'entra l'omotetia?).

    Nel nostro caso basta quindi imporre che Γ_2 e Γ_3 siano tangenti esternamente (perché esternamente?) il che accade se e solo se la somma dei loro raggi è uguale alla distanza tra i centri (perché?), il che porta ad $r = \sqrt{5} - 1$.

11. Si tratta di stabilire l'immagine dei vari enti geometrici in gioco.

    - L'immagine della retta AB è la retta $A'B'$, che coincide con la retta AB (perché?).
    - L'immagine di Γ_1 è la retta $A'Q'$, mentre l'immagine di Γ_2 è la retta $B'Q'$ (perché?).
    - L'immagine di r è una circonferenza che passa per P ed è tangente in P alla retta $A'B'$ (perché?).
    - L'immagine di r è una circonferenza tangente alle immagini di Γ_1 e Γ_2 (perché?).
    - In conclusione, l'immagine di r è una circonferenza tangente alle 3 rette $A'B'$, $A'Q'$, $B'Q'$. Attenzione: ci sono 2 circonferenze con questa proprietà, una inscritta ed una ex-inscritta al triangolo $A'B'Q'$. Per sapere di quale si tratta bisogna capire da che parte stanno i vari oggetti rispetto alla retta $A'B'$.

12. Esaminiamo le varie affermazioni.

    - La ciclicità di BCI_bI_c segue da facili angle chasing, oppure dal fatto che
    $$\angle I_cBI_b = \angle I_cCI_b = 90^\circ.$$
    Infatti, per esempio, I_cB è una bisettrice *esterna* dell'angolo in B, dunque è perpendicolare a BI_b che è la bisettrice *interna* dello stesso angolo. Un ragionamento analogo vale nel vertice C.
    - Un semplice angle chasing rivela che
    $$\angle I_cBC = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \quad \text{e} \quad \angle BCI_b = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$
    In particolare la loro somma è sempre maggiore di 180° e quindi i lati BI_c e CI_b non possono essere paralleli.
    D'altra parte si ha che
    $$\angle BI_cI_b = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2},$$
    e quindi i lati BC e I_bI_c sono paralleli se e solo se $\angle I_cBC + \angle BI_cI_b = 180^\circ$, il che accade se e solo se $\beta = \gamma$ (perché?), cioè se e solo se $AB = AC$.
    - Come già osservato, le diagonali del quadrilatero BCI_bI_c sono bisettrici di ABC, dunque si incontrano necessariamente nell'incentro.
    - Le rette I_bI_c e DE sono parallele in quanto entrambe perpendicolari alla bisettrice dell'angolo in A (perché?).
    - L'angolo tra le diagonali BI_b e CI_c è $90^\circ + \alpha/2$ (perché?), dunque non può mai essere retto.

13. La soluzione generale dell'equazione diofantea di primo grado è $x = 2 + 7k$, $y = 284 - 11k$, da cui $y - x = 282 - 18k$. Ne segue che $y - x$ deve essere positivo e congruo a 282 modulo 18. Il minimo numero con questa proprietà è 12.

    Per trovare la formula generale per la diofantea basta ragionare modulo 7 e dedurre che deve essere $x \equiv 2 \pmod 7$, e trovare quindi il corrispondente valore di y.

14. Si tratta di dimostrare che le uniche terne che risolvono il problema sono $(3,3,3)$, $(2,4,4)$ e le sue 3 permutazioni, $(2,3,6)$ e le sue 6 permutazioni.

    Per dimostrarlo si osserva intanto che la minore delle 3 variabili (che possiamo wlog assumere che sia a) può essere solo 2 o 3 (che succederebbe se fosse più grande?). Restano quindi 2 casi.

    - Se $a = 2$, allora con semplici calcoli troviamo che
    $$b = \frac{2c}{c-2} = 2 + \frac{4}{c-2},$$
    in cui i possibili valori di c sono (perché?) 3, 4, 6.
    - Se $a = 3$, , allora con semplici calcoli troviamo che
    $$b = \frac{3c}{2c-3} = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{9}{2c-3}\right),$$
    in cui i possibili valori di c sono (perché?) 2, 3, 6.

    Si noti che questo procedimento produce più volte le stesse terne.

15. Il problema richiede di determinare quale, tra i numeri indicati nelle risposte, è un *residuo quadratico* modulo 2^{2010}.

    Per i numeri dispari vale il seguente *fatto generale*: se $k \geq 3$ un numero dispari d è residuo quadratico modulo 2^k se e solo se $d \equiv 1 \pmod 8$ (si dimostra facilmente per induzione: se $a_k^2 \equiv d \pmod{2^k}$, allora uno ed uno solo tra a_k^2 e $(a_k + 2^k)^2$ è congruo a d modulo 2^{k+1}). Questo mostra che i numeri dispari indicati non vanno bene.

    Restano da esaminare i tre numeri pari.

    - Poiché $2010 \equiv 2 \pmod 4$, è evidente che 2010 non può essere residuo quadratico.
    - Per il 2000, se fosse $x^2 \equiv 2000 \pmod{2^{2010}}$, sarebbe $x = 4k$, con (perché?)
    $$k^2 \equiv 125 \pmod{2^{2006}}.$$
    Ma $125 \not\equiv 1 \pmod 8$ (e allora?).
    - Per il 2020, infine, ponendo $x = 2k$ ci si riduce a
    $$k^2 \equiv 505 \pmod{2^{2008}},$$
    e questa ha soluzione (perché? e allora?).

    Si noti che questo procedimento (di dividere per potenze di 2 finchè ce ne stanno) permette di caratterizzare anche tutte le classi pari che sono residui quadratici.

16. Il problema richiede di determinare *quante* sono le radici 35-esime di -1 modulo p. La risposta è che vi sono 4 possibilità al variare di p, ed in particolare
$$\begin{aligned}
|S_p| = 1 &\iff (p-1, 35) = 1,\\
|S_p| = 5 &\iff (p-1, 35) = 7,\\
|S_p| = 7 &\iff (p-1, 35) = 5,\\
|S_p| = 35 &\iff (p-1, 35) = 35.
\end{aligned}$$

Per dimostrarlo sfruttiamo il fatto che la struttura moltiplicativa modulo p ammette un generatore g. Posto $x = g^k$, ed osservato che $-1 \equiv g^{(p-1)/2} \pmod{p}$ (perché?) si tratta quindi di trovare gli esponenti k tali che $1 \leq k \leq p-1$ e

$$g^{35k} \equiv g^{(p-1)/2} \pmod{p}.$$

Questa condizione a sua volta equivale a (perché?)

$$35k \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{(p-1)},$$

ossia, tenendo conto che $(p-1)$ è sempre pari,

$$35k = (2h+1) \cdot \frac{p-1}{2}$$

per un qualche h.

Distinguiamo ora 4 casi a seconda del massimo comun divisore tra $(p-1)$ e 35.

- Se $(p-1, 35) = 1$, allora la relazione precedente dice che k deve essere un multiplo dispari di $(p-1)/2$, e l'unico tra 1 e $p-1$ è proprio $(p-1)/2$ stesso.
- Se $(p-1, 35) = 7$, allora la relazione precedente dice (perché?) che k deve essere un multiplo dispari di $(p-1)/10$, e quelli tra 1 e $p-1$ sono quelli corrispondenti a $k = 0, 1, \ldots, 4$ (5 possibilità).
- Se $(p-1, 35) = 5$, allora la relazione precedente dice (perché?) che k deve essere un multiplo dispari di $(p-1)/14$, e quelli tra 1 e $p-1$ sono quelli corrispondenti a $k = 0, 1, \ldots, 6$ (7 possibilità).
- Se $(p-1, 35) = 35$, allora la relazione precedente dice (perché?) che k deve essere un multiplo dispari di $(p-1)/70$, e quelli tra 1 e $p-1$ sono quelli corrispondenti a $k = 0, 1, \ldots, 34$ (35 possibilità).

Per concludere bisognerebbe mostrare l'esistenza di primi maggiori di 2010 per cui $(p-1, 35)$ assume i 4 valori possibili, cioè per esempio congrui a 1, 2, 6, 8 modulo 35. Questo si può fare direttamente (buon divertimento), oppure ricorrendo al teorema di Dirichlet (quale? cosa dice?).

Test Finale – Risposte

1. $x^3 + x - 1$
2. -201
3. 2880
4. $2^2 \cdot 3^6 \cdot 11^2 \cdot 101$

5. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

6. 24/5

7. 596

8. 1

9. (a) ...
   (b) Non esiste.

10. ...

11. ...

12. Il numero N è dispari.

Test Finale – "Aiutini"

1. Utilizzando le relazioni tra radici e coefficienti, ed un minimo di manipolazione di somme cicliche, si ha che
$$S = \sum_{\text{cyc}}(a+b) = 2(a+b+c) = 0,$$
$$Q = \sum_{\text{cyc}}(a+b)(b+c) = (a+b+c)^2 + (ab+bc+ca) = 1,$$
$$P = (a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 1.$$
Il polinomio è pertanto
$$x^3 - Sx^2 + Qx - P = x^3 + x - 1.$$

2. Il polinomio associato alla ricorrenza è $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$, le cui radici sono 1 e 3. La soluzione generale della ricorrenza è quindi della forma
$$a_n = c_1(-3)^n + c_2(-1)^n.$$
La limitatezza inferiore basta per concludere che $c_1 = 0$ (perché?). A questo punto la condizione $a_{201} = 201$ dice che $c_2 = -201$. Ne segue facilmente che $a_{2010} = -201$.

3. Applicando il principio di inclusione-esclusione si ottiene che gli anagrammi richiesti sono
$$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} - \frac{7!}{2!\cdot 2!} - \frac{7!}{2!\cdot 2!} + \frac{6!}{2!} = 2880,$$
in cui
   - il primo termine rappresenta la totalità degli anagrammi,

- il secondo e terzo termine rappresentano gli anagrammi che contengono 2 S consecutive e quelli che contengono 2 T consecutive (entrambi si possono pensare ottenuti anagrammando la parola di 7 lettere in cui abbiamo cancellato una S od una T, per poi ripeterla raddoppiata nella parola anagrammata finale),
- il quarto termine rappresenta gli anagrammi che contengono sia la doppia S che la doppia T (come prima si possono pensare ottenuti anagrammando "STAGII" e raddoppiando S e T alla fine).

4. Sia $C = \{0, 2, 3, \ldots, 9\}$ l'insieme delle cifre accettabili. Allora si ha che
$$S = \sum_{(a,b,c,d)\in C^4} \left(a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + e\right) = 9^3 \cdot 1111 \cdot \sum_{k\in C} k = 3^6 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 44.$$
Da dove salta fuori la seconda uguaglianza? E la prima?

5. Poiché $BP \cdot DP = AP \cdot CP$ (perché?) si avrà che la differenza $BP - DP$ è massima quando DP è minimo (perché?). Questo accade quando P e D sono allineati con il centro O della circonferenza (perché?). In tal caso $BP - PD = 2OP$. Non resta dunque che calcolare OP.
Sia allora H la proiezione di O su AC. Allora $PH = 1/6$ e $OH = \sqrt{3}/2$, da cui
$$OP^2 = PH^2 + OH^2 = \frac{7}{9},$$
da cui $BP - PD = 2\sqrt{7}/3$.

6. Segnaliamo due approcci.
   - *Approccio sintetico.* Sia O il circocentro, e sia M il punto medio di AC. È ben noto che $\angle BAH = \angle OAM$ (volendo è il punto fondamentale per dimostrare che l'ortocentro è il coniugato isogonale del circocentro), da cui si deduce (perché?) che i triangoli BAH e OAM sono simili.
   Poiché $AB = 5$ e $OA = 3$, si deduce immediatamente che $AM = 12/5$, da cui $AC = 24/5$.
   - *Approccio trigonometrico.* Dall'esame del triangolo rettangolo ABH deduciamo (come?) che $\sin\beta = 4/5$. Dal teorema dei seni si ha quindi che $AC = 2R\sin\beta = 2 \cdot 3 \cdot 4/5 = 24/5$.

7. Si tratta di risolvere l'equazione diofantea $8 + 13k = 10^h - 1$, la quale è equivalente a $10^h \equiv 9 \pmod{13}$, e cioè $(-3)^h \equiv 9 \pmod{13}$. La prima soluzione è chiaramente $h = 2$. Poiché -3 ha ordine moltiplicativo 6 modulo 13 (perché? come si verifica?) ne segue che i valori buoni di h sono tutti e soli quella della forma $2 + 6m$ (perché?). Il centesimo sarà quindi quello corrispondente ad $m = 99$.

8. Ricordiamo un fatto generale utile (da ricordare: come si dimostra?). Se p è un numero primo, allora
$$\sum_{n=1}^{p} n^k \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{se } k \text{ non divide } p-1, \\ -1 \pmod{p} & \text{se } k \text{ divide } p-1. \end{cases}$$
Inoltre nella somma possiamo sostituire gli interi da 1 a p con un insieme qualunque di p interi che rappresentino tutte le classi di conguenza modulo p.
Nel caso specifico possiamo applicare questo risultato con $p = 41$ e $k = 2010$, per dedurre che la somma su un qualunque blocco di 41 interi consecutivi è congrua a zero modulo 41. Poiché $2010 = 41 \cdot 49 + 1$, non resta che considerare l'ultimo termine (e allora?).

9. (a) Svolgendo i calcoli ci troviamo a dover dimostrare che
$$2+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}.$$
A questo punto si aprono due strade, sostanzialmente equivalenti.
   - Riscrivere la disuguaglianza nella forma
$$1\cdot 1+1\cdot 1+\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}\geq 1\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\cdot 1+\frac{b}{c}\cdot 1+1\cdot\frac{c}{b},$$
quindi applicare la disuguaglianza di riarrangiamento alle due quaterne
$$\frac{b}{a}\leq 1\leq 1\leq\frac{a}{b}\qquad\text{e}\qquad\frac{c}{b}\leq 1\leq 1\leq\frac{b}{c}.$$
Come e perché si conclude?
   - Ponendo $x=a/b$ e $y=b/c$ (quindi $x\geq 1$ e $y\geq 1$) la disuguaglianza da dimostrare diventa
$$2+xy+\frac{1}{xy}=x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}.$$
Svolgendo i conti ed eliminando i denominatori ci ritroviamo a dimostrare che
$$(1+xy)^2=(1+xy)(x+y).$$
Eliminato il fattore comunque, quello che resta è $(x-1)(y-1)\geq 0$.

   (b) Basta porre $(a,b,c)=(n,1,1)$ per vedere (come?) che il K richiesto non può esistere.

10. Segnaliamo due approcci, il primo valido per entrambe le domande, il secondo valido solo per la domanda (a).

   - *Confronto tra 3 righe.* Il caso $n=1$ si tratta banalmente a parte. Supponiamo dunque che sia $n\geq 1$. Consideriamo le prime 2 righe: coincideranno in n posizioni, che supporremo wlog essere le prime n. Le restanti posizioni sono "inverse" le une rispetto alle altre.

     Consideriamo ora una terza riga, e supponiamo che con la prima riga questa abbia a coincidenze nelle prime n posizioni, ed x coincidenze nelle restanti n posizioni. Allora la terza riga avrà con la seconda riga a coincidenze nelle prime n posizioni ed $n-x$ coincidenze nelle restanti n posizioni (perché?). Dovendo essere (perché?)
$$a+x=a+n-x,$$
ne segue immediatamente che n è pari.
   - *Double counting.* Contiamo in 2 modi diversi il numero di elementi dell'insieme $S=\{\{r_i,r_j\},C\}$, dove r_i ed r_j sono due righe distinte, e C è una colonna che interseca entrambe le righe in caselle di colore *diverso*.

     Dalla condizione (ii) deduciamo (come?) che
$$|S|=\binom{2n}{2}\cdot n=n^2(2n-1)\equiv n^2\equiv n\pmod 2.$$

Indicando con b_i il numero di caselle bianche della colonna n-esima, abbiamo anche che (perché?)

$$|S| = \sum_{i=1}^{2n} b_i(2n - b_i) \equiv \sum_{i=1}^{2n} b_i^2 \equiv \sum_{i=1}^{2n} b_i \pmod 2.$$

D'altra parte dalla condizione (i) deduciamo (come?) che la somma dei b_i è pari, da cui si conclude velocemente (come?) la dimostrazione.

Allo stesso risultato si giunge definendo l'insieme S imponendo che la colonna C intersechi r_i ed r_j in caselle di colore uguale.

Segnaliamo infine che il problema è strettamente connesso alle *matrici di Hadamard*. In particolare non è noto se è possibile colorare nel modo richiesto ogni matrice quadrata di dimensione multipla di 4.

11. La tesi è equivalente a dimostrare che M sta sull'asse radicale delle due circonferenze, e cioè che M ha la stessa potenza rispetto ad entrambe. Per la formula che lega la potenza al raggio ed alla distanza dal centro, ci riduciamo (come?) a dimostrare che

$$CM^2 - \frac{1}{4}CA^2 = DM^2 - \frac{1}{4}DB^2.$$

Per far questo ricorriamo ad un approccio analitico, mettendoci nel sistema di riferimento in cui (ma perché si può fare? dove variano i parametri?)

$$A = (-3, 0), \qquad B = (3, 0), \qquad C = (a + 1, h), \qquad D = (a - 1, h).$$

In tale sistema si tratta di verificare che

$$(a+1)^2 + h^2 - \frac{1}{4}\left[(a+4)^2 + h^2\right] = (a-1)^2 + h^2 - \frac{1}{4}\left[(a-4)^2 + h^2\right],$$

la quale è una semplice identità algebrica.

12. L'idea alla base della soluzione è la seguente. Poiché l'ordine è importante, se una quintupla è soluzione, allora lo sono anche tutte le sue permutazioni. Pertanto le quintuple con un numero pari di permutazioni non incidono sulla parità di N. Le uniche quintuple con un numero dispari di permutazioni sono (perché?) quelle del tipo (a, a, a, a, a) e quelle del tipo (a, a, a, a, b).

Del primo tipo c'è ovviamente solo la $(5, 5, 5, 5, 5)$. Per trovare quelle del secondo tipo dobbiamo risolvere l'equazione diofantea

$$\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Con i soliti passaggi standard, questa si riduce a

$$b = \frac{a}{a-4} = 1 + \frac{4}{a-4},$$

da cui al solito modo (quale?) si ricavano le soluzioni $(a, b) = (5, 5)$ (che però produce la quintupla già citata), $(a, b) = (6, 3)$, $(a, b) = (8, 2)$.

Essendoci 3 quintuple con un numero dispari di permutazioni, N sarà necessariamente dispari.