Stage Senior Pisa 2013 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Consideriamo il numero

$$M = \max\left\{x(x+3y)(x+5z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z=1\right\}.$$

Determinare quale dei seguenti numeri è intero.

(A) $2010M$ **(B)** $2013M$ **(C)** $2016M$ **(D)** $2019M$ **(E)** $2022M$

2. Consideriamo il problema di minimizzare l'espressione

$$\left(a + \frac{2}{b} + 3c + \frac{4}{d}\right) \cdot \left(\frac{5}{a} + 6b + \frac{7}{c} + 8d\right)$$

tra tutte le quaterne (a, b, c, d) di numeri reali *positivi*.

Determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(A) Il minimo non esiste **(B)** Il minimo esiste e c'è un'unica quaterna che lo realizza

(C) Esiste una quaterna che realizza il minimo e tale che $ab = 2013$

(D) Esiste una quaterna che realizza il minimo e tale che $ac = 2013$

(E) Esiste una quaterna che realizza il minimo e tale che $ab = cd$

3. Alcuni amici stanno considerando l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + f(y)) = f(x + y)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

- Alberto afferma: "in $\mathcal{S}$ c'è un'unica funzione surgettiva".
- Barbara afferma: "in $\mathcal{S}$ c'è un'unica funzione iniettiva".
- Cristina afferma: "in $\mathcal{S}$ c'è un'unica funzione *non* periodica".
- Dario afferma: "in $\mathcal{S}$ c'è almeno una funzione periodica non costante".

Chi ha ragione?

(A) Nessuno **(B)** Tutti tranne Barbara **(C)** Tutti tranne Cristina

(D) Tutti tranne Dario **(E)** Tutti

4. Sia $p(x)$ un polinomio a *coefficienti interi* tale che $p(p(0)) = 0$ e $p(p(p(0))) \neq 0$.

   Determinare il massimo numero di soluzioni *intere distinte* che può avere l'equazione $p(x) = 0$.

   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** Può averne un qualunque numero finito

5. Sia M il numero dei modi di scrivere 2013 come somma di almeno 2 interi positivi (si intende che 2 scritture che differiscono solo per l'ordine degli addendi sono considerate *diverse*).

   Determinare quale resto si ottiene dividendo M per 100.

   (A) 15 **(B)** 35 **(C)** 55 **(D)** 75 **(E)** 95

6. Siano $V_1, \ldots, V_{2013}$ dei punti assegnati, e sia $\mathcal{G}$ l'insieme di tutti i grafi, non necessariamente planari, che hanno questi 2013 punti come vertici. Due grafi $g \in \mathcal{G}$ e $g' \in \mathcal{G}$ sono considerati lo stesso se e solo se per ogni $1 \leq i < j \leq 2013$ si ha che V_i e V_j sono collegati in g se e solo se V_i e V_j sono collegati in g'.

   Per ogni $g \in \mathcal{G}$ definiamo
   $$s(g) = \sum_{i=1}^{2013} \deg_g(V_i),$$
   dove $\deg_g(V_i)$ indica il numero di lati che parte dal vertice V_i nel grafo g. Definiamo infine
   $$S = \sum_{g \in \mathcal{G}} s(g).$$

   Determinare l'esponente di 2 nella fattorizzazione di S.

   (A) 2013 **(B)** 2014 **(C)** $\binom{2012}{2}$ **(D)** $\binom{2012}{2} + 1$ **(E)** $\binom{2013}{2} + 1$

7. Alberto e Barbara giocano con 2 pile di gettoni. A turno, ogni giocatore può scegliere tra le seguenti mosse: togliere 1 gettone da ogni pila, togliere 2 gettoni da ogni pila, togliere 1 gettone da una pila a sua scelta e 2 gettoni dall'altra pila. Inizia Alberto e perde chi non ha più a disposizione mosse valide.

   Determinare in quale delle seguenti situazioni esiste una strategia vincente per *Barbara* (le coppie di numeri indicano i gettoni presenti inizialmente nelle due pile).

   (A) $(2013^{2012}, 2012^{2013})$ **(B)** $(2013^{2014}, 2014^{2013})$ **(C)** $(2012^{2012}, 2013^{2013})$
   (D) $(2012^{2012}, 2014^{2014})$ **(E)** $(2012^{2014}, 2014^{2012})$

8. Un grafo si dice *tri-millenarista* se ha 1000 vertici ed è possibile colorare tali vertici con 3 colori in modo che ogni lato congiunga vertici di colori diversi.

   Sia M il massimo numero di lati possibile per un grafo tri-millenarista.

   Determinare quale dei seguenti primi *non* divide M.

   (A) 5 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 13 **(E)** 37

9. In un trapezio $ABCD$ la base maggiore è AB, la base minore è CD e le diagonali si intersecano in E. Sappiamo che $AB = 5$, $CD = 3$, e l'area del triangolo CDE è 27.

   Determinare l'area del trapezio.

   (A) 188 **(B)** 192 **(C)** 196 **(D)** 200 **(E)** 204

10. Sia ABC un triangolo acutangolo e siano H il suo ortocentro, I il suo incentro, O il suo circocentro e I_C il suo excentro opposto al vertice C.

    Il quadrilatero $AHBI_C$ è ciclico ...

    (A) mai **(B)** se e solo se ABC è equilatero **(C)** se e solo se $CA = CB$

    (D) se e solo se $AHOB$ è ciclico **(E)** se e solo se $AIBI_C$ è ciclico

11. Sia $ABCD$ un quadrato di lato unitario. Siano K il punto medio di AB, M il punto medio di AD, G l'intersezione di BM e CK.

    Il raggio della circonferenza circoscritta ad AGC è ...

    (A) un numero intero **(B)** un numero razionale ma non intero

    (C) un numero irrazionale minore della lunghezza di CG

    (D) un numero irrazionale compreso tra la lunghezza di CG e quella di CM

    (E) un numero irrazionale maggiore della lunghezza di CM

12. Si dice che una retta r applica la *par-condicio* ad un triangolo ABC se la somma delle distanze da r dei vertici di ABC che stanno in uno dei semipiani delimitati da r è uguale alla somma delle distanze da r dei vertici che stanno nell'altro semipiano (si intende che c'è almeno un addendo per parte e che gli eventuali vertici che stanno su r si considerano come appartenenti ad entrambi i semipiani).

    Una retta r applica la par-condicio ad un triangolo ABC se e solo se ...

    (A) ABC è isoscele ed r è l'asse della base **(B)** r è una qualunque bisettrice di ABC

    (C) r passa per l'incentro di ABC **(D)** r è la retta di Eulero di ABC

    (E) r passa per il baricentro di ABC

13. Determinare quante sono le coppie ordinate (a, b) di numeri *interi positivi* tali che

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{3}{7}.$$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 16

14. Alcuni amici stanno cercando le soluzioni intere positive (x, y, z, w) dell'equazione

$$3^x+4^y+5^z=360w.$$

- Alberto afferma: "non esistono soluzioni".
- Barbara afferma: "esistono soluzioni e hanno tutte x dispari".
- Cristina afferma: "esistono soluzioni e hanno tutte z dispari".

Chi ha ragione?

(A) Solo Alberto **(B)** Solo Barbara **(C)** Solo Cristina
(D) Solo Barbara e Cristina **(E)** Nessuno

15. Determinare per quale dei seguenti valori di k si ha che il numero

$$1^k+2^k+\ldots+50^k$$

è multiplo di 17.

(A) 400 **(B)** 1000 **(C)** 2000 **(D)** 10000 **(E)** 20000

16. Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa* (si intende che x e y sono numeri interi).

(A) Se $x^{16}-y^{16}$ è multiplo di 31, allora di sicuro x^6-y^6 è multiplo di 31

(B) Se $x^{17}-y^{17}$ è multiplo di 31, allora di sicuro x^7-y^7 è multiplo di 31

(C) Se $x^{18}-y^{18}$ è multiplo di 31, allora di sicuro x^8-y^8 è multiplo di 31

(D) Se $x^{19}-y^{19}$ è multiplo di 31, allora di sicuro x^9-y^9 è multiplo di 31

(E) Se $x^{20}-y^{20}$ è multiplo di 31, allora di sicuro $x^{10}-y^{10}$ è multiplo di 31

Stage Senior Pisa 2013 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Siano a, b e c le radici complesse del polinomio $x^3 - x + 1$.

   Determinare il polinomio monico di grado 3 che ha come radici a^2, b^2 e c^2.

2. Sia a_n una successione di numeri *interi* tale che $2a_{n+2} - 7a_{n+1} + 3a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_{2013} \neq 0$.

   Determinare $\dfrac{a_{25}}{a_{22}}$.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" in cui le 3 vocali compaiono in 3 posizioni consecutive.

4. Per ogni intero $n \geq 2$ sia $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e sia $\mathcal{F}_n$ l'insieme di tutte le funzioni $f : X_n \to X_n$.

   Determinare, in funzione di n, il valore dell'espressione

   $$\sum_{f \in \mathcal{F}_n} |f(1) - f(2)|.$$

5. In un triangolo isoscele la base è lunga 3 ed il raggio della circonferenza inscritta è lungo 1.

   Determinare l'area del triangolo.

6. In un quadrilatero $ABCD$ si ha che $\angle ABD = 18°$, $\angle ACB = 54°$, $\angle ACD = 36°$ e $\angle ADB = 27°$. Sia P il punto di intersezione delle diagonali AC e BD.

   Calcolare l'ampiezza di APB.

7. Determinare tutte le soluzioni *intere positive* dell'equazione $x^2 + 399 = 2^y$.

8. Determinare quanti sono i numeri interi $x \in \{1, 2, \ldots, 2013\}$ per cui esistono interi positivi y e z tali che $7^x + 5^y = 11z$.

Problemi dimostrativi

9. Dimostrare che
$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$
per ogni terna di numeri reali positivi a, b, c tali che $a^2+b^2+c^2=3$.

10. Sia A_n il numero delle parole di lunghezza n formate con le lettere a, b, c in cui non compaiono mai due a consecutive o due b consecutive. Sia B_n il numero delle parole di lunghezza n formate con le lettere a, b, c in cui non compaiono mai tre lettere consecutive a due a due distinte.

    Dimostrare che $B_{n+1}=3A_n$ per ogni $n\geq 1$.

    (In entrambi i casi non è detto che tutte e 3 le lettere siano presenti nella parola)

11. Sia ABC un triangolo. Sia D l'ulteriore intersezione tra la circonferenza passante per C e tangente alla retta AB in A e la circonferenza passante per B e tangente alla retta AC in A. Sia E il punto sulla retta AB (diverso da A) tale che $BA=BE$. Sia F l'ulteriore intersezione tra la retta AC e la circonferenza circoscritta al triangolo ADE.

    Dimostrare che $AC=AF$.

12. Determinare tutte le coppie (p,n) in cui p è un numero primo, n è un intero positivo e
$$p^8-p^4=n^5-n.$$

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
C	D	E	C	E	E	A	A	B	D	A	E	C	A	B	C

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Applicando AM–GM con i 3 termini $7x$, $5x + 15y$, $3x + 15z$ otteniamo che

$$\begin{aligned} x(x+3y)(x+5z) &= \frac{1}{7\cdot 5\cdot 3}\cdot 7x\cdot(5x+15y)\cdot(3x+15z) \\ &\le \frac{1}{7\cdot 5\cdot 3}\cdot\left(\frac{15(x+y+z)}{3}\right)^3 \\ &= \frac{25}{21}, \end{aligned}$$

con uguaglianza se e solo se $x = 1/6$, $y = 1/9$, $z = 2/9$. Pertanto $M = 25/21$. Basta quindi trovare l'anno multiplo di 7 tra quelli indicati, che sono già tutti multipli di 3.

Qual è il vantaggio della scelta buffa dei 3 termini su cui applicare AM–GM? Cosa succede applicando AM–GM con sette termini uguali a x, cinque termini uguali a $(x+3y)$ e tre termini uguali a $(x+5z)$?

2. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle due quaterne

$$A = \left(\sqrt{a}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}}, \sqrt{3}\sqrt{c}, \frac{2}{\sqrt{d}}\right), \qquad B = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a}}, \sqrt{6}\sqrt{b}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{c}}, \sqrt{8}\sqrt{d}\right)$$

si ha che

$$\left(a + \frac{2}{b} + 3c + \frac{4}{d}\right)\cdot\left(\frac{5}{a} + 6b + \frac{7}{c} + 8d\right) \ge \left(\sqrt{5} + \sqrt{12} + \sqrt{21} + \sqrt{32}\right)^2,$$

con uguaglianza se e solo se $A = \lambda B$ per un qualche $\lambda > 0$, cioè se

$$a = \lambda\sqrt{5}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\lambda}, \qquad c = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\lambda, \qquad d = \frac{1}{2\sqrt{8}}\frac{1}{\lambda}.$$

Questo mostra che il minimo esiste, che ab e cd sono univocamente determinati e diversi tra di loro e da 2013, e che

$$ac = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}}\lambda^2$$

può essere un qualunque numero positivo, dunque anche 2013, pur di scegliere bene λ.

3. La risposta segue dai seguenti fatti.

- Ponendo $x = 0$ si ottiene che $f(f(y)) = f(y)$. Se f è surgettiva, questo basta per concludere che $f(x) = x$ per ogni x reale (perché? e qual è il ruolo della surgettività?). Quindi Alberto ha ragione.
- Per simmetria (di cosa?) abbiamo che $f(x + f(y)) = f(y + f(x))$. Se f è iniettiva otteniamo che $x + f(y) = y + f(x)$. Ponendo ora $y = 0$ si ha (come?) che $f(x) = x + k$ per un opportuno k, e si verifica facilmente (farlo!) che solo per $k = 0$ la funzione verifica l'equazione funzionale. Quindi Barbara (caso strano) ha ragione.
- Supponiamo che esista y_0 tale che $f(y_0) \neq y_0$. Ponendo allora $x = z - y_0$ e $y = y_0$ si ottiene che
$$f(z + (f(y_0) - y_0)) = f(z)$$
(ma per quali z?), da cui segue la periodicità di f. Questo basta per concludere che Cristina ha ragione (perché?).
- Si verifica abbastanza facilmente (farlo!) che $f(x) = \{x\}$ (la parte frazionaria di x) risolve l'equazione proposta. Questo basta per dar ragione a Dario.

4. Poniamo $p(0) = a$. Per ipotesi sappiamo che $a \neq 0$ e $p(a) = 0$ (perché?). Di conseguenza $p(x)$ si può scrivere nella forma
$$p(x) = a - x + x(x - a)q(x)$$
per un opportuno polinomio $q(x)$ a coefficienti interi (perché mai?), quindi $p(x) = 0$ se e solo se
$$0 = a - x + x(x - a)q(x) = (x - a)[xq(x) - 1].$$
Da questa relazione segue che x può valere solo a oppure ± 1 (come mai?). Quindi si hanno al massimo 3 soluzioni intere distinte. Si tratta ora di esibire un esempio in cui le 3 soluzioni ci sono effettivamente (farlo!).

5. Pensiamo ad una striscia con 2013 quadratini consecutivi. Scrivere 2013 nel modo richiesto è equivalente a scegliere un po' dei segmentini che separano questi quadratini in modo da suddividere la striscia in un numero opportuno di "tronconi". Quindi $M = 2^{2012} - 1$ (perché 2012? perché -1?). Per la congruenza modulo 100 basta considerare $2^{12} - 1$ (come mai?).

6. Intanto $s(g) = 2\ell(g)$, dove $\ell(g)$ indica il numero dei lati di g. Ora si va di double counting. Quanti sono i grafi con k lati? Sono esattamente $\binom{N}{k}$, dove $N = \binom{2013}{2}$ (perché?). Ma allora
$$S = 2\sum_{g \in \mathcal{G}} \ell(g) = 2\sum_{k=0}^{N} k\binom{N}{k} = 2N2^{N-1}.$$
Giustificare bene le varie uguaglianze!

7. Detti a e b i numeri di gettoni presenti nelle 2 pile, si dimostra che Barbara vince se e solo se $\min\{a, b\}$ è multiplo di 3. Detto infatti $\mathcal{B}$ l'insieme di tutte le configurazioni di questo tipo, basta fare le solite (perché solite?) 3 verifiche, e cioè che
   - le configurazioni da cui non si può più muovere stanno tutte in $\mathcal{B}$,
   - chi trova una configurazione di $\mathcal{B}$ è costretto, qualunque mossa faccia, a lasciare una configurazione che non sta in $\mathcal{B}$,

- chi trova una configurazione che non sta in $\mathcal{B}$ può, muovendo opportunamente, lasciare una configurazione che sta in $\mathcal{B}$.

8. Indicati con a, b, c i numeri di vertici dei 3 colori, si ha che (da dove arriva questa formula?)

$$M \leq \frac{1}{2}\left[a(1000-a)+b(1000-b)+c(1000-c)\right].$$

Massimizzare M equivale quindi a minimizzare $a^2+b^2+c^2$ con il vincolo che $a+b+c=1000$. Il minimo si realizza scegliendo a, b, c il più vicini possibili (giustificarlo per bene!), cioè del tipo 333, 333, 334, da cui

$$M = \frac{1}{2}\left[1000^2-333^2-333^2-334^2\right].$$

Per fare i calcoli più velocemente conviene ora pensare all'espressione più generale

$$M = \frac{1}{2}\left[(3n+1)^2-n^2-n^2-(n+1)^2\right].$$

9. Con una facile similitudine si determinano l'area di AEB (che viene 75), nonché le altezze di CED e AEB uscenti da E (che vengono 18 e 30, rispettivamente). Ora sappiamo tutto per concludere.

10. In notazioni standard si ha che

$$\angle AHB = \alpha+\beta, \qquad \angle AOB = 2\gamma, \qquad \angle AI_CB = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Da qui con facili calcoli (quali?) si deduce che $AHBI_C$ è ciclico se e solo se $\gamma = 60°$ e che analogamente $AHOB$ è ciclico se e solo se $\gamma = 60°$.

Per la cronaca: $AIBI_C$ è invece *sempre* ciclico.

11. Si tratta di dimostrare che D è il circocentro di AGC, da cui segue che il raggio richiesto è proprio 1. Per fare questo, segnaliamo due approcci.

   - *Approccio sintetico.* Basta dimostrare che KA è tangente alla circonferenza circoscritta ad AGC (perché?). Questo segue dalle uguaglianze

   $$KG \cdot KC = KB^2 = KA^2.$$

   Da dove arrivano queste uguaglianze? A che servono?

   - *Approccio trigonometrico.* Si determinano seno e coseno di $\angle BCG$, quindi si trova GC risolvendo il triangolo BCG. A questo punto si ricava DG risolvendo il triangolo GCD (fare questi conti!).

12. Consideriamo un sistema di assi cartesiani in cui la retta r sia l'asse x (ma possiamo?). La par-condicio è ora equivalente a dire che la somma delle ordinate dei 3 vertici è nulla, quindi l'ordinata del baricentro è nulla, quindi il baricentro sta sull'asse x, quindi il baricentro sta su r (chiarirsi bene questi passaggi!). Il viceversa è del tutto analogo (ma va fatto!).

13. L'equazione è equivalente a $7(a+1)(b+1) = 10ab$, da cui

$$b = 7 \cdot \frac{a+1}{3a-7} = \ldots = \frac{1}{3}\left(7 + \frac{70}{3a-7}\right).$$

Ne segue che $3a-7$ deve essere un divisore di 70, e non ci sono molte possibilità ...

14. L'equazione non ha soluzioni, cosa che si dimostra in 3 passaggi.
    - Considerando l'equazione modulo 3 si ottiene (come?) che z è dispari.
    - Considerando l'equazione modulo 4 si ottiene (come?) che x è dispari.
    - Considerando infine l'equazione modulo 5, e tenendo conto che x è dispari, si ottiene (come?) un assurdo.

15. Per un ben noto (ma sarà davvero noto?) fatto generale si ha che, dato un primo p, un'espressione del tipo

$$1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k$$

è multipla di p se e solo se k non è multiplo di $(p-1)$ (nel qual caso invece l'espressione risulta congrua a -1 modulo p dal momento che tutti gli addendi sarebbero 1 per il FLT).

Nel caso particolare $p = 17$ basta quindi trovare, tra quelli proposti, l'unico l'esponente k che non è multiplo di 16.

16. La soluzione segue dal seguente fatto generale. Dato un primo p, l'implicazione

$$x^k \equiv y^k \pmod{p} \implies x^h \equiv y^h \pmod{p}$$

vale per ogni x ed y interi se e solo se $(k, p-1)$ divide $(h, p-1)$.

Detto infatti g un generatore della struttura moltiplicativa modulo p, e posto $x = g^a$ e $y = g^b$, si ha che (giustificare tutti i passaggi!)

$$\begin{aligned} g^{ka} \equiv g^{kb} \pmod{p} &\iff k(b-a) \equiv 0 \pmod{p-1} \\ &\iff (k, p-1) \cdot (b-a) \equiv 0 \pmod{p-1} \end{aligned}$$

e analogamente

$$g^{ha} \equiv g^{hb} \pmod{p} \iff (h, p-1) \cdot (b-a) \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

A questo punto l'implicazione iniziale è diventata

$$(k, p-1) \cdot (b-a) \equiv 0 \pmod{p-1} \implies (h, p-1) \cdot (b-a) \equiv 0 \pmod{p-1},$$

e non è difficile mostrare che questa vale per ogni a e b se e solo se $(k, p-1)$ divide $(h, p-1)$.

Dal discorso è un po' restato fuori il caso in cui x o y sono multipli di p. Come si aggiusta la faccenda?

Test Finale – Risposte

1. $x^3 - 2x^2 + x - 1$
2. 27
3. 540
4. $\dfrac{1}{3}n^{n-1}(n^2-1)$
5. $27/5$
6. $99°$
7. Solo $(x, y) = (25, 10)$
8. 1007
9. ...
10. ...
11. ...
12. Solo $(p, n) = (2, 3)$.

Test Finale – "Aiutini"

1. Segnaliamo 2 approcci.
   - Dalle relazioni tra radici e coefficienti segue che
     $$a+b+c=0, \qquad ab+bc+ca=-1, \qquad abc=-1,$$
     da cui con semplici calcoli (quali?) si ricava che
     $$a^2+b^2+c^2=2, \qquad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=1, \qquad a^2b^2c^2=1.$$
     A questo punto il gioco è fatto.
   - Il polinomio $x^3 - x + 1$ ha come radici a, b, c. Per disparità (cosa vuol dire?) il polinomio $x^3 - x - 1$ ha come radici $-a$, $-b$, $-c$. Ne segue che il polinomio
     $$x^6 - 2x^4 + x^2 - 1 = (x^3 - x + 1)(x^3 - x - 1)$$
     ha come radici $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, quindi
     $$x^6 - 2x^4 + x^2 - 1 = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2).$$
     Come si conclude ora?

2. Dalla formula generale per le ricorrenze lineari del second'ordine si ottiene che

$$a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Trattandosi di numeri interi si ha che necessariamente $\beta = 0$ e α è intero (queste affermazioni devono essere giustificate per bene!). Inoltre $\alpha \neq 0$ in quanto $a_{2013} \neq 0$. Ora la conclusione è ovvia.

3. Considerando le 3 vocali consecutive come un unico carattere, che indichiamo con X, si tratta di anagrammare "STGSTX" e ricordarsi poi che esistono 3 versioni di X a seconda della posizione della lettera A tra le 3 vocali consecutive. Pertanto gli anagrammi totali sono

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!} \cdot 3 = 540.$$

4. Double counting! Fissati i valori $f(1) = i$ e $f(2) = j$, ci sono sempre esattamente n^{n-2} funzioni in $\mathcal{F}_n$ che li assumono (perché?), quindi

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_n} |f(1) - f(2)| = n^{n-2} \sum_{(i,j) \in X_n^2} |i - j|.$$

Per calcolare l'ultima somma, ricorriamo ancora al double counting. Quante sono le coppie $(i, j) \in X_n^2$ tali che $|i - j| = k$? Sono esattamente $(n - k)$, quindi (cosa stiamo facendo?)

$$\sum_{(i,j) \in X_n^2} |i - j| = \sum_{k=0}^{n} k(n - k) = \frac{n(n^2 - 1)}{6}.$$

Come abbiamo calcolato la sommatoria?

5. Sia ABC il triangolo, con $AB = AC$. Segnaliamo 2 approcci.

- In notazioni standard si ha che (cosa stiamo facendo?)

$$1 = r = \frac{a}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{3}{2} \tan \frac{\beta}{2}.$$

Da qui si ricava che $\tan(\beta/2) = 2/3$ e quindi $\tan \beta = 36/15$ (cosa abbiamo applicato?). A questo punto si ricava l'altezza (come?) e quindi l'area.

- Indicata con h l'altezza, si trova facilmente la lunghezza dei 2 lati uguali del triangolo, quindi

$$1 = r = \frac{S}{p} = \frac{3h}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2} + \sqrt{h^2 + \frac{9}{4}}}.$$

Risolvendo l'equazione si trova $h = 18/5$, da cui la soluzione.

6. Il punto fondamentale è mostrare che C è il circocentro di ABD. Questo si congettura dopo aver osservato che i 2 angoli assegnati in C sono il doppio degli altri 2 angoli assegnati (che a posteriori saranno i corrispondenti angoli alla circonferenza), ma va dimostrato per bene ...

   Una possibilità è di definire C' come l'ulteriore intersezione tra la retta AC e la circonferenza circoscritta ad ABD ed osservare che i triangoli BCC' e DCC' sono isosceli per ragioni di angoli (perché?), da cui $CB = CC' = CD$. A questo punto AC' è un diametro, quindi si determinano facilmente tutti gli angoli in B, e si conclude pensando $\angle APB$ come angolo esterno del triangolo BPC o BPC'.

7. Ragionando modulo 3 si ottiene (come?) che y è pari. Posto $y = 2z$, l'equazione si fattorizza come
$$(2^z + x)(2^z - x) = 399 = 3 \cdot 7 \cdot 19.$$
   Non resta ora che provare 4 casi (quali?), cercando di non perdersi la fattorizzazione banale $1 \cdot 399$ ...

8. Intanto l'equazione proposta è equivalente a
$$5^y \equiv -7^x \pmod{11}.$$
   Detto questo, segnaliamo 2 modi di procedere.

   - *Brute force!* Facciamo una tabellina con tutti i valori assunti da -7^x e 5^y modulo 11 al variare di x e y. Dove vanno fatti variare x e y? Così facendo si ottengono 10 valori per -7^x e 5 valori per 5^y. Si vede anche che i valori di x per cui esiste un corrispondente valore di y che fa tornare la congruenza sono tutti e soli quelli dispari, da cui la conclusione.
   - *Discorso più raffinato.* Si verifica (come?) che 7 è un generatore modulo 11, mentre 5 è un elemento di ordine 5 modulo 11. Quindi, essendo 11 ..., la congruenza a cui ci siamo ridotti ha soluzione se e solo se 7^x è un *non residuo* quadratico modulo 11, il che accade se e solo se x è dispari. Chiarirsi bene tutti questi discorsi!

9. Segnaliamo 3 approcci.

   - La tesi segue da
$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}.$$
     La prima disuguaglianza segue da AM–HM o Cauchy-Schwarz, la seconda da una ben nota disuguaglianza.
   - Poiché
$$1 + ab \leq 1 + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{5-c^2}{2},$$
     si ha che
$$\frac{1}{1+ab} \geq \frac{2}{5-c^2}$$
     e cicliche (cosa abbiamo usato?). Dalla disuguaglianza di Jensen applicata alla funzione convessa $f(x) = 2/(5-x)$ (convessa dove? perché?) segue quindi che
$$f(a^2) + f(b^2) + f(c^2) \geq 3f\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right) = 3f(1) = \frac{3}{2}.$$

- Brute force! Espandendo tutto (occhio a farlo con un minimo di furbizia!) ci ritroviamo a dimostrare che
$$3 + (ab + bc + ca) \geq 3a^2b^2c^2 + abc(a + b + c).$$
Ora la tesi segue da
$$a^2b^2c^2 \leq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3 \leq 1$$
e
$$abc(a + b + c) \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca).$$
Quest'ultima volendo si fa per bunching dopo aver espanso tutto ...

10. Segnaliamo 2 approcci.

   - *Approccio ricorsivo.* Divide et impera! Sia x_n il numero delle parole contate da A_n che terminano con a o b, e sia y_n il numero delle parole contate da A_n che terminano con c. Si verifica facilmente (come?) che $x_{n+1} = x_n + 2y_n$ e $y_{n+1} = x_n + y_n$, da cui con un po' di algebra si ricava (come?) che $A_{n+2} = 2A_{n+1} + A_n$.
     Analogamente, sia s_n il numero delle parole contate da B_n che terminano con due lettere distinte, e sia t_n il numero delle parole contate da B_n che terminano con due lettere uguali. Si verifica facilmente (come?) che $s_{n+1} = s_n + 2t_n$ e $t_{n+1} = s_n + t_n$, da cui con la stessa algebra di prima si ricava che $B_{n+2} = 2B_{n+1} + B_n$.
     In particolare, A_n e B_{n+1} risolvono la stessa relazione ricorrente. Poiché i dati iniziali della seconda sono il triplo dei dati iniziali della prima (perché? quanti dati iniziali?), ne segue che la seconda successione è sempre il triplo della prima.
   - *Approccio "combinatorio".* Con la sostituzione $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, possiamo pensare alle parole contate da A_n come vettori n-dimensionali a valori nelle classi di resto modulo 3, ed alle parole contate da B_{n+1} come vettori $(n + 1)$-dimensionali a valori nelle classi di resto modulo 3. Ora la *derivata discreta*
   $$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \to (x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_{n+1} - x_n)$$
   definisce una mappa "3 to 1" tra il primo ed il secondo insieme (cosa vuol dire? come si dimostra?), il che permette di concludere immediatamente (come?).

11. Il triangolo DFC è simile al triangolo DEA (questione di angoli: quali?). Inoltre si ha che $\angle DAC = \angle DBA$. Visto che per ipotesi DB è una mediana di DEA, cosa sarà mai DA in DFC? Questo però va dimostrato ...

12. Scritta l'equazione nella forma $p^4(p^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$, si dimostra (ma bisogna farlo ...) che il massimo comun divisore di 2 qualunque termini al rhs è al massimo 2. A questo punto si distinguono 2 casi.

   - Se $p = 2$, allora si trova la soluzione (e bisogna dimostrare che è unica, non solo asserirlo).
   - Se $p > 2$, allora p^4 deve stare tutto nello stesso fattore, quindi in ogni caso il rhs sarebbe troppo grande. Per formalizzare il discorso, servono opportune stime, ad esempio del tipo $p^4 \leq n^2 + 1$ (perché questa è sempre vera?), da cui
   $$p^4(p^4 - 1) \leq (n^2 + 1)n^2 < (n^2 + 1)n(n + 1) \leq (n^2 + 1)n(n + 1)(n - 1).$$
   Questo discorso funziona per tutti i valori di n? Aggiustare se serve ...