Stage Senior Pisa 2011 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Consideriamo il numero $m = \min\{x^2 + y^3 + z : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ xy^2z^3 = 1\}$.
Determinare per quale dei seguenti valori di k si ha che m^k è un numero razionale.

(A) 2010^{2010} **(B)** 2011^{2011} **(C)** 2012^{2012} **(D)** 2013^{2013} **(E)** 2014^{2014}

2. Siano x, y, z numeri reali positivi tali che
$$\frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$
Determinare il minimo valore che può assumere l'espressione $x + 8y + 4z$.

(A) 60 **(B)** 64 **(C)** 72 **(D)** 91 **(E)** 96

3. Sia $p(x)$ un polinomio a *coefficienti interi*. Sappiamo che il termine noto è 2011 e $p(p(3)) = 3$.
Determinare quanti valori *negativi* può assumere $p(3)$.

(A) Nessuno **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** Infiniti

4. Consideriamo l'equazione funzionale
$$f(x + 3f(y)) = f(x) + ay,$$
dove a è un parametro reale. Alcuni amici stanno cercando di trovare delle funzioni che la verificano per ogni x ed y nell'insieme di partenza.

- Alberto afferma: "per $a = 0$ esiste almeno una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non costante che la soddisfa".
- Barbara afferma: "esiste almeno una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che la soddisfa se e solo se $a \geq 0$".
- Cristina afferma: "per $a = 75^{75}$ esistono esattamente due funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ che la soddisfano".
- Dario afferma: "per $a = 57^{57}$ non esiste nessuna funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ che la soddisfa".

Chi ha ragione? (Attenzione agli insiemi di partenza e di arrivo)

(A) Tutti tranne Alberto **(B)** Tutti tranne Barbara **(C)** Tutti tranne Cristina

(D) Tutti tranne Dario **(E)** Tutti

5. Alberto, Barbara e Cristina stanno facendo dei palleggi di pallavolo. Ad ogni turno, il giocatore che riceve la palla la passa ad un altro giocatore.

   Sia A_n il numero delle successioni, costituite da n passaggi, in cui Alberto è sia il primo a passare la palla, sia il destinatario dell'ultimo passaggio. Così, per esempio, abbiamo che $A_2 = A_3 = 2$.

   Determinare (con $\lfloor x \rfloor$ si intende la parte intera di x)

$$\left\lfloor \frac{A_{2014}}{A_{2011}} \right\rfloor .$$

   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 16

6. Sia $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2011\}$, e sia $\mathcal{P}_3(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X con esattamente 3 elementi. Per ogni $A \in \mathcal{P}_3(X)$, definiamo $\mathrm{Centr}(A)$ l'elemento centrale di A, cioè quello che non è né il più piccolo, né il più grande elemento di A. Poniamo infine

$$S = \sum_{A \in \mathcal{P}_3(X)} \mathrm{Centr}(A).$$

   Determinare quale dei seguenti numeri primi *non* divide S.

   (A) 2 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 503

7. Un grafo ha 2011 vertici e contiene *esattamente* un triangolo. Sia L il massimo numero di lati che può avere il grafo.

   Determinare quale *resto* si ottiene dividendo L per 100.

   (A) 11 **(B)** 19 **(C)** 23 **(D)** 27 **(E)** 31

8. Alberto e Barbara giocano con 2 pile di gettoni. Alternativamente, ogni giocatore sceglie una pila contenente almeno un gettone. Se questa contiene un solo gettone, il giocatore lo toglie. Se la pila scelta contiene almeno 2 gettoni, il giocatore toglie da essa un numero a sua scelta di gettoni, purché ne tolga almeno 1 e ne lasci almeno 1.

   Inizialmente le 2 pile contengono, rispettivamente, 2011 e k gettoni. La prima mossa tocca ad Alberto. Vince chi toglie l'ultimo gettone.

   Determinare *quanti* sono i valori di k, con $0 \leq k \leq 10000$, per cui Barbara ha una strategia vincente.

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 3333 **(D)** 5000 **(E)** 5001

9. Sia $ABCD$ un quadrilatero. Siano G_A, G_B, G_C, G_D, rispettivamente, i baricentri dei triangoli BCD, CDA, DAB, ABC.

   Allora il quadrilatero $G_A G_B G_C G_D$ è ciclico se e solo se ...

   (A) $ABCD$ è ciclico **(B)** $ABCD$ è un quadrato **(C)** $ABCD$ è un rettangolo

   (D) $ABCD$ è un parallelogrammo **(E)** $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari

10. Una circonferenza Γ_1, di raggio r, è tangente internamente nel punto A ad una circonferenza Γ_2, di raggio R (con $R > r$). Una retta s, parallela alla tangente in A alle due circonferenze, interseca Γ_1 in B e Γ_2 in C, con B e C che stanno nello stesso semipiano rispetto alla congiungente i centri di Γ_1 e Γ_2.

    Indichiamo con d la distanza di s da A. Ci chiediamo per quale valore di d si ha che la circonferenza circoscritta ad ABC ha raggio massimo.

    Determinare quale delle seguenti affermazioni è *corretta*.

    (A) Il massimo si ha se e solo se $d = r$. **(B)** Il massimo si ha se e solo se $d = 2r$.

    (C) Il massimo si ha se e solo se $d = 2r^2/R$.

    (D) Il massimo non esiste in quanto il raggio richiesto tende a $+\infty$ quando d tende a 0.

    (E) Il raggio richiesto è indipendente dal valore di d.

11. Sia Γ una circonferenza di centro O, e sia A un punto esterno ad essa. Per ogni punto P del piano, indichiamo con B_P e C_P le intersezioni tra Γ e la retta OP.

    Alcuni amici stanno considerando il luogo $\mathcal{P}$ costituito dai punti P del piano tali che

    $$PB_P \cdot PC_P = AP^2.$$

    - Alberto afferma: "Il luogo $\mathcal{P}$ è una retta perpendicolare ad AO".
    - Barbara afferma: "Il luogo $\mathcal{P}$ interseca ogni retta passante per O".
    - Cristina afferma: "condotte da A le due rette tangenti a Γ, il luogo $\mathcal{P}$ contiene i punti medi dei segmenti di tangenza".

    Chi ha ragione?

    (A) Solo Alberto **(B)** Solo Barbara **(C)** Solo Cristina

    (D) Solo Barbara e Cristina **(E)** Solo Alberto e Cristina

12. Siano A e B due punti del piano. Sia $\mathcal{A}$ il luogo dei punti P del piano tali che $2PB \leq PA$. Sia $\mathcal{E}_\ell$ il luogo dei punti P del piano tali che $PA + PB \leq \ell \cdot AB$, dove $\ell > 1$ è un parametro.

L'insieme $\mathcal{A}$ e l'insieme $\mathcal{E}_\ell$ hanno la stessa area se e solo se ...

(A) $9\ell\sqrt{\ell^2 - 1} = 16$ **(B)** $9\ell^2 = 16$ **(C)** $3\ell = 4$ **(D)** $4\ell = 9$

(E) $16\ell\sqrt{\ell^2 + 1} = 25$

13. Determinare *quanti* sono gli interi positivi che soddisfano le seguenti proprietà:

- sono divisibili per 4, 9, 11;
- la loro rappresentazione in base 10 ha 6 cifre di cui le prime 3 (a sinistra) sono 679.

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

14. Determinare *quante* sono le coppie (a, b) di interi (non necessariamente positivi) tali che $a \neq \pm b$ e vale l'uguaglianza

$$\frac{1}{a+b} + \frac{4}{a-b} = 1.$$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 5 **(E)** 6

15. Determinare quanti sono gli interi k, con $100 \leq k \leq 200$, tali che la somma

$$2^k + 4^k + 6^k + \ldots + 74^k + 76^k$$

è multipla di 37.

(A) 0 **(B)** 3 **(C)** 50 **(D)** 51 **(E)** 98

16. Consideriamo le seguenti 4 espressioni

$$2^a - 2011, \qquad a^{2011} - 2011, \qquad a^4 + 81, \qquad a^9 - 6.$$

Determinare per *quante* di esse esiste un valore intero positivo di a che le rende multiple di 37.

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Stage Senior Pisa 2011 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Determinare il più piccolo intero positivo a per cui esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che $p(8) = 8$, $p(15) = 15$, e l'equazione $p(x) = x + a$ ha almeno una soluzione intera.

2. Sia a_n la successione definita per ricorrenza ponendo $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e
$$a_{n+1} = 2(a_n - a_{n-1})$$
per ogni $n \geq 1$. Determinare la massima potenza di 2 che divide a_{2011}.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" da cui, cancellando opportunamente 3 lettere, si ottiene la parola "GATTI".

4. Alberto e Barbara hanno una pila contenente k gettoni. Ad ogni mossa, a turno, prelevano 2 o 3 gettoni dalla pila. Perde chi non ha più mosse valide a disposizione. Inizia Alberto, ma alla *prima mossa* Barbara ha la possibilità di impedire ad Alberto una delle due opzioni, rendendo sostanzialmente obbligata la prima mossa di Alberto (il vincolo vale comunque solo per la prima mossa).

   Determinare il più piccolo $k \geq 2011$ per cui Alberto ha comunque una strategia vincente.

5. Sia ABC un triangolo, e sia M un punto del lato BC tale che $MA = MB = MC = 1$.

   Determinare il massimo valore possibile di $AB + AC$.

6. In un trapezio $ABCD$ gli angoli in A e D sono retti. Sappiamo inoltre che $AB = AD = 12$ e $CD = 7$. Determinare $\sin(\angle DBC)$.

7. Determinare quante sono le coppie (x, y) di interi *positivi* tali che
$$9x^2 - y^2 = 1800.$$

8. Determinare quale resto si ottiene dividendo per 37 il numero di 4022 cifre la cui scrittura in base 10 si ottiene ripetendo 2011 volte di fila le cifre "10".

Problemi dimostrativi

9. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}.$$

Dimostrare che

$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c(a + 2b)} + \frac{1 - b^2 + a^2}{a(b + 2c)} + \frac{1 - c^2 + b^2}{b(c + 2a)} \geq 6.$$

10. Lungo una circonferenza sono disposti 100 numeri reali *distinti*.

Dimostrare che ne esistono 4 consecutivi tali che la somma dei due laterali è minore della somma dei 2 centrali.

11. Sia AB una corda di una circonferenza parallela ad un diametro MN. Sia s la retta tangente in M alla circonferenza. La retta NA interseca s in C. La retta NB interseca s in D.

Dimostrare che $MC \cdot MD = MN^2$.

12. Determinare tutte le quaterne (a, b, n, p) di interi positivi in cui p è un numero primo e

$$a^3 + b^3 = p^n.$$

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	B	C	E	D	B	D	B	A	E	E	A	D	C	B	D

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Applichiamo AM–GM a 25 termini, di cui 3 uguali a $x^2/3$, 4 uguali a $y^3/4$, e 18 uguali a $z/18$ (da dove arriva questa scelta bizzarra?). Otteniamo che

$$x^2+y^3+z \geq 25\left(\frac{x^6y^{12}z^{18}}{3^3\cdot 4^4\cdot 18^{18}}\right)^{1/25} = \frac{25}{6}\sqrt[25]{\frac{1}{2\cdot 3^{14}}} = m.$$

Per avere m^k intero occorre che l'esponente k sia multiplo di 25 (quale fatto generale si sta usando?).

L'approccio è ovviamente equivalente ad usare una AM–GM pesata con pesi opportuni.

2. Applicando Cauchy-Schwarz alle terne

$$A=\left(\sqrt{x},\sqrt{8y},2\sqrt{z}\right), \qquad B=\left(\frac{2}{\sqrt{x}},\frac{\sqrt{2}}{y},\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

si ha (come?) che

$$8 \leq (x+2y+4z)^{1/2}\cdot\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)^{1/2},$$

da cui segue facilmente la conclusione.

Ad essere precisi, bisognerebbe anche mostrare che l'uguaglianza si può realizzare. Perché questo è sostanzialmente ovvio?

3. Poniamo $p(3)=a$. Allora si ha (perché?) che $p(a)=3$. Da queste due informazioni si deduce (come?) che

$$p(x)=a+3-x+(x-3)(x-a)q(x)$$

per un opportuno polinomio $q(x)$ a coefficienti interi. Imponendo la condizione $p(0)=2011$, e ponendo $q(0)=b$, otteniamo con semplici calcoli che $2008=a(1+3b)$. Quindi a deve essere un divisore negativo di 2008, e $a\equiv 1$ modulo 3 (perché?). Quali sono i divisori negativi di 2008? Quanti di questi sono congrui ad 1 modulo 3? In realtà quest'ultima parte è equivalente a chiedersi quanti sono i divisori positivi di 2008 che sono congrui a 2 modulo 3 (perché?).

Ad essere precisi, bisognerebbe poi mostrare che per ognuno di tali valori esiste un polinomio che lo realizza. Perché questo è sostanzialmente ovvio?

4. Si tratta di dimostrare che esiste almeno una soluzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se e solo se $a \geq 0$, ed esiste almeno una soluzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ se e solo se $a = 3q^2$ per una qualche $q \in \mathbb{Q}$. In quest'ultimo caso, se $q \neq 0$ le soluzioni sono esattamente due: $f(x) = \pm qx$. Queste affermazioni bastano per concludere che tutti hanno ragione.

   Iniziamo considerando il caso di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nel caso $a = 0$ basta prendere una qualunque funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ che sia 1-periodica e non costante per dare ragione ad Alberto (perché?).

   D'ora in poi supporremo quindi che $a \neq 0$. In questo caso si tratta di applicare i più classici procedimenti per equazioni funzionali.

   - Ponendo $x = 0$ si ottiene che
   $$f(3f(y)) = f(0) + ay,$$
   da cui (perché?) l'iniettività e la surgettività di f.
   - Una volta acquisita la surgettività, sappiamo che esiste un $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$. Ponendo $\ldots$, si vede immediatamente (come?) che $x_0 = 0$.
   - Una volta saputo che $f(0) = 0$, ponendo $y = 3f(z)$ ricaviamo che $f(x + 3az) = f(x) + 3af(z)$, da cui, ponendo $x = 0$, ricaviamo (come?) anche che $f(x+3az) = f(x)+f(3az)$. Questa è equivalente alla solita equazione di Cauchy (perché?).
   - Dall'equazione di Cauchy sappiamo che deve essere $f(x) = \lambda x$ (occhio! per quali x?), da cui (come?) $3\lambda^2 = a$. Questo basta per dar ragione a Barbara.

   Cosa si ricicla dei discorsi precedenti nel caso di $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$?

5. Indichiamo con D_n il numero delle successioni, costituite da n passaggi, in cui Alberto è il primo a passare la palla, ma non il destinatario dell'ultimo passaggio. Allora si ha (perché?) che
   $$A_{n+1} = D_n, \qquad D_{n+1} = 2A_n + D_n,$$
   da cui (come?) si ricava che $A_{n+1} = 2A_{n-1} + A_n$. Tenendo conto che $A_1 = 0$ e $A_1 = 2$, si ottiene (come?) la formula esplicita
   $$A_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3},$$
   da cui facilmente si ricava che il rapporto richiesto è uguale ad 8.

6. Si tratta di dimostrare che
   $$S = \frac{2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012}{12}.$$
   Per dimostrarlo, consideriamo per maggiore generalità il caso in cui X contiene tutti gli interi da 1 ad n. In tal caso si ha che gli elementi di $\mathcal{P}_3(X)$ che hanno un certo k come elemento centrale sono $(k-1)(n-k)$ (perché?). A questo punto si ha (cosa stiamo usando?) che
   $$S = \sum_{k=1}^{n}(k-1)(n-k)k = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 - n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^3.$$
   Le 3 somme al RHS si calcolano facilmente usando le opportune formule, e con un po' di algebra si chiude (farlo!).

Vale la pena di segnalare un approccio alternativo per il calcolo della sommatoria, che non richiede la somma dei cubi e porta ad una semplificazione algerica finale più semplice. Basta osservare che per ogni n dispari si ha che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (a_k + a_{n-k})$$

per ogni successione a_k (perché?). Nel nostro caso questo dice che (fare i conti!)

$$S = (n-2) \sum_{k=0}^{(n-1)/2} k(n-k) = (n-2) \left(n \sum_{k=0}^{(n-1)/2} k - \sum_{k=0}^{(n-1)/2} k^2 \right),$$

da cui segue la tesi con semplici passaggi (ma perché le somme partono da $k = 0$ ora?).

7. Si tratta di dimostrare che $L = 1005^2 + 2$.

   Per costruire un esempio in cui c'è questo numero di collegamenti basta prendere 3 punti A, B, C e collegarli a triangolo, poi dividere i restanti 2008 punti in 2 gruppi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di 1004 punti, quindi collegare A con tutti gli elementi di $\mathcal{A}$, B con tutti gli elementi di $\mathcal{B}$, ed infine mettere tutti i 1004^2 collegamenti possibili tra elementi di $\mathcal{A}$ ed elementi di $\mathcal{B}$.

   Resta da verificare che non si può fare di meglio. Questo è più delicato, ma sostanzialmente standard. Siano A, B, C i punti del triangolo che sappiamo esistere. Tra tutti i punti rimanenti, sia k il massimo numero di collegamenti che partono da un dato punto, e sia P un punto che realizza tale massimo. Tra i punti collegati con P ce ne può essere al più uno tra A, B, C (perché?). Bisognerebbe ora distinguere 2 casi, a seconda che ce ne siano 0 oppure 1. Qui trattiamo solo il caso in cui ce n'è uno, che supponiamo wlog essere A (l'altro caso è analogo, solo un po' più semplice).

   Indichiamo con $\mathcal{A}$ i punti collegati con P, diversi da A, ed indichiamo con $\mathcal{B}$ i restanti punti, esclusi B e C. Quanti sono gli elementi di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$? Stimiamo ora il numero dei collegamenti presenti nel grafo, cercando di contarli una volta sola.

   - Grazie alla massimalità di k, si deduce (come?) che a partire da $\mathcal{B}$ abbiamo al massimo $(2009 - k)k$ collegamenti.
   - A partire da $\mathcal{A}$ abbiamo (esclusi i precedenti) al più $(k - 1)$ collegamenti (diretti dove? perché?).
   - Ci sono infine i 3 collegamenti del triangolo.

   In totale abbiamo quindi che

   $$L \leq (2009 - k)k + k - 1 + 3 = (2010 - k)k + 2 \leq 1005^2 + 2.$$

   Da dove arriva l'ultima disuguaglianza?

8. Si tratta di mostrare che esiste una strategia vincente per Barbara se e solo se $k = 2011$.

   Infatti se $k = 0$ Alberto lascia solo 2 gettoni e poi vince alla mossa successiva. Se invece ce ne sono un numero positivo $k \neq 2011$, Alberto gioca in modo da lasciare le 2 pile con lo stesso numero di gettoni, e così procede fino alla fine della partita.

   Se invece $k = 2011$, Alberto sarà costretto a lasciare 2 pile con numeri diversi di gettoni, ed a quel punto sarà Barbara a poter seguire la strategia del "pareggiamento".

9. Con i vettori si vede immediatamente che $G_AG_BG_CG_D$ è simile ad $ABCD$. Attenzione: per fare questo non basta dimostrare che le lunghezze dei lati sono proporzionali! Perché? Per aggiustare la dimostrazione, bisogna anche parlare di angoli, oppure considerare le diagonali.

10. Con facili calcoli (quali?) si vede che

$$AB = \sqrt{2rd}, \qquad AC = \sqrt{2Rd}, \qquad \sin(\angle ACB) = \frac{d}{\sqrt{2Rd}},$$

da cui si ottiene facilmente (come?) che il raggio richiesto è $\sqrt{Rr}$.

11. Il luogo $\mathcal{P}$ è la retta perpendicolare ad AO e passante per i 2 punti medi dei segmenti di tangenza.

Il modo più veloce per osservarlo è probabilmente notare che si tratta dell'asse radicale della circonferenza Γ e del punto A pensato come circonferenza degenere.

In maniera più convenzionale, si può intanto osservare che $PB_P \cdot PC_P$ è la potenza di P rispetto a Γ, quindi

- dimostrare che $\mathcal{P}$ è una retta per via analitica (come si calcola la potenza analiticamente?)
- dimostrare che $\mathcal{P}$ passa per i punti medi dei segmenti di tangenza osservando che in tal caso la potenza è proprio ...

12. Possiamo supporre wlog che la distanza tra A e B sia unitaria. A questo punto

- $\mathcal{A}$ è una circonferenza di Apollonio di raggio $2/3$ (perché? quali sono i punti della retta AB per cui passa?),
- $\mathcal{E}_\ell$ è l'ellisse con fuochi in A e B, asse maggiore uguale ad ℓ, ed asse minore uguale a $\sqrt{\ell^2 - 1}$ (da dove vengono fuori queste lunghezze?).

Calcolando l'area dell'ellisse (come?), ed imponendo l'uguaglianza, otteniamo quindi che ...

13. I numeri richiesti sono 679140, 679536, 679932.

Un modo per dimostrarlo è di trovarne uno, e poi osservare che le condizioni di divisibilità imposte implicano che la differenza tra 2 consecutivi è 396 (perché?).

Resta però il problema di troverne almeno uno ... Volendo procedere sistematicamente, osserviamo che, indicato il numero con $679xyz$, la condizione di divisibilità sono equivalenti (perché?) a

$$x + y + z \equiv 5 \pmod 9, \qquad 7 + x + y \equiv 6 + 9 + y \pmod{11}.$$

La seconda congruenza si riduce (perché?) a due possibilità:

- $x + z = 8 + y$, da cui (come?) $y = 3$, e quindi z può essere 2 oppure 6, da cui ...
- $x + z = y - 3$, da cui $y = 4$, ed in questo caso z può essere solo 0, ...

14. Si tratta di dimostrare che le soluzioni dell'equazione sono $(5, 0)$, $(5, -3)$, $(0, -3)$.

Per dimostrarlo si può porre $x = a + b$, $y = a - b$, in modo da ridursi all'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1,$$

da cui
$$y = \frac{4x}{x-1} = 4 + \frac{4}{x-1}.$$
A questo punto non resta che sostituire ad x i 6 valori possibili (quali? perché?), trovare (se hanno senso) i corrispondenti valori di y, quindi (se esistono) i corrisponedenti valori di a e b. Quale condizione su x e y assicura l'esistenza di a e b?

15. L'espressione data è multipla di 37 se e solo se (perché?)
$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + 36^k \equiv -1 \pmod{37}.$$
Per un fatto generale (quale?) questo accade se e solo se k è multiplo di 36. Nel range dato i valori possibili di k sono quindi 108, 144, 180.

16. Esaminiamo separatamente le 4 conguenze.
    - La congruenza $2^a \equiv 2011$ ha sicuramente soluzione modulo 37 se dimostriamo che 2 è un generatore modulo 37. Se 2 non fosse un generatore, allora si avrebbe che $2^{12} \equiv 1$ oppure $2^{18} \equiv 1$ (perché?). Tuttavia, modulo 37 abbiamo che $2^6 \equiv -10$, da cui $2^{12} \equiv 100 \equiv -11$ e $2^{18} \equiv -1000 \equiv -1$ (basta osservare che 111 è moltiplo di 37).
    - La congruenza $a^{2001} \equiv 2011$ ha soluzione modulo 37. Per dimostrarlo basta osservare che 2011 e 36 sono relativamente primi, quindi l'applicazione $a \to a^{2011}$ è iniettiva e surgettiva modulo 37 (qual è il fatto generale? come si dimostra?).
    - La congruenza $a^4 + 81 \equiv 0$ non ha soluzione modulo 37. Infatti tutti i fattori primi che divisdono un'espressione del tipo $a^4 + b^4$ sono o fattori comuni di a e b, o sono congrui ad 1 modulo 8 (qual è il fatto generale? come si dimostra?). A questo punto è chiaro che 37 non rientra in nessuna delle 2 categorie.
    - La congruenza $a^9 \equiv 6$ è risolubile modulo 37 in quanto $6^4 \equiv 1$ modulo 37. Qual è il fatto generale che ci sta sotto? Qual è in generale l'immagine della mappa $a \to a^k$ modulo p in funzione di p e k?

Test Finale – Risposte

1. 6
2. La massima potenza è 2^{1005}
3. 140
4. 2013
5. $2\sqrt{2}$
6. $7\sqrt{2}/26$

7. 3

8. 10

9. ...

10. ...

11. ...

12. Le quaterne sono tutte quelle del tipo $(2^k, 2^k, 3k+1, 2)$, $(2\cdot 3^k, 3^k, 3k+1, 3)$ e $(3^k, 2\cdot 3^k, 3k+1, 3)$, al variare di $k \in \mathbb{N}$.

Test Finale – "Aiutini"

1. Il polinomio $p(x) - x$ si annulla per $x = 8$ e per $x = 15$. Ne segue (come?) che

$$p(x) = x + (x-8)(x-15)q(x)$$

per un opportuno polinomio $q(x)$ a coefficienti interi. Si vede ora (come?) che il più piccolo valore positivo di a è 6, e si ottiene scegliendo come soluzione intera $x = 9$ oppure $x = 14$, e prendendo per esempio $q(x) \equiv -1$ per aggiustare i segni.

2. Segnaliamo 2 approcci.

   - *Teoria generale più numeri complessi.* Il polinomio associato alla ricorrenza è $x^2 - 2x + 2$, le cui radici sono $1 \pm i$. Sistemando i dati iniziali (come?) si ottiene che

   $$a_n = -\frac{i}{2}\left[(1+i)^n - (1-i)^n\right].$$

   Per calcolare le potenze basta scrivere i numeri complessi in forma esponenziale (o trigonometrica). Dal momento che che $(1+i) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, si deduce che (perché?)

   $$(1+i)^{2011} = 2^{1005}\sqrt{2}\, e^{2011 i\pi/4} = 2^{1005}\sqrt{2}\, e^{3i\pi/4} = 2^{1005}(-1+i),$$

   e analogamente (questione di coniugati ...) $(1-i)^{2011} = 2^{1005}(-1-i)$. Non resta ora che sostituire.

   - *Formula più esplicita per il caso particolare.* Si dimostra per induzione che $a_{4n} = 0$, $a_{4n+1} = (-1)^n \cdot 2^{2n}$, e $a_{4n+2} = a_{4n+3} = (-1)^n \cdot 2^{2n+1}$, da cui la tesi per $n = 502$.

     Ovviamente la formula per il caso particolare, oltre che per induzione, si può dedurre anche dalla formula con i numeri complessi.

3. Vi sono almeno 2 approcci possibili.

- Scegliere 5 caselle su 8 in cui scrivere “GATTI”, quindi scegliere una delle restanti 3 caselle in cui mettere la restante “I”, e completare il tutto con le 2 “S” rimanenti. In questo modo si contano 2 volte gli anagrammi che contengono “GATTII” (perché?). Questo approccio porta (in che modo?) al calcolo

$$\binom{8}{5} \cdot 3 - \binom{8}{2} = 168 - 28 = 140.$$

- Scrivere “GATTI”, quindi aggiungere una I in una delle 5 posizioni possibili (occhio: perché le posizioni possibili sono 5?), quindi scegliere le 6 posizioni su 8 in cui queste 6 lettere dovranno comparire. Questo approccio porta (in che modo?) al calcolo

$$5 \cdot \binom{8}{6} = 140.$$

4. È abbastanza facile verificare che le configurazioni favorevoli ad Alberto sono quelle congrue a 2, 3, 4 modulo 5 (perché?). La strategia è molto semplice: quando Alberto trova un numero congruo a 2 deve giocare -2, quando trova un numero congruo a 4 deve giocare -3, mentre quando trova un numero congruo a 3 può scegliere una qualunque delle 2 opzioni.

5. Segnaliamo 2 approcci.

   - *Sintetica più disuguaglianze.* Dalle ipotesi segue (come?) che ABC è rettangolo in A. A questo punto da AM–QM segue che

   $$\frac{AB + AC}{2} \leq \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2}} = \frac{BC}{\sqrt{2}},$$

   con uguaglianza se e solo se si è nel caso isoscele (e allora?).

   - *Trigonometria più disuguaglianze.* Posto $\theta = \angle BMA$, dal Teorema di Carnot si ha (come?) che

   $$AB^2 = 2 - 2\cos\theta, \qquad AC^2 = 2 + 2\cos\theta.$$

   A questo punto si chiude applicando AM–QM (come?).

6. Nel triangolo BCD si ha (perché?) che $BC = 13$ e $\angle BDC = 45°$. Dal teorema dei seni si ha quindi che

$$\frac{7}{\sin(\angle DBC)} = \frac{13}{\sin(\angle BDC)},$$

da cui la tesi.

7. Segnaliamo 2 approcci.

   - Scrivendo l'equazione come $(3x + y)(3x - y) = 1800$, e ponendo $3x + y = A$, $3x - y = B$, abbiamo che

   $$x = \frac{A + B}{6}, \qquad y = \frac{A - B}{2}.$$

   Ne segue che A e B devono essere divisori di 1800 e multipli di 6 (perché?), quindi devono essere entrambi uguali a 6 per un divisore di 50 (perché?). Tali divisori (positivi e negativi) sono 12 (perché?). Visto che siamo interessati alle sole soluzioni con x e y positivi, bisogna ora dividere per 4 (perché?).

- Dopo aver osservato che y deve essere multiplo di 3, si pone $y = 3z$ e ci si riduce all'equazione $x^2 - z^2 = 200$. A questo punto si procede come prima: $(x+z)$ e $(x-z)$ devono essere divisori di 200 con la stessa parità (perché?), quindi pari (perché?), da cui ...

8. Osserviamo intanto che $10^3 \equiv 1$ modulo 37 (ricordiamo che 111 è multiplo di 37), da cui si deduce che 10 ha ordine 3 modulo 37 (che vuol dire?). Indicato con N il numero in questione, si ha quindi che (cosa stiamo usando nei vari passaggi?)

$$\begin{aligned} N &= 10 + 10^3 + 10^5 + \ldots + 10^{4021} \\ &= 10 \cdot (1 + 100 + 100^2 + \ldots + 100^{2010}) \\ &= 10 \cdot \frac{100^{2011} - 1}{100 - 1} \\ &= 10 \cdot \frac{10^{4022} - 1}{99} \\ &\equiv 10 \cdot \frac{10^2 - 1}{99} \\ &\equiv 10 \pmod{37}. \end{aligned}$$

9. Utilizzando il vincolo (come?), e le disuguaglianze AM–QM e AM–GM (dove? applicate a cosa?), deduciamo che

$$1 - a^2 + c^2 = 3c^2 + 2b^2 + a^2 \geq 3c^2 + \frac{(2b+a)^2}{3} \geq 2c(2b+a)$$

e cicliche, da cui si deduce che tutti i 3 addendi del LHS della disuguaglianza data sono maggiori o uguali di 2.

10. Indichiamo i numeri con a_i, pensando gli indici modulo 100. Se la tesi fosse falsa, allora da un facile double counting (quale? come?) si avrebbe che $a_i + a_{i+3} = a_{i+1} + a_{i+2}$ per ogni i. Scrivendo tale uguaglianza per due indici consecutivi, si avrebbe allora (perché?) che $a_i + a_{i+4} = 2a_{i+2}$.

    Ma se come a_{i+2} prendiamo il massimo o il minimo di tutti gli a_i ...

11. La tesi è equivalente a dimostrare che la retta MN è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo CDN, il che a sua volta è equivalente a dimostrare che $\angle CDN = \angle MNC$ (perché si hanno queste due equivalenze?). Basta ora osservare che

$$\angle CDN = 90° - \angle DNM \qquad \text{e} \qquad \angle MNC = 90° - \angle AMN.$$

    Da dove arrivano queste uguaglianze? Perché bastano per concludere?

12. Riscriviamo intanto l'equazione nella forma

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = p^n.$$

    Il primo fattore è di sicuro maggiore di 1. Per il secondo fattore distinguiamo due casi.

    - Supponiamo che il secondo fattore sia uguale ad 1. Allora, assumendo wlog che $a \geq b$, dall'identità

$$1 = a^2 - ab + b^2 = a(a-b) + b^2$$

      ricaviamo immediatamente che non ci sono molte possibilità (quali?).

- Se il secondo fattore è maggiore di 1, allora entrambi i fattori sono multipli di p. In questo caso dall'identità
$$a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$$
deduciamo (come?) che o p divide sia a sia b, o $p = 3$. Questo porta a distinguere due ulteriori casi.
  - Se p divide a e b, allora con un'opportuna sostituzione (quale?) ci riduciamo alla stessa equazione con $(n - 3)$ al posto di n.
  - Se $p = 3$ e p non divide né a né b (ma perché questo è l'ultimo caso rimasto?), allora dalla stessa identità di deduce (come?) che il fattore $(a^2 - ab + b^2)$ è congruo a 3 modulo 9, dunque deve essere uguale a 3, e ancora una volta non ci sono molte possibilità (quali? perché?).

In conclusione, quali sono le soluzioni dell'equazione?