Stage Senior Pisa 2015 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia m il minimo valore assunto dalla funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 130}$$

al variare di x nell'insieme dei numeri reali.

Determinare quale delle seguenti relazioni è soddisfatta.

(A) $m < 12$ **(B)** $m = 12$ **(C)** $12 < m < 13$ **(D)** $m = 13$ **(E)** $m > 13$

2. Sia k il più piccolo numero reale tale che

$$(2x + 3y + 5z)^2 \leq (3x^2 + 2y^2 + 5)(6z^2 + k)$$

per ogni terna di numeri reali x, y e z.

Determinare quale dei seguenti numeri è intero.

(A) $2013k$ **(B)** $2014k$ **(C)** $2015k$ **(D)** $2016k$ **(E)** $2017k$

3. Determinare quale dei seguenti polinomi è divisibile per $x^2 + x + 1$.

(A) $x^{2015} + x^{2000} + 1$ **(B)** $x^{2016} + x^{2000} + 1$ **(C)** $x^{2017} + x^{2000} + 1$

(D) $x^{2018} + x^{2000} + 1$ **(E)** $x^{2019} + x^{2000} + 1$

4. Quattro amici stanno iniziando lo studio delle equazioni funzionali. In tutti gli esercizi che esaminano vorrebbero determinare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verificano la relazione data per ogni coppia di numeri reali x e y.

- Alberto afferma: "l'equazione $f(xy + f(x)) = yf(x) + 7$ non ha soluzioni".
- Barbara afferma: "tra le soluzioni dell'equazione $f(xy+f(x)) = xf(y+7)$ ne esiste almeno una surgettiva".
- Cristina afferma: "tra le soluzioni dell'equazione $f(xy + f(x)) = xf(y + 7)$ ne esiste un'unica *non* surgettiva".
- Dario afferma: "l'equazione $f(xy+f(x)) = f(7xy)$ ha almeno una soluzione non costante".

Chi ha ragione?

(A) Tutti tranne Alberto **(B)** Tutti tranne Barbara **(C)** Tutti tranne Cristina

(D) Tutti tranne Dario **(E)** Tutti

5. Determinare in quanti modi possiamo colorare una tabella 3×3 con due colori (bianco e nero) in modo che non vi sia nessun quadrato 2×2 costituito da quattro caselle bianche.

(A) 256 **(B)** 335 **(C)** 384 **(D)** 417 **(E)** 425

6. Sia S_{2015} l'insieme delle permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3, \dots, 2015\}$, e sia

$$M := \frac{1}{2015!} \sum_{\sigma \in S_{2015}} |\sigma(4) - \sigma(7)|.$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni è vera.

(A) M è intero e divisibile per 7 **(B)** M è intero e divisibile per 13

(C) $2M$ è intero e divisibile per 5 **(D)** $3M$ è intero e divisibile per 5

(E) $3M$ è intero e divisibile per 31

7. Un grafo ha 2015 vertici V_1, V_2, …, V_{2015} ed è tale che

$$\deg(V_i) = i \qquad \forall i = 1, \dots, 2014.$$

Determinare quali sono i valori possibili per $\deg(V_{2015})$.

Nota: il grado $\deg(V)$ di un vertice V di un grafo è il numero di lati che confluiscono in V.

(A) Solo 1007 **(B)** Solo 2015 **(C)** Solo 1007 e 2013

(D) Tutti i numeri dispari 1, …, 2013 **(E)** Tutti i numeri pari 0, 2, …, 2014

8. Alberto e Barbara hanno scritto un numero intero positivo N sulla lavagna. A turno, ogni giocatore può sostituire il numero scritto in quel momento con il numero ottenuto dividendolo per una potenza di un primo a sua scelta, purché il risultato ottenuto sia ancora un intero. Inizia Alberto e vince chi scrive per primo il numero 1.

Tra i valori di N indicati nelle risposte, quattro sono favorevoli allo stesso giocatore. Determinare il restante numero.

Nota: per potenza di un primo si intende un numero della forma p^a, con p primo e a intero positivo.

(A) 24^{240} **(B)** 36^{360} **(C)** 45^{450} **(D)** 48^{480} **(E)** 50^{500}

9. Sia $ABCD$ un parallelogrammo. La circonferenza circoscritta ad ABD passa per l'ortocentro di BCD …

(A) se e solo se $ABCD$ è un quadrato

(B) se e solo se $ABCD$ è un rettangolo **(C)** se e solo se $ABCD$ è un rombo

(D) se e solo se $ABCD$ è un rettangolo oppure un rombo **(E)** sempre

10. In un triangolo ABC l'ampiezza dell'angolo in A è di $120°$ e la circonferenza inscritta, che indichiamo con ω_0, ha raggio $r_0 = 6$. Induttivamente, per ogni $i \geq 1$ indichiamo con ω_i la circonferenza tangente ad ω_{i-1} ed ai lati AB e AC, e avente raggio $r_i < r_{i-1}$.

    Determinare il più piccolo numero reale C tale che

$$\sum_{i=0}^{n} r_i \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

    (A) $3 + 2\sqrt{3}$ **(B)** $3 + 3\sqrt{2}$ **(C)** $3 + 3\sqrt{3}$ **(D)** $2 + 3\sqrt{3}$ **(E)** $2 + 3\sqrt{2}$

11. In un problema si parla di due triangoli con la proprietà che i seni degli angoli del primo sono uguali ai coseni degli angoli del secondo. Esaminando il problema

    - Alberto afferma: "la situazione è impossibile",
    - Barbara afferma: "la situazione è possibile, e risulta determinata in maniera univoca l'ampiezza del minore dei sei angoli",
    - Cristina afferma: "la situazione è possibile, e risulta determinata in maniera univoca l'ampiezza del maggiore dei sei angoli".

    Chi ha ragione?

    (A) Solo Alberto **(B)** Solo Barbara **(C)** Solo Cristina
    (D) Solo Barbara e Cristina **(E)** Nessuno

12. Alcuni amici stanno considerando un problema in cui si parla di un triangolo acutangolo e scaleno ABC. Ad un certo punto viene l'idea di fare l'inversione rispetto all'ortocentro H di ABC (con raggio qualunque), ottenendo così un nuovo triangolo $A'B'C'$.

    - Alberto afferma: "l'incentro di $A'B'C'$ è proprio H".
    - Barbara afferma: "i punti medi dei lati di ABC non diventano i punti medi dei lati di $A'B'C'$, ma la circonferenza che passa per i punti medi dei lati di ABC diventa la circonferenza che passa per i punti medi dei lati di $A'B'C'$".
    - Cristina afferma: "i piedi delle altezze di ABC vanno a finire nei centri delle circonferenze ex-inscritte ad $A'B'C'$".

    Chi ha ragione?

    (A) solo Alberto **(B)** solo Barbara **(C)** solo Cristina
    (D) solo Alberto e Cristina **(E)** solo Alberto e Barbara

13. Dato un numero razionale positivo r, lo scriviamo come frazione irriducibile m/n e definiamo quindi $f(r) = mn$. Sia M la cardinalità dell'insieme dei numeri razionali r tali che $0 < r < 1$ e $f(r) = 30!$.

    Determinare quale resto si ottiene dividendo M per 100.

    (A) 0 **(B)** 12 **(C)** 32 **(D)** 52 **(E)** 72

14. Siano a, b e c tre numeri interi tali che il sistema

$$\begin{cases} x - y = a \\ x^3 - y^3 + bxy = 2c \end{cases}$$

    ha come soluzione almeno tre coppie distinte di numeri reali (x, y).

    Determinare quale delle seguenti affermazioni *non* può essere dedotta.

    (A) Il sistema ha infinite soluzioni reali **(B)** $bc \leq 0$ **(C)** bc è multiplo di 24

    (D) ac è divisibile per 8 **(E)** b è multiplo di c

15. Determinare quante sono le coppie (p, m) in cui p è un numero primo (e quindi positivo), m è un numero intero (relativo) e

$$p(m - 78p) = (m - 3)^3 + 3p.$$

    (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

16. Siano $p_1, \ldots, p_{2015}$ numeri primi distinti e maggiori di 100, e sia

$$\sum_{k=1}^{2015} \frac{1}{p_k^6 + 1} = \frac{a}{b}$$

    per opportuni interi a e b relativamente primi. Sia $c = a^5 b$.

    Determinare quale resto si ottiene dividendo 16^c per 29.

    (A) 22 **(B)** 23 **(C)** 24 **(D)** 25 **(E)** Dipende dalla scelta dei p_k

Stage Senior Pisa 2015 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Per ogni intero positivo n, siano a_n, b_n e c_n le radici (eventualmente complesse) del polinomio

$$n(n+1)x^3 - (2n-1)x^2 + (n^3+2)x + 1 = 0.$$

   Calcolare $a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_{2015}b_{2015}c_{2015}$.

2. Una successione è definita ponendo $x_0 = 0$ e poi per ricorrrenza $x_{n+1} = 2x_n + n$.

   Determinare la cifra delle unità di x_{2015}.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" che non contengono la sequenza "ST" (cioè nei quali la lettera S non è mai seguita immediatamente da una T).

4. Una formica parte da un vertice di un cubo e percorrendo 7 lati del cubo visita tutti i restanti vertici. Al termine del percorso constata di non poter tornare al punto di partenza percorrendo un solo lato.

   Determinare quanti percorsi diversi può aver fatto la formica.

5. Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Costruiamo, esternamente al triangolo, i quadrati $ABXY$ e $BCZW$. Così facendo, il quadrilatero $XYZW$ risulta ciclico.

   Determinare il rapporto AB/AC.

6. Sia I l'incentro di un triangolo ABC in cui il coseno dell'angolo $\angle ACB$ è $3/5$.

   Determinare il seno dell'angolo $\angle AIB$.

7. L'espressione decimale di un intero positivo A è del tipo $2015a2015$, dove a è una cifra incognita.

   Determinare per quali valori di a il numero $245A - 372$ risulta divisibile per 9.

8. Determinare quanti sono gli interi $1 \leq n \leq 100$ tali che $n^{2015} \equiv 63$ modulo 100.

Problemi dimostrativi

9. Dimostrare che
$$\frac{a-\sqrt{bc}}{a+2(b+c)}+\frac{b-\sqrt{ca}}{b+2(c+a)}+\frac{c-\sqrt{ab}}{c+2(a+b)}\geq 0$$
per ogni terna di numeri reali positivi a, b, c.

10. L'amministrazione della mensa ha deciso che tutti i partecipanti al prossimo stage Senior avranno come "codice mensa" un divisore positivo di 60^{60}. Ovviamente partecipanti diversi dovranno avere codici diversi. Inoltre nessun codice potrà essere multiplo di un altro codice.

    Determinare il massimo numero possibile di stagisti che potranno mangiare alla mensa al prossimo stage Senior.

11. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Una circonferenza ω_1 passa per A e B ed è tangente alla retta CD in K. Una circonferenza ω_2 passa per B e C ed è tangente alla retta DA in L. Una circonferenza ω_3 passa per C e D ed è tangente alla retta AB in M. Una circonferenza ω_4 passa per D e A ed è tangente alla retta BC in N.

    Dimostare che le rette KM ed LN sono perpendicolari.

12. Determinare tutti i numeri primi p per cui il seguente sistema
$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$$
ammette soluzioni intere x e y.

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	D	C	E	D	A	A	B	E	A	C	D	B	E	C	B

Test Iniziale – “Aiutini”

1. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A = (2, 3)$ e $B = (7, -9)$. Consideriamo anche un punto variabile $P = (x, 0)$ sull’asse x. Allora (cosa?)

$$f(x) = \operatorname{dist}(A, P) + \operatorname{dist}(P, B).$$

Tale somma ha come valore minimo la distanza tra A e B (e perché mai?), che è proprio 13. Il minimo si raggiunge se e solo se P è l’intersezione tra l’asse x ed il segmento AB. Perché abbiamo preso i punti A e B con ordinate di segno diverso?

2. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (come? a cosa? perché?) otteniamo che

$$\begin{aligned}(2x + 3y + 5z)^2 &= \left(\sqrt{3}\,x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\,y \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}\,z\right)^2 \\ &\leq (3x^2 + 2y^2 + 5)\left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2} + 5z^2\right) \\ &\leq (3x^2 + 2y^2 + 5)\left(\frac{35}{6} + 6z^2\right).\end{aligned}$$

Questo mostra che la disuguaglianza vale quando $k = 35/6$. Resta da dimostrare che non vale per valori di k più piccoli (e perché bisogna dimostrarlo?). A tal fine basta porre

$$x = \frac{2}{3}n, \qquad y = \frac{3}{2}n, \qquad z = 0$$

per ottenere (come?) la disuguaglianza

$$\left(\frac{35}{6}\right)^2 n^2 \leq \frac{35}{6}kn^2 + 5k,$$

la quale può essere vera per ogni valore (ad esempio intero) di n se e solo se $k \geq 35/6$ (e perché mai?). Pertanto il più piccolo valore possibile per k è proprio $35/6$.

Come può venire in mente di usare proprio quei tre valori di x, y, z? Ma non si trova proprio una terna (x, y, z) non nulla che realizza l’uguaglianza? È così grave questo?

3. Segnaliamo tre approcci.

- *Raccoglimenti elementari.* Intanto osserviamo che

$$\begin{aligned} x^{2017}+x^{2000}+1 &= (x^2+x+1)+(x^{2000}-x^2)+(x^{2017}-x) \\ &= (x^2+x+1)+x^2(x^{1998}-1)+x(x^{2016}-1) \end{aligned}$$

  Gli ultimi due addendi nel rhs sono divisibili per x^3-1 (perché?), dunque anche per x^2+x+1 (come mai?). Questo mostra che $x^{2017}+x^{2000}+1$ è divisibile per x^2+x+1.

  Con ragionamenti del tutto analoghi (che però vanno fatti!) si mostra che i restanti polinomi indicati nelle risposte non sono divisibili.

- *Congruenze tra polinomi.* Utilizzando le congruenze tra polinomi (ma cosa sono?) si ha subito che

$$x^3 \equiv 1 \pmod{x^2+x+1},$$

  da cui (come?)

$$x^{2017}+x^{2000}+1 \equiv x+x^2+1 \equiv 0 \pmod{x^2+x+1}.$$

  In modo analogo si vede che gli altri polinomi non sono congrui a 0, per esempio

$$x^{2018}+x^{2000}+1 \equiv x^2+x^2+1 \equiv 2(-x-1)+1 \equiv -2x-1 \pmod{x^2+x+1}.$$

- *Radici complesse.* Le radici di x^2+x+1 sono $\pm\omega$, dove ω è una radice primitiva terza di 1 (cosa vuol dire?). Allora bisogna cercare tra i polinomi delle risposte quelli che hanno $\pm\omega$ tra le loro radici. Ora la potenza ω^a dipende solo dalla classe di a modulo 3 (perché? e se anche fosse?), da cui ...

Osservazione importante: tutti gli approcci presentati mostrano in fondo il seguente *fatto generale*: il polinomio x^a+x^b+1 è divisibile per x^2+x+1 se e solo se gli esponenti a e b sono uno congruo a 1 e uno congruo a 2 modulo 3.

4. La soluzione segue da una serie di fatti.

   - Ponendo $x=1$ nell'equazione di Alberto si ottiene (come?) che le eventuali soluzioni dovrebbero essere affini, cioè del tipo $f(x)=ax+b$. Sostituendo questa espressione nell'equazione funzionale si vede che non esistono valori di a e b che vanno bene, quindi non ci sono soluzioni.

     Achtung! In questo finale non è corretto ottenere relazioni tra a e b uguagliando formalmente i coefficienti di x, y, xy, e i termini noti (perché non è corretto?). Bisogna invece trovare relazioni tra a e b sostituendo opportuni valori di x e y (quali? come?).

   - L'equazione di Cristina ammette la soluzione non surgettiva $f(x)\equiv 0$. Questa è l'unica soluzione non surgettiva. Supponiamo infatti che ci sia un punto a tale che $f(a)\neq 0$. Sostituendo $y=a-7$ si ottiene una relazione da cui si deduce facilmente la surgettività della funzione (come? come fa a venire in mente una sostituzione del genere?). E allora?

   - La funzione $f(x)$ che vale 1 per x razionale e 0 altrimenti soddisfa l'equazione di Dario (sono proprio importanti 0 e 1? con cosa si potrebbero sostituire?).

     Osservazione generale: le equazioni del tipo $f(A)=f(B)$, dove A e B sono due espressioni date, sono spesso molto subdole (nel senso che le soluzioni potrebbero non essere solo le costanti, e se anche lo fossero potrebbe non essere facilissimo dimostrarlo)!

5. Si tratta di applicare il *principio di inclusione-esclusione* (cosa sarebbe?). Tutte le colorazioni possibili sono 2^9. Quelle che hanno tutto bianco il quadrato 2×2 in alto a sinistra sono 2^5 (perché?) e analogamente per quelle che hanno tutto bianco uno qualunque degli altri tre quadrati 2×2. Quelle che hanno due quadrati 2×2 bianchi sono più delicate: se i quadrati sono adiacenti sono 2^3, se invece sono in diagonale sono 2^2 (perché?). Ancora più facilmente si contano le configurazioni con 3 o 4 quadrati 2×2 bianchi.

   Alla fine il conto complessivo è (capire bene i vari termini!)

$$2^9 - 4 \cdot 2^5 + (4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) - 4 \cdot 2 + 1 = 417.$$

6. *Double counting!* Trattiamo più in generale il caso delle permutazioni S_n dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$. Quante sono le permutazioni che hanno $|\sigma(4) - \sigma(7)| = k$? Sono esattamente

$$2 \cdot (n-k) \cdot (n-2)!,$$

   in cui $(n-k)$ sono i modi di scegliere due valori a distanza k, 2 sono i modi di assegnare questi due valori a $\sigma(4)$ e $\sigma(7)$, e $(n-2)!$ sono i modi di assegnare σ sui restanti $n-2$ elementi (da dove arrivano questi tre numeri?).

   Di conseguenza il numero richiesto è (da dove arriva l'ultimo k?)

$$M = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} 2 \cdot (n-k) \cdot (n-2)! \cdot k = \frac{2(n-2)!}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} (kn - k^2).$$

   Le due sommatorie si calcolano con le note formule (quali?) e semplificando tutto si ottiene $M = (n+1)/3$, che nel nostro caso è 672.

7. Più in generale si può dimostrare che un grafo su $2n+1$ vertici con $\deg(V_i) = i$ per ogni $i = 1, \ldots, 2n$ ha necessariamente $\deg(V_{2n+1}) = n$.

   Per dimostrarlo si può procedere per induzione. Prendiamo un grafo su $2n+1$ punti con la proprietà data. Togliamo tutti i lati collegati con V_{2n}. Così facendo tutti gli altri vertici hanno il grado che scende di 1, con V_1 e V_{2n} che restano isolati (chiaro?). I restanti vertici costituiscono un nuovo grafo su $2n-1$ vertici in cui sono rappresentati tutti i gradi da 1 a $2n-2$. Questo argomento è il nucleo del passaggio induttivo. D'altra parte il caso 3 (cioè $n = 1$) si tratta facilmente a mano. E quindi?

8. Tutti i valori di N proposti sono del tipo $p^a q^b$, cioè hanno due fattori primi. Si dimostra facilmente che i numeri di questo tipo sono favorevoli ad Alberto se e solo se $a \neq b$.

   Infatti quando Alberto trova un numero con due esponenti diversi può sempre fare una mossa che rende gli esponenti uguali; a quel punto Barbara per forza li renderà nuovamente diversi e Alberto tornerà a renderli uguali, e così via fino alla vittoria finale di Alberto. Se invece Alberto trova due esponenti uguali i ruoli si invertono.

   Tra i valori indicati nelle risposte, quattro hanno esponenti diversi (quindi sono favorevoli ad Alberto) e solo 36^{360} ha esponenti uguali (quindi è favorevole a Barbara).

   Osservazione: questo gioco è equivalente al *nim* a due pile, gioco in cui ci sono due pile di gettoni e ad ogni turno ogni giocatore può togliere quanti gettoni vuole purché ne tolga almeno uno e li tolga tutti dalla stessa pila. Nel nim a due pile il primo giocatore ha una strategia vincente se e solo se le due pile contengono un numero diverso di gettoni. Molto più interessante e difficile è il caso del nim con più di due pile: per quello c'è una teoria non ovvia molto istruttiva che va imparata e saputa.

9. Segnaliamo due approcci, apparentemente diversi ma sostanzialmente equivalenti.

   - *Angle chasing.* Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo ABD, i cui angoli indichiamo con α, β e γ. I punti dell'arco BD non contenente A vedono la corda BD sotto un angolo di ampiezza $180° - \alpha = \beta + \delta$ (da dove arriva questa relazione?). L'ortocentro di BCD vede il segmento BD sotto lo stesso angolo (perché?), quindi sta su quell'arco, qualunque sia il parallelogrammo.
   - *Solita proprietà dell'ortocentro.* Sia E il punto di intersezione delle diagonali del parallelogrammo. Per un fatto noto (quale?) il simmetrico rispetto ad E dell'ortocentro di BCD sta sulla circonferenza circoscritta a BCD. Questo è come dire che l'ortocentro stesso sta sul simmetrico rispetto ad E della circonferenza circoscritta a BCD (cos'è questo rivoltare le carte?), che è proprio la circonferenza circoscritta ad ABD (e perché mai?).

10. Tutta questione di omotetia! Quello che accade è che il rapporto r_{i+1}/r_i non dipende da i (e cosa c'entrano le omotetie in tutto ciò?) e si calcola esplicitamente.

    Per svolgere il calcolo, indichiamo con O_i il centro di ω_i, con B_i il punto di tangenza di ω_i con il lato AB, e con K_i la proiezione di O_{i+1} su O_iB_i. Consideriamo il triangolo $O_{i+1}K_iO_i$, rettangolo in K_i e con angolo in O_i di ampiezza $30°$ (perché?). Sapendo che $O_iO_{i+1} = r_i + r_{i+1}$ e $O_iK_i = r_i - r_{i+1}$ (da dove arrivano queste relazioni?), con facili conti (quali?) otteniamo che

    $$\frac{r_{i+1}}{r_i} = 7 - 4\sqrt{3},$$

    da cui con una banale induzione ricaviamo che $r_i = 6 \cdot (7 - 4\sqrt{3})^i$.

    Sommando la serie (cosa vuol dire? perché si fa? come si fa?) possiamo concludere che

    $$\sum_{i=0}^{\infty} r_i = \frac{6}{1 - 7 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 3.$$

11. Con ovvio (si spera) significato delle lettere si arriva alle relazioni

    $$\sin\alpha = \cos\alpha', \qquad \sin\beta = \cos\beta', \qquad \sin\gamma = \cos\gamma',$$

    da cui si deduce subito (come?) che α', β' e γ' devono essere minori di $90°$. Inoltre si deve avere che

    $$\alpha = 90° \pm \alpha', \qquad \beta = 90° \pm \beta', \qquad \gamma = 90° \pm \gamma'$$

    per una opportuna scelta dei segni (perché?). Si tratta ora di capire come scegliere i segni.

    - Se scegliamo $+++$ oppure $---$ non riusciamo a rispettare le relazioni

      $$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = 180°.$$

    - Supponiamo wlog di scegliere $++-$. Allora dalle stesse relazioni di sopra ricaviamo (come?) che $\gamma' = 90° + \alpha' + \beta'$, cosa non possibile essendo questo maggiore di $90°$.
    - Resta wlog l'opzione $+--$ da cui con i soliti conti (ma quali?) otteniamo che $\alpha' = 45°$ e $\alpha = 135°$. Questo è necessariamente il maggiore dei sei angoli in gioco (perchè?).

      Opportuni esempi (che però vanno fatti) mostrano che sugli altri angoli c'è maggiore libertà, ed in particolare il minore dei sei angoli non è univocamente determinato.

12. La soluzione segue dai seguenti fatti.

   - Utilizzando le notazioni standard osserviamo che
   $$\angle B'A'H = \angle ABH = 90° - \alpha = \angle ACH = \angle C'A'H,$$
   in cui le due uguaglianze laterali seguono dalle proprietà dell'inversione (quali proprietà?) e le due centrali dalle proprietà delle altezze (quali proprietà?). Valgono ovviamente anche le uguaglianze cicliche (che vuol dire?), e questo permette di concludere che H è l'incentro di $A'B'C'$.
   - L'altezza AH va a finire nella bisettrice $A'H$ (ma siamo sicuri?). Il lato BC va a finire nella circonferenza circoscritta a $B'C'H$ (perché?), ed essendo H l'incentro è ben noto (a chi?) che tale circonferenza passa anche per l'ex-centro opposto ad A', che sarà quindi l'intersezione con la bisettrice. Ma allora il piede dell'altezza uscente da A va a finire proprio nell'ex-centro opposto ad A' (perché?).
   - La circonferenza che passa per i punti medi dei lati di ABC è la circonferenza di Feuerbach di ABC (cos'è questa roba?) e passa anche per i piedi delle altezze di ABC. Pertanto tale circonferenza va a finire in quella che passa per gli ex-centri di $A'B'C'$, che non è mai la circonferenza di Feuerbach di $A'B'C'$ (anzi è ben noto, non si sa a chi, che il raggio della circonferenza per gli ex-centri è sempre il doppio del raggio della circonferenza circoscritta, e quindi 4 volte il raggio della circonferenza di Feuerbach).

13. I fattori primi che compaiono nella scomposizione di 30! sono 10 (e chi sarebbero?). Ciascuno di questi deve scegliere se andare nel numeratore o nel denominatore (in che senso?). Ci sono quindi 2^{10} possibilità (per cosa?), delle quali metà producono numeri razionali maggiori di 1 e metà numeri razionali in $(0, 1)$ (perché?).

   Quindi in conclusione $M = 2^9 = 512$.

14. Sostituendo bovinamente la prima equazione nella seconda si ottiene l'equazione di secondo grado
   $$(3a + b)x^2 - a(3a + b)x + (a^3 - 2c) = 0.$$
   Dalla prima equazione si vede che due soluzioni hanno x diverso se e solo se hanno y diverso (giusto?). Quindi l'unico modo affinché il sistema abbia almeno 3 soluzioni distinte è che l'equazione di secondo grado abbia almeno 3 soluzioni distinte (è chiaro questo passaggio?), il che accade se e solo se tutti i coefficienti sono nulli (perché?). A sua volta questo accade se e solo se
   $$\begin{cases} a^3 = 2c, \\ 3a + b = 0. \end{cases}$$
   A questo punto è chiaro che il sistema iniziale avrà infinite soluzioni distinte (perché? quali sono le soluzioni?). Inoltre, ragionando sul sistema in (a, b, c) e tenendo conto che ora le variabili sono interi, si ottiene (come?) che

   - b e c non possono avere lo stesso segno,
   - a è pari,
   - c è multiplo di 4,
   - b è multiplo di 6.

In particolare bc è divisibile per 24 e ac è divisibile per 8. Al contrario, non è detto che b sia multiplo di c, ma per esserne sicuri bisogna esibire esplicitamente una terna (a, b, c) che risolve il sistema e non ha questa proprietà.

15. Le soluzioni dell'equazione sono $(79, -76)$ e $(3, -6)$.

    Ponendo $a = m - 3$ possiamo riscrivere l'equazione nella forma

    $$p(a - 78p) = a^3,$$

    da cui si deduce (come?) che a è multiplo di p. Posto quindi $a = px$, con facili passaggi scopriamo che deve essere

    $$x - 78 = px^3.$$

    A questo punto è abbastanza chiaro che x non può essere positivo (perché?), il che suggerisce di porre $x = -y$ (con $y \geq 0$) e riscrivere il tutto nella forma

    $$y + 78 = py^3.$$

    Ora non resta che osservare che i valori $y \geq 4$ non vanno bene (questo è un punto delicato e va dimostrato per bene), quindi ci basta provare i casi $y = 1$ (che produce la prima soluzione), $y = 2$ (che non produce soluzioni accettabili), e $y = 3$ (che produce la seconda soluzione).

16. Nessuno dei p_k è multiplo di 7, e questa è l'unica loro proprietà che è rilevante in questo esercizio. Ne segue che $p_k^6 \equiv 1$ modulo 7 (e perché?). Ma allora avremo che (ma si fanno queste cose? sono passaggi folli o sensati?)

    $$\sum_{k=1}^{2015} \frac{1}{p_k^6 + 1} \equiv \frac{2015}{2} \equiv 2015 \cdot 4 \equiv 3 \pmod 7,$$

    da cui $a \equiv 3b$ modulo 7 e quindi (e qui ogni passaggio necessita di esegesi)

    $$c = a^5 b \equiv 3^5 b^6 \equiv 3^5 \equiv \frac{1}{3} \equiv 5 \pmod 7.$$

    A questo punto concludiamo che (ma ancora serve parecchia esegesi)

    $$16^c = 16^{5+7k} = 2^{20+28k} \equiv 2^{20} \equiv 32^4 \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 23 \pmod{29}.$$

Test Finale – Risposte

1. $-2015/2016$
2. 2
3. 2700
4. 6
5. 1
6. $2/\sqrt{5}$
7. 8
8. 0
9. ...
10. 3721
11. ...
12. Solo $p = 7$

Test Finale – "Aiutini"

1. Dalle relazioni tra radici e coefficienti otteniamo (come?) che
$$a_n b_n c_n = -\frac{1}{n(n+1)},$$
da cui
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = -\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n}{n+1}.$$
La formula chiusa per la sommatoria è un classico esercizio sull'induzione.

2. Applicando la teoria generale (ma esiste? anche se c'è la n al rhs?) otteniamo la formula chiusa $x_n = 2^n - n - 1$, da cui
$$x_{2015} \equiv 2^{2015} - 2016 \equiv 2^3 - 6 \equiv 2 \pmod{10}.$$

3. Tutti gli anagrammi sono (perché?)

$$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 7! = 5040.$$

Quelli che contengono *almeno* una sequenza ST sono tanti quanti gli anagrammi di XAGISTI (che parola è questa?), dunque

$$\frac{7!}{2!} = 2520.$$

Quelli che contengono due sequenze ST sono tanti quanti gli anagrammi di XXAGII (delirio?), quindi

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!} = 180.$$

Per inclusione-esclusione (ci mancava solo questo!) il numero richiesto è quindi

$$5040 - 2520 + 180 = 2700.$$

4. Per ragioni di parità (e cosa sarebbero?) la formica dopo 7 mosse può trovarsi solo in un vertice adiacente a quello di partenza (ma allora potrebbe tornare indietro percorrendo un solo lato), oppure nel vertice opposto.

   Una volta capito che termina nel vertice opposto si vede abbastanza bene che ci sono solo 6 possibilità (3 per la prima mossa, 2 per la seconda, poi tutte le scelte successive sono obbligate).

5. Il punto chiave è capire che il circocentro O di $XYZW$ è necessariamente il punto medio dell'ipotenusa (perché?). A quel punto la ciclicità diventa equivalente all'uguaglianza $OX = OW$ (perché solo due?). Tali segmenti si calcolano facilmente (ma davvero?) in funzione dei lati, ottenendo in notazioni standard l'equazione

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(c + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2.$$

   Svolgendo i calcoli e utilizzando dove possibile la relazione $a^2 = b^2 + c^2$ si arriva a concludere che $b = c$.

6. In notazioni standard si ha che (da dove arrivano questi conti?)

$$\angle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2},$$

   da cui

$$\sin(\angle AIB) = \sin\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}.$$

   Ora dall'ipotesi segue che

$$\frac{3}{5} = \cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1,$$

   da cui si ricava facilmente (univocamente? ma non ci sono problemi di segno?) $\cos(\gamma/2)$.

7. Ragionando modulo 9 otteniamo che

$$245A - 372 \equiv 0 \iff 2A \equiv 3 \iff A \equiv 6.$$

   Per il noto criterio di divisibilità questo accade se e solo se la somma delle cifre di A è congrua a 6 modulo 9, il che accade se e solo se $a = 8$.

8. Se ci fossero soluzioni vorrebbe dire che la congruenza $n^{2015} \equiv 13$ modulo 25 ha soluzione (ma siamo sicuri?). Ma allora elevando tutto alla quarta si otterrebbe (come?) che

$$1 \equiv n^{60} \equiv 13^4 \equiv 169^2 \equiv 19^2 \equiv 11 \not\equiv 1 \pmod{25}.$$

Come fa uno a farsi venire in mente di tirare fuori il 25 e la potenza quarta?

9. Da AM–GM segue che

$$a - \sqrt{bc} \geq a - \left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{2a-(b+c)}{2}.$$

Pertanto (che tipo di implicazione c'è sotto?) la tesi è dimostrata se riusciamo a mostrare che

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2a-(b+c)}{a+2(b+c)} \geq 0.$$

Indicando con S la somma dei tre numeri, e rinormalizzando tutto (cosa vuol dire?) in modo che $S = 1$ (ma si possono fare queste cose?), possiamo riscrivere l'ultima disuguaglianza nella forma

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{3a-1}{2-a} \geq 0$$

con il vincolo che $a + b + c = 1$. Si aprono ora almeno tre strade.

- Dimostrare che la funzione $f(x) = (3x-1)/(2-x)$ è convessa in $(0,1)$ (basta fare la derivata e notare che è crescente) e concludere applicando Jensen (ma siamo sicuri?).
- Fare un cambio di variabili chiamando x, y e z i tre denominatori. Con semplici calcoli (che però vanno fatti) si ottiene che il vincolo diventa $x + y + x = 5$ e la disuguaglianza diventa

$$5 \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x} \geq 9,$$

che è banalmente vera per HM–AM.
- Osservare che le due terne

$$(3a-1, 3b-1, 3c-1), \qquad \left(\frac{1}{2-a}, \frac{1}{2-b}, \frac{1}{2-c}\right)$$

sono ordinate nello stesso verso (cosa? perché?) e dedurne (come?) che

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{3a-1}{2-a} \geq \frac{1}{3}\left(3(a+b+c)-3\right)\left(\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c}\right) = 0.$$

10. La soluzione segue da due osservazioni.

- Consideriamo l'insieme

$$\left\{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c : 0 \leq b \leq 60,\ 0 \leq c \leq 60,\ a+b+c = 120\right\}$$

e osserviamo che i suoi elementi

- sono tutti divisori di 60^{60} (perchè?),
- non sono l'uno multiplo dell'altro (perchè?),
- sono in tutto 61^2, perché possiamo sempre fissare b e c a piacimento e trovarci a di conseguenza (e allora?).

Questo mostra che almeno 61^2 stagisti potranno mangiare a mensa.

- Consideriamo ora un insieme con più di 61^2 elementi. Almeno due avranno esponenti b e c uguali (perché?), quindi saranno necessariamente l'uno multiplo dell'altro. Questo mostra che 61^2 è il massimo numero possibile.

Quali proprietà di 60^{60} sono state essenziali in questi passaggi?

11. Indichiamo con P l'intersezione tra AB e CD, ed indichiamo con Q l'intersezione tra AD e BC (certamente bisognerà fare qualcosa nel caso in cui ci siano dei parallelismi). Per ragioni di potenza (di cosa si tratta?) avremo che $PM = PK$, e quindi KM è perpendicolare alla bisettrice di $\angle APD$. Per motivi analoghi (ma comunque da precisare) LN è perpendicolare alla bisettrice di $\angle AQB$. Non resta quindi che dimostrare che le bisettrici sono perpendicolari (basta davvero?), cosa che si può ottenere per angle chasing (angle che?) nel quadrilatero che formano con due lati qualunque del quadrilatero.

12. È abbastanza evidente (ma davvero?) che x e y (se pensati positivi) devono essere compresi tra 0 e p. Dal momento che x^2 e y^2 hanno la stessa classe modulo p, essi saranno per forza del tipo $x = \alpha$ e $y = p - \alpha$ (che storia è questa?). Sostituendo nel sistema, con facili (forse) passaggi algebrici si scopre che $\alpha = (p + 1)/4$. Ora non resta che sostituire nella prima equazione e trovare p.