Stage Senior Pisa 2014 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia (x, y, z) una terna di numeri reali positivi che risolve il seguente problema di minimo:

$$\min \left\{ x^2 + 5xy + 4y^2 + 7z^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ xyz \geq 1 \right\}.$$

Determinare quale dei seguenti numeri è razionale.

(A) x^4 **(B)** z^2 **(C)** y^3z^5 **(D)** x^3y^5 **(E)** z^3x^5

2. Siano (x, y, z, w) numeri reali positivi tali che

$$(x+y+z+w)^2 \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{w^3} + \frac{w}{x^4} \right) \cdot \left(xy + yz^2 + zw^3 + wx^4 \right).$$

Determinare quale delle seguenti relazioni è *sicuramente falsa*.

(A) $y = 2014$ **(B)** $x + z = 2014$ **(C)** $yw^3 \neq z^2x^4$ **(D)** $xy^4 \neq z^2w^3$
(E) $x + y \neq z + w$

3. Determinare quale delle seguenti affermazioni sul polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ è *falsa*.

(A) Non divide il polinomio $x^{2014} - x^{1997} + 2$

(B) Ha due radici complesse coniugate con parte reale positiva

(C) Ha una radice con parte immaginaria maggiore di $3/2$

(D) Tutte le sue radici (eventualmente complesse) hanno modulo maggiore di 1

(E) Ha un'unica radice reale

4. Determinare quante sono le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(y)) = xf(y) + yf(x)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** Infinite

5. Per ogni intero positivo n, sia k_n il numero degli interi positivi di n cifre in cui tutte le cifre sono diverse da 0 e non ci sono mai due cifre pari consecutive.

   Determinare quale resto si ottiene dividendo k_{2014} per 15.

   (A) 0 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 9 **(E)** 10

6. Sia $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$, sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, e sia

$$S := \sum_{f \in \mathcal{F}} (7f(1) + 12f(625)) .$$

   Determinare quale tra i seguenti primi compare con esponente maggiore nella fattorizzazione di S.

   (A) 2 **(B)** 5 **(C)** 13 **(D)** 19 **(E)** 53

7. Un grafo si dice *pre-tailandese* se ha 2014 vertici e da ogni vertice partono al massimo 4 lati.

   Sia T il massimo numero di triangoli che possono essere contenuti in un grafo pre-tailandese.

   Determinare quale resto si ottiene dividendo T per 100.

   (A) 24 **(B)** 28 **(C)** 56 **(D)** 60 **(E)** 84

8. Consideriamo la "cornice di spessore 2" ottenuta partendo da una scacchiera 2014×2014 e rimuovendo la sotto-scacchiera 2010×2010 che ha lo stesso centro.

   Su questa cornice piazziamo un po' di mattonelle 3×1, in modo da rispettare la quadrettatura, non avere sovrapposizioni, e non uscire dai bordi. Al termine dell'operazione, le 4 caselle ai vertici esterni della cornice risultano non coperte.

   Determinare quante altre caselle, come minimo, risultano non coperte.

   (A) 0 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 12

9. In un triangolo ABC si ha che $AB = 10$, $AC = 6$ e $\angle BAC = 40°$. Siano D un punto sul lato AB ed E un punto sul lato AC.

   Determinare il minimo valore possibile per la somma $BE + ED + DC$.

   (A) $\dfrac{27}{2}$ **(B)** $6\sqrt{3} + 3$ **(C)** $3\sqrt{3} + 9$ **(D)** $8\sqrt{3}$ **(E)** 14

10. In un triangolo ABC si ha che $AB = 9$ e $AC : BC = 40 : 41$.

    Determinare quanto può valere, al massimo, l'area del triangolo.

    (A) 180 **(B)** 360 **(C)** 369 **(D)** 820 **(E)** 1620

11. Alcuni amici stanno esaminando una configurazione generica di quattro circonferenze C_1, C_2, C_3, C_4 disposte in modo che C_i è tangente esternamente a C_{i+1} per ogni i e C_i non interseca C_{i+2} per ogni i (gli indici si intendono modulo 4).

- Alberto afferma: "i quattro punti di tangenza sono sicuramente i vertici di un quadrilatero ciclico".
- Barbara afferma: "se invertiamo rispetto ad un punto di tangenza otteniamo sicuramente due rette incidenti e due circonferenze tangenti alle rette e tra di loro".
- Cristina afferma: "se invertiamo rispetto ad un punto di tangenza otteniamo sicuramente due rette parallele e due circonferenze tangenti alle rette e contenute nella striscia delimitata dalle due rette stesse".
- Dario afferma: "se invertiamo rispetto ad un punto di tangenza otteniamo sicuramente due rette parallele e due circonferenze tangenti alle rette ed esterne rispetto alla striscia delimitata dalle due rette stesse".

Chi ha ragione?

(A) Solo Alberto e Cristina **(B)** Solo Barbara **(C)** Solo Cristina

(D) Solo Dario **(E)** Solo Alberto e Dario

12. Sia ABC un triangolo e sia I il suo incentro. La circonferenza inscritta ad ABC è tangente ai lati BC, CA, AB in D, E, F, rispettivamente. Le rette AI, BI, CI incontrano nuovamente la circonferenza circoscritta ad ABC in D', E', F', rispettivamente.

- Alberto afferma: "DEF è simile a $D'E'F'$".
- Barbara afferma: "le rette di Eulero di DEF e $D'E'F'$ coincidono".
- Cristina afferma: "le rette DD', EE', FF' concorrono".
- Dario afferma: "l'ortocentro di $D'E'F'$ è I".

Chi ha ragione?

(A) Solo Alberto **(B)** Tutti tranne Barbara **(C)** Tutti tranne Cristina

(D) Solo Alberto e Dario **(E)** Tutti

13. Determinare quanti sono i numeri razionali r che verificano le seguenti due proprietà:

- $0 < r < 1$,
- quando si scrive r come frazione irriducibile, la somma di numeratore e denominatore è uguale a 8000.

(A) 800 **(B)** 1600 **(C)** 3200 **(D)** 4800 **(E)** 7600

14. Sia n un intero positivo. La rappresentazione decimale di n ed n^2 termina (a destra) con le stesse quattro cifre $abcd$.

    Sapendo che $a \neq 0$, determinare c.

    (A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

15. Determinare quanti sono gli interi (relativi) a per cui esiste un intero b tale che

$$a^{2015} - 1 = b(a-1)^2.$$

    (A) 2 **(B)** 3 **(C)** 8 **(D)** 17 **(E)** infiniti

16. Un numero intero k si dice *pre-bielorusso* se esiste un numero intero a tale che $a^4 + 10000$ è multiplo di k.

    Determinare quale dei seguenti interi è pre-bielorusso.

    (A) 55 **(B)** 65 **(C)** 75 **(D)** 85 **(E)** 95

Stage Senior Pisa 2014 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Determinare il minimo della funzione $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ al variare di x in $\mathbb{R}$.

2. Sia a_n la successione definita ponendo $a_1 = 2015$, $a_2 = 2014$, e poi per ricorrenza $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ per ogni $n \geq 1$.

   Determinare $a_{2014} - 2a_{2013}$.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" che iniziano con una consonante e terminano con una vocale.

4. Determinare quante sono le funzioni $f : \{1, 2, \ldots, 2013, 2014\} \to \{a, b, c, d\}$ la cui immagine ha esattamente 3 elementi.

5. In un triangolo ABC le ampiezze degli angoli in A, B e C sono, rispettivamente, 42°, 58° e 80°. Sia I l'incentro di ABC, sia D l'ulteriore intersezione tra la retta AI e la circonferenza circoscritta ad ABC, e sia K l'ulteriore intersezione tra BI e la circonferenza circoscritta a CDI.

   Determinare l'ampiezza dell'angolo $\angle BCK$.

6. Nel triangolo ABC si ha che $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$. Siano D un punto del segmento AB (estremi esclusi) ed E un punto del segmento AC (estremi esclusi) tali che $AE = ED = DB$.

   Determinare la lunghezza di DB.

7. L'espressione decimale di un intero positivo è del tipo $a2014b$.

   Determinare per quali valori delle cifre a e b il numero risulta divisibile per 99.

8. Sia n l'intero positivo la cui espressione decimale è costituita da 81 cifre 1 consecutive.

   Determinare quale resto si ottiene dividendo n per 81.

Problemi dimostrativi

9. Dimostrare che
$$2(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{1}{9} + 15abc$$
per ogni terna di numeri reali positivi a, b, c tali che $a+b+c=1$.

10. Sul pianeta Mamma si parla una lingua in cui tutte le parole si scrivono usando solo le lettere A ed M. Ogni parola contiene almeno una e non più di 17 lettere. Inoltre, se scriviamo di fila due qualunque parole (uguali o distinte), senza spazi in mezzo, quello che otteniamo non è mai una parola della lingua.

    Determinare quante parole possono esserci al massimo nella lingua.

11. Sia ABC un triangolo, e siano O il suo circocentro e Ω la sua circonferenza circoscritta. La circonferenza di diametro AO interseca nuovamente la circonferenza circoscritta al triangolo OBC nel punto S. Le tangenti a Ω in B e C si intersecano in P.

    Dimostrare che i punti A, S, P sono allineati.

12. Determinare tutte le terne (p, x, y) in cui p è un numero primo e (x, y) è una coppia di numeri interi tali che
$$x^3(x^3+y) = py^2.$$

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	C	C	B	A	D	A	D	E	D	A	E	B	D	D	D

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Applicando le disuguaglianze tra opportune medie (sì, ma quali?) si ottiene che

$$\begin{aligned} x^2+4y^2+5xy+7z^3 &\geq 9xy+7z^3 \\ &\geq \frac{9}{z}+7z^3 \\ &= \frac{3}{z}+\frac{3}{z}+\frac{3}{z}+7z^3 \\ &\geq 4\sqrt[4]{7\cdot 27}. \end{aligned}$$

   L'uguaglianza si ha se e solo se $x=2y$, $xyz=1$ e $3/z=7z^3$ (perché?), da cui

$$x=2^{1/2}\left(\frac{7}{3}\right)^{1/4}, \qquad y=2^{-1/2}\left(\frac{7}{3}\right)^{1/4}, \qquad z=\left(\frac{3}{7}\right)^{1/4}.$$

   Non resta ora che fare semplici sostituzioni.

2. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle due quaterne

$$A=\left(\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}},\frac{y^{1/2}}{z},\frac{z^{1/2}}{w^{3/2}},\frac{w^{1/2}}{x^2}\right), \qquad B=\left(x^{1/2}y^{1/2},y^{1/2}z,z^{1/2}w^{3/2},w^{1/2}x^2\right)$$

   si ottiene la disuguaglianza opposta di quella data. Ne segue che necesssariamente LHS e RHS coincidono. Questo è possibile se e solo se $A=\lambda B$ per un qualche $\lambda>0$, cioè se e solo se

$$y=z^2=w^3=x^4=\frac{1}{\lambda}.$$

   Fatti gli opportuni conti, se ne deduce che $yw^3=z^2x^4=\lambda^{-2}$, quindi la relazione dell'opzione (C) è sempre falsa, mentre le restanti possono essere vere o false a seconda del valore di λ.

3. La soluzione segue dai seguenti fatti.

   - Tutti i polinomi di grado dispari hanno *almeno* una radice reale (e perché mai?). In questo caso la radice è unica in quanto il polinomio è pure iniettivo. Per dimostrarlo, ci sono almeno due modi.
     - Fare la derivata e constatare che è sempre positiva (e quindi?).

- Imporre che $p(x) = p(y)$ e con un po' di conti ottenere che

$$(x - y)(x^2 + y^2 + xy + x + y + 1) = 0.$$

Il secondo fattore è la metà di $(x + y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2$, quindi è sempre positivo. Da questo segue facilmente l'iniettività (come?).

- L'unica radice reale sta tra -2 e -1 perché $p(-2)$ e $p(-1)$ sono ...
- Il polinomio $p(x)$ non può dividere $x^{2014} - x^{1997} + 2$ in quanto quest'ultimo è sempre positivo per x negativo (e allora?).
- Il prodotto dei moduli di tutte le radici è 2 (perché?), quindi anche le due radici complesse coniugate hanno modulo maggiore di 1 (altrimenti?), mentre non possono avere parte immaginaria maggiore di 3/2 (altrimenti? come sono le parti immaginarie delle radici?).
- La somma delle parti reali delle tre radici è -1 (come mai? che c'entra la parte reale?). Essendo la radice reale compresa tra -2 e -1, quelle complesse coniugate ...

4. Le uniche soluzioni dell'equazione funzionale sono $f(x) = 0$ e $f(x) = 2x$. La dimostrazione segue da una serie di fatti.

   - Essendo il RHS simmetrico, lo deve essere pure il LHS, da cui $f(xf(y)) = f(yf(x))$.
   - Se f è iniettiva, allora $xf(y) = yf(x)$ (perché?). Ponendo $y = 1$ si ottiene che $f(x) = cx$ (cosa?), e sostituendo nell'equazione iniziale si conclude (come?) che le uniche possibilità sono $c = 0$ e $c = 2$.
   - Se f non è iniettiva, cioè $f(y_1) = f(y_2)$ per una qualche scelta di $y_1 \neq y_2$, allora con ovvie sostituzioni (quali?) si ottiene che $(y_1 - y_2)f(x) = 0$, e quindi ...

5. La successione verifica la ricorrenza

$$k_{n+2} = 5k_{n+1} + 20k_n.$$

Infatti un intero di $n + 2$ cifre con la proprietà richiesta

   - se l'ultima cifra è dispari, vuol dire che è stato ottenuto aggiungengo una delle 5 possibili cifre dispari ad un intero di $k + 1$ cifre con la proprietà richiesta,
   - se l'ultima cifra è pari, vuol dire che la penultima cifra è dispari, quindi è stato ottenuto da un intero di n cifre con la proprietà richiesta aggiungengo prima una cifra dispari e poi una cifra pari (da dove salta fuori il 20?).

Poiché è quasi ovvio (ma davvero?) che $k_0 = 1$ e $k_1 = 9$ (se k_0 suona ostico basta considerare $k_2 = 81 - 16 = 65$), dalla ricorrenza si può ottenere la formula esplicita per k_n (che sarebbe?).

Tuttavia la formula esplicita non serve per rispondere alla domanda. Infatti dalla ricorrenza segue che tutti i termini da k_2 in poi sono multipli di 5. Per quanto riguarda il modulo 3, con facili calcoli (quali?) si vede che la successione k_n è periodica di periodo 3, quindi $k_{2014} \equiv k_1 \equiv 0$ modulo 3, da cui la conclusione (come?).

6. Double counting! Quante sono le funzioni $f \in \mathcal{F}$ per cui $f(1)$ è uguale ad un certo k? Sono esattamente 2014^{2013} (e perché mai?). Di conseguenza

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} f(1) = 2014^{2013} \cdot \sum_{k=1}^{2014} k = 1007 \cdot 2015 \cdot 2014^{2013}.$$

Discorso del tutto analogo vale per $f(27)$ (gulp! ma allora 1 e 27 non contano nulla?). Ne segue che

$$S = 19 \cdot 1007 \cdot 2015 \cdot 2014^{2013} = 19 \cdot (19 \cdot 53) \cdot (5 \cdot 13 \cdot 31) \cdot (2 \cdot 19 \cdot 53)^{2014}.$$

7. Il numero massimo di triangoli è 4024 e si ottiene creando tanti gruppetti da 5 con tutti i possibili collegamenti interni, ed un gruppetto da 4 con tutti i possibili collegamenti interni.

   Più in generale, se il numero di vertici è del tipo $5k+4$, allora il massimo numero di triangoli è $10k+4$, e si ottiene allo stesso modo.

   Questo risultato più generale si dimostra per induzione. Il passaggio induttivo è basato su un double counting: se per un certo k ci sono abbastanza collegamenti (ma abbastanza quanti?), allora ci sarebbe un vertice coinvolto in 6 triangoli (perché?), ma allora tale vertice farebbe parte di un gruppetto da 5 con tutti i collegamenti possibili (perché mai?), e questo permetterebbe di scendere di 5 vertici riducendosi al caso $k-1$.

   Questo discorso funziona bene tranne nel passaggio da 4 a 9 vertici. Infatti con questo sistema non si può escludere che ci sia una configurazione con 9 vertici in cui da ogni vertice partono 5 triangoli, per un totale di 45 triangoli (da dove arrivano questi conti?). Tuttavia, questa situazione è molto rigida, e si esclude facilmente "a mano".

8. Pezzi 3×1? Coloriamo con tre colori "per diagonali"! Indichiamo i tre colori con A, B, C, con l'accordo che il colore A è quello che compare ai quattro vertici (ma sono colorati uguale i vertici?).

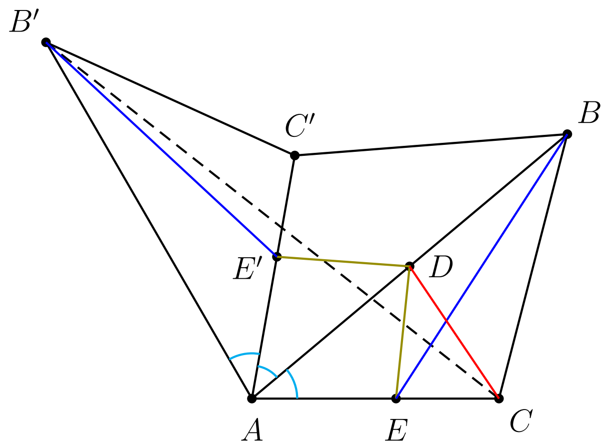
   Indicati poi con a, b, c il numero di caselle dei tre colori, è facile verificare che $b = c = a - 1$. Poiché i 4 vertici risultano scoperti, alla fine ci saranno al massimo $a - 4$ caselle di colore A occupate e quindi, visto che ogni mattonella ricopre una casella per colore, ci saranno al massimo $b - 3 = c - 3$ caselle occupate anche dei restanti colori. Pertanto, oltre ai 4 vertici, le caselle non ricoperte saranno almeno 6, tre di colore B e tre di colore C.

   Per concludere occorre ora mostrare con un esempio che è effettivamente possibile che alla fine restino non ricoperte solo le 4 caselle ai vertici ed altre 6 (farlo!).

9. Questo è il classico problema che si tratta con la riflessione. Riflettendo due volte il triangolo ABC ci ritroviamo con la figura sottostante, in cui

   $$CD + DE + EB = CD + DE' + E'B \geq CB'.$$

   La lunghezza di CB' si ricava facilmente dal teorema del coseno tenendo conto che l'ampiezza dell'angolo $\angle CAB'$ è di 120° e le lunghezze di AC e AB' sono note. Ma perché può valere l'uguaglianza?



10. Segnaliamo tre approcci.

   - *Circonferenza di Apollonio.* Il luogo dei possibili punti C è la circonferenza di Apollonio costruita sui punti base A e B e con parametro $40/41$. La massima altezza del triangolo è il raggio di questa circonferenza (cosa?).

     Per calcolare il raggio, basta calcolare il diametro, per ottenere il quale basta determinare le intersezioni tra la circonferenza e la retta AB. Tali intersezioni sono il punto D del segmento AB tale che $AD = 40/9$ ed il punto E, esterno al segmento AB dalla parte di A e tale che $AE = 40$. Da dove arrivano questi punti? Come si conclude?

   - *Formula di Erone.* Indichiamo con $40x$ e $41x$ le lunghezze degli altri due lati. Dalla formula di Erone si deduce (come?) che

     $$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(81^2x^2 - 81)(81 - x^2)} = \frac{81}{4}\sqrt{\left(x^2 - \frac{1}{81}\right)(81 - x^2)}.$$

     A questo punto si conclude facilmente con AM–GM (come?).

   - *Trigonometria.* Indichiamo con $40x$ e $41x$ le lunghezze degli altri due lati, e con γ l'angolo compreso. Il teorema del coseno ci dice che

     $$(40^2 + 41^2)x^2 - 2 \cdot 40 \cdot 41 \cos\gamma = 81.$$

     Per la formula trigonometrica per l'area si tratta quindi di massimizzare

     $$\text{Area}(ABC) = \frac{40 \cdot 41}{2} x^2 \sin\gamma$$

     con il vincolo dato dal teorema del coseno. A questo punto non resta che ricavare x^2 dal vincolo e massimizzare in qualunque modo la funzione trigonometrica risultante.

11. La soluzione segue dai seguenti fatti. Supponiamo wlog di invertire rispetto al punto di tangenza tra C_1 e C_2.

   - Le circonferenze C_1 e C_2 vanno a finire in due rette parallele. Il cerchio delimitato da ciascuna delle due circonferenze va nel semipiano delimitato dalla corrispondente retta e non contenente l'altra retta. In particolare, il punto di inversione sta nella striscia delimitata dalle due rette parallele.

- Le circonferenze C_3 e C_4 vanno a finire in due circonferenze, tangenti tra di loro ed alle due rette parallele. Poichè tali circonferenze sono esterne rispetto a C_1 e C_2, le loro immagini saranno interne alla striscia.
- Si tratta ora di mostrare che i tre punti di tangenza delle immagini di C_3 e C_4 (tra di loro e con le rette parallele) sono allineati. Da questo segue (come?) la ciclicità dei 4 punti di tangenza delle circonferenze iniziali.
- L'allineamento è una semplice questione di angoli. Tracciata la retta congiungente i centri, e congiunti i centri con i punti di tangenza, si tratta di verificare che i due triangoli isosceli che si formano sono simili (e quindi?).

Osserviamo che, se togliamo l'ipotesi che C_i e C_{i+2} non si intersecano, resta ancora vero che i punti di tangenza sono conciclici (e la dimostrazione è sostanzialmente la stessa), ma può accadere che le immagini di C_3 e C_4 stiano, oltre che nella striscia (che comunque intersecano), anche in parte nei due semipiani esterni.

12. La soluzione segue dai seguenti fatti.

- I triangoli DEF e $D'E'F'$ sono simili per questioni di angoli, che si calcolano tutti esplicitamente in funzione degli angoli di ABC (si ricorda che D', E', F' sono i punti medi di opportuni archi sulla circonferenza circoscritta).
- La retta AD' è perpendicolare sia a FE (facile!) sia a $F'E'$ (questione di angoli). Lo stesso vale per BE' e CF'. Ne segue che i triangoli DEF e $D'E'F'$ sono non solo simili, ma hanno pure i lati a due a due paralleli.
- Per il punto precedente i triangoli DEF e $D'E'F'$ sono omotetici (cosa vuol dire?), quindi le rette DD', EE', FF' concorrono nel centro dell'omotetia (perché?).
- Per quanto detto al secondo punto, l'incentro I di ABC è il circocentro di DEF e l'ortocentro di $D'E'F'$, dunque in particolare le rette di Eulero di DEF e $D'E'F'$ passano entrambe per I (come mai?). Inoltre, per l'omotetia di cui al terzo punto, tali rette di Eulero sono pure parallele tra di loro (perché?) e quindi coincidono.

Per la cronaca, il centro dell'omotetia è il centro di omotetia esterno delle circonferenze inscritta e circoscritta ad ABC, ed è il coniugato isogonale del punto di Nagel di ABC (ma tutto questo non serviva).

13. Scritto r nella forma m/n, deve essere $m < n$ e $m + n = 8000$. Essendo m ed n primi tra loro, dovranno essere primi pure con 8000 (perché mai?), dunque tutto si riduce a contare gli interi positivi minori di 8000 e primi con 8000, cioè (cos'è questa roba?)

$$\phi(8000) = \phi(2^6) \cdot \phi(5^3) = (2^6 - 2^5) \cdot (5^3 - 5^2) = 3200.$$

Alla fine bisogna poi dividere per 2 per tener conto del vincolo $m < n$.

14. Si tratta di risolvere $n^2 \equiv n$ modulo 10^4, il che si riduce (perchè mai?) al sistema

$$\begin{cases} n(n-1) \equiv 0 \pmod{16}, \\ n(n-1) \equiv 0 \pmod{625}. \end{cases}$$

Dal sistema si deduce (come?) che n può essere solo 0 o 1 modulo 16 e modulo 625, per un totale di 4 possibilità. Fatti i conti (quali?) si trova che le 4 soluzioni sono 0, 1, 625, 9376 (ovviamente modulo 10^4) e solo l'ultima ha la cifra delle migliaia diversa da 0.

15. Per prima cosa c'è la soluzione banale $a = 1$. Tolta di mezzo questa, possiamo semplificare riducendoci a cercare quando $(a-1)$ divide $a^{2014} + a^{2013} + \ldots + a + 1$. Effettuando la divisione tra polinomi, troviamo che

$$a^{2014} + a^{2013} + \ldots + a + 1 = (a-1)q(a) + 2015$$

per un opportuno polinomio $q(a)$ (ehm, come abbiamo fatto a fare questa divisione?). Dalla divisione segue che $q(a)$ deve dividere $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. I divisori positivi di 2015 sono 8 (perché?) e quindi, considerando che stiamo cercando interi relativi, restano 16 possibilità per $(a-1)$.

16. Il fatto generale è il seguente: se un primo dispari p divide un numero della forma $a^4 + b^4$, allora o p divide sia a sia b, o $p \equiv 1$ modulo 8. Da dove arriva questo fatto generale?

    Nel nostro caso $b = 10$, quindi i possibili fattori primi di $a^4 + 10^4$ sono 2, 5, e quelli congrui a 1 modulo 8. Tra quelli proposti, l'unico numero con fattori di questo tipo è 85. Questo non mostra ancora che effettivamente esista un valore di a per cui $a^4 + 10^4$ è multiplo di 85. Come si dimostra l'esistenza? Serve un elemento di ordine 8 modulo 17 ... (cosa?)

Test Finale – Risposte

1. -1
2. -2016
3. 1350
4. $4 \cdot (3^{2014} - 3 \cdot 2^{2014} + 3)$
5. $29°$
6. $16/5$
7. L'unica possibilità è $a = 5$ e $b = 6$
8. 0
9. $2^{18} - 2^9$, realizzato includendo tutte e sole le parole di lunghezza maggiore o uguale a 9
10. ...
11. ...
12. Ci sono 2 famiglie infinite di soluzioni: $(p, 0, 0)$ al variare di p tra i primi dispari e $(2, x, x^3)$ al variare di $x \in \mathbb{Z}$.

Test Finale – "Aiutini"

1. Con il cambio di variabili $y = x - 2/5$ (suggerito dalla simmetria della funzione rispetto al punto $-2/5$) ci si riduce a minimizzare

$$\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\left(y^2 - \frac{9}{4}\right).$$

Il minimo si ha quando $y^2 = 5/4$ (perché? da dove arriva questo numero?). Volendo si può ottenere anche con AM–GM.

2. Segnaliamo due approcci.
   - *Formula generale.* Dalla teoria generale (come funziona?) si ricava che $a_n = -2^n + 2016$, da cui si ottiene immediatamente la risposta.
   - *Scorciatoia.* Partendo dalla ricorrenza data si dimostra per induzione (ma va fatto) che la successione $a_{n+1} - 2a_n$ è costante, dunque uguale ad $a_2 - 2a_1$ per ogni $n \geq 1$.

3. Consideriamo le lettere ripetute come se fossero distinte. In questo modo la lettera iniziale la possiamo scegliere in 5 modi, quella finale in 3 modi, le restanti in 6, 5, 4, 3, 2, 1 modi, rispettivamente. A questo punto dobbiamo dividere per 8 (ma perché proprio per 8?) per tenere conto delle lettere ripetute. In totale le possibilità sono quindi

$$\frac{5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8} = 1350.$$

4. Fissata l'immagine (4 possibilità), dobbiamo contare quante sono le funzioni surgettive da un insieme di 2014 elementi in uno di 3 elementi. Per far questo si può usare direttamente la formula generale, oppure osservare che sono

$$3^{2014} - 3 - 3 \cdot (2^{2014} - 2),$$

in cui il primo addendo conta tutte le funzioni da un insieme di 2014 in un insieme di 3 elementi, il secondo sottrae le funzioni costanti, il terzo le funzioni che hanno per immagine esattamente 2 elementi (3 sono i modi di scegliere 2 elementi, $2^{2014} - 2$ sono i modi di scegliere un sottoinsieme non vuoto dell'insieme di partenza da mappare in uno fissato dei 2 elementi). Da dove arriva questo conto?

Moltiplicando tutto per 4 si ha la risposta.

5. Consideriamo il quadrilatero ciclico $DKIC$ (occhio all'ordine dei punti, che andrebbe controllato per bene). Allora $\angle IDC = \ldots$ e quindi $\angle IKC = \ldots$ Da qui si risale all'ampiezza di $\angle BKC$ e infine all'angolo richiesto.

6. Indichiamo con x la lunghezza richiesta, cioè quella comune ai tre segmenti. Dal teorema del coseno in ADE ricaviamo che

$$(4 - x)^2 + x^2 - 2x(4 - x)\cos\alpha = x^2.$$

Ora $\cos\alpha$ si ricava dalle lunghezze dei lati di ABC, sempre utilizzando il teorema del coseno.

7. Per i noti criteri di divisibilità, ci riduciamo a risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b \equiv 2 \pmod 9, \\ b \equiv a + 1 \pmod{11}. \end{cases}$$

Trattandosi di cifre, per la prima congruenza le uniche possibilità sono $a + b = 2$ e $a + b = 11$ (perché?). La prima, sostituita nella seconda, non produce soluzioni (come mai?). La seconda produce la soluzione accettabile (fare i conti!).

8. Si dimostra per induzione che 3^{n+2} divide $10^{3^n} - 1$, e che anzi $(n + 2)$ è il miglior esponente possibile (cosa stiamo usando in questa dimostrazione?).

A questo punto con $n = 4$ si ottiene che 3^6 divide $10^{81} - 1$, e quindi 3^4 divide $(10^{81} - 1)/9$. Basta questo?

9. La disuguaglianza proposta si ottiene facilmente sommando le due disuguaglianze

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \frac{1}{9}, \qquad \frac{5}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \geq 15abc,$$

entrambe vere sotto lo stesso vincolo. La prima segue quasi banalmente (davvero?) da QM–AM, la seconda dalla disuguagliaza omogenizzata (che vuol dire?)

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 9abc,$$

che a questo punto si dimostra in tantissimi modi (ma farne uno ...).

10. Si tratta di dimostrare che il massimo numero di parole di ottiene includendo tutte e sole quelle di lunghezza maggiore o uguale a 9 (perché questa scelta rispetta le condizioni? quante parole comprende?).

    Il punto fondamentale è dimostrare che non si può fare di meglio. Per far questo, supponiamo che nella lingua ci sia una parola P con 8 lettere o meno. Consideriamo le coppie del tipo $(X, X \cup P)$ al variare di X tra le parole di 9 lettere. Quante sono queste coppie? È vero che almeno un componente di ogni coppia non può far parte della lingua? Quante parole vengono escluse in questo modo? Siamo sicuri che siano tutte distinte?

    Dopo aver risposto alle domande precedenti, si deduce facilmente (davvero?) che la presenza di P determina un numero di esclusioni maggiore di quello che si ha nell'esempio presentato all'inizio, che quindi è l'unica soluzione ottimale.

    Una interessante estensione di questo esercizio si ha considerando il caso in cui la massima lunghezza è pari, ad esempio rimpiazzando 17 con 18 nel testo.

11. Si tratta di dimostrare che $\angle OSA = 90° = \angle OSP$. La prima uguaglianza è sostanzialmente banale (da cosa segue?). Per la seconda, si tratta di dimostrare che i punti B, C, O, S, P stanno su una stessa circonferenza, di cui OP è un diametro. Per la ciclicità, basta verificare che il quadrilatero $BOCP$ è ciclico (e allora?), cosa che segue dal fatto che gli angoli in B e C sono supplementari. Per il fatto che OP è diametro, basta ancora una volta considerare l'angolo $\angle OCP$. Accertarsi di padroneggiare bene questi fatti ...

12. Il primo punto fondamentale è che x e y hanno gli stessi fattori primi. Per dimostrarlo, ci sono due implicazioni da verificare. Prendiamo un primo q che divida y: allora deve dividere anche x^3 o $x^3 + y$, ma in entrambi i casi ... Viceversa, prendiamo un primo q che divida x: allora deve dividere anche py^2 e quindi y (siamo proprio sicuri? non è che il caso in cui $q = p$ complica le cose?).

    Il secondo punto consiste nel considerare gli esponenti con cui tali fattori primi compaiono nel lhs e nel rhs. Supponendo che q^a divida esattamente x e q^b divida esattamente y, si tratta di dimostrare che $b = 3a$ se $q \neq p$, mentre $b = 3a$ oppure $b = 3a - 1$ se $q = p$. Come si ricavano queste identità? Si possono distinguere i casi $b < 3a$ e $b > 3a$, nei quali si sa esattamente la massima potenza di q che divide il termine $x^3 + y$. E poi?

    Ottenute le relazioni tra gli esponenti, restano i casi $y = x^3$ e $y = x^3/p$. Sostituendo (farlo!) si ottengono le due famiglie infinite di soluzioni.