Stage Senior Pisa 2016 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} x^4yz = 1, \\ x(x+2y)(x+3z) = a, \end{cases}$$
in cui a rappresenta un parametro reale.
Allora esiste un'unica terna (x, y, z) di numeri reali positivi che risolve il sistema ...

   (A) per nessun valore di a **(B)** per ogni $a > 0$

   (C) se e solo se $a \geq 12$ **(D)** per un unico valore di a, e questo verifica $a^{99} \in \mathbb{N}$

   (E) per un unico valore di a, e questo verifica $a^{100} \in \mathbb{N}$

2. Consideriamo le seguenti tre disuguaglianze:
   - disuguaglianza 1: $(xy + 2yz + 3zx)^2 \leq C(x^2 + y^2 + z^2)(x + 2y + z)^2$,
   - disuguaglianza 2: $(xy + 2yz + 3zx)^2 \leq C(x^2 + y^2 + z^2)(x + 2y + z)^4$,
   - disuguaglianza 3: $(xy + 2yz + 3zx)^2 \geq Cxyz(x + 2y + z)$.

   Determinare per quale o quali di esse esiste almeno un numero reale $C > 0$ che la rende vera per ogni terna (x, y, z) di numeri reali positivi.

   (A) Solo la prima **(B)** Solo la seconda **(C)** Solo la terza

   (D) Tutte tranne la seconda **(E)** Tutte

3. Nelle risposte sono presentate 5 equazioni funzionali. Lo scopo è trovare funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ che le soddisfano per ogni coppia (x, y) di numeri razionali. Non è difficile verificare che tutte le equazioni proposte ammettono almeno una soluzione affine, cioè una soluzione del tipo $f(x) = ax + b$ per un'opportuna scelta dei numeri razionali a e b.

   Determinare quale equazione ammette almeno una soluzione *non affine*.

   (A) $xf(x + y) = (x + y)f(x)$ **(B)** $f(x)f(x + y) = 4x(x + y)$

   (C) $f(x + y) = f(f(x)) + f(f(y))$ **(D)** $f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$

   (E) $f(x + f(y)) = xf(y)$

4. Siano a, b, c le tre soluzioni reali dell'equazione $x^3 = 3x^2 - 1$.

   Determinare $a^4 + b^4 + c^4$.

   (A) 64 **(B)** 69 **(C)** 72 **(D)** 78 **(E)** 81

5. Sia P_n il numero delle parole di n lettere che si possono comporre usando solo le lettere `I`, `M`, `O` e facendo in modo che non vi siano mai due vocali consecutive.

   Determinare quale resto si ottiene dividendo P_{2016} per 31.

   (A) 11 **(B)** 15 **(C)** 19 **(D)** 23 **(E)** 27

6. Sia X l'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, 200\}$. Per ogni sottoinsieme S di X con esattamente 100 elementi, definiamo $f(S)$ come il prodotto tra la somma degli elementi di S e la somma degli elementi di X che non stanno in S. Si può dimostrare che il valor medio di $f(S)$, al variare di S tra tutti i sottoinsiemi di X con esattamente 100 elementi, è un numero intero M.

   Determinare quale dei seguenti primi *non* divide M.

   (A) 5 **(B)** 7 **(C)** 11 **(D)** 43 **(E)** 67

7. Ad una festa partecipano 2016 coppie, tra cui come sempre quella classica composta da Alberto e Barbara. Durante la festa alcune persone si stringono la mano. Ovviamente due stesse persone si stringono la mano al più una volta, e nessuno stringe la mano al proprio partner (o a se stesso). Al termine della festa, Alberto chiede a tutti gli altri quante mani hanno strinto (noto toscanismo), ricevendo 4031 risposte diverse.

   Determinare quale delle seguenti conclusioni è sicuramente vera.

   (A) Alberto ha stretto più mani di Barbara

   (B) Il partner di chi ha stretto 2000 mani ne ha strette 2032

   (C) In ogni altra coppia, esattamente un componente ha stretto la mano a Barbara

   (D) Alberto non ha stretto mani **(E)** Barbara ha stretto 4030 mani

8. Alberto e Barbara, reduci dalla festa precedente, si dedicano al loro passatempo preferito, basato su due pile di gettoni. Ad ogni turno ogni giocatore sceglie una pila, dalla quale preleva 1 o 2 gettoni a sua scelta, posto ovviamente che la pila contenga ancora quei gettoni. Inizia Alberto e *perde chi è costretto a prelevare l'ultimo gettone*.

   Determinare per quale dei seguenti valori del numero iniziale di gettoni nelle due pile si ha che Barbara possiede una strategia vincente.

   (A) $(2016, 2016)$ **(B)** $(2017, 2017)$ **(C)** $(2017, 2017^2)$ **(D)** $(2018, 2018)$

   (E) $(2018, 2018^2)$

9. Sia $ABCD$ un quadrato, sia E un punto sul lato CD, e siano F e G i due punti esterni ad $ABCD$ e tali che $CEFG$ risulta un quadrato. La circonferenza circoscritta ad AFC interseca nuovamente il lato BC nel punto H.

   Sapendo che $AB = 6102$ e $CE = 2016$, determinare la lunghezza di CH.

   (A) 3056 **(B)** $\sqrt{2016 \cdot 6102}$ **(C)** 4032 **(D)** 4059 **(E)** 4086

10. Tre amici hanno disegnato tre circonferenze distinte con lo stesso raggio che passano per uno stesso punto P, ed hanno indicato con A, B, C i loro ulteriori punti di intersezione. Fatto questo,

    - Alberto afferma: "P è l'ortocentro di ABC",
    - Barbara afferma: "i lati di ABC sono paralleli alle rette che congiungono i centri delle circonferenze",
    - Cristina afferma: "la circonferenza circoscritta ad ABC ha lo stesso raggio delle altre tre circonferenze",
    - Dario afferma: "P è il circocentro del triangolo formato dai centri delle 3 circonferenze".

    Chi ha sicuramente ragione?

    (A) Solo Alberto e Barbara **(B)** Solo Cristina e Dario **(C)** Tutti tranne Cristina

    (D) Solo Dario **(E)** Tutti

11. Sia ABC un triangolo, sia ω_b la circonferenza per B e tangente ad AC in A, e sia ω_c la circonferenza per C e tangente ad AB in A. Sia D l'ulteriore intersezione tra ω_b e ω_c, sia E il simmetrico di A rispetto a B, e sia F il simmetrico di C rispetto ad A.

    Esaminando questa configurazione,

    - Alberto afferma: "se invertiamo in A, l'immagine di ω_b sarà una retta parallela ad AC",
    - Barbara afferma: "con quella stessa inversione, l'immagine di B sarà il punto medio tra A e l'immagine di E",
    - Cristina afferma: "il quadrilatero $ADEF$ è ciclico".

    Chi ha sicuramente ragione?

    (A) Nessuno **(B)** Solo Alberto **(C)** Tutti tranne Barbara

    (D) Tutti tranne Cristina **(E)** Tutti

12. Sia $ABCD$ un quadrilatero. Costruiamo su ogni lato un quadrato, esternamente rispetto al quadrilatero originario. I centri dei quattro quadrati sono i vertici di un nuovo quadrilatero, che indichiamo con $A'B'C'D'$.

    Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

    (A) $A'B'C'D'$ è ciclico qualunque sia il quadrilatero iniziale $ABCD$

    (B) $A'C' = B'D'$ qualunque sia il quadrilatero iniziale $ABCD$

    (C) Se $A'B'C'D'$ è un parallelogramma, allora è anche un quadrato

    (D) $A'C'$ è perpendicolare a $B'D'$ qualunque sia il quadrilatero iniziale $ABCD$

    (E) Se $A'B'C'D'$ è un quadrato, allora $ABCD$ è un parallelogramma

13. Consideriamo gli insiemi $T = \{1, 2, \ldots, 11\}$ ed

    $$S = \left\{(a, b, c, d) \in T^4 : ab^2 + c^3d^4 + 5 \text{ è multiplo di } 11\right\}.$$

    Determinare quanti sono gli elementi dell'insieme S.

    (A) $10 \cdot 11 \cdot 12$ **(B)** 11^3 **(C)** $10 \cdot 11^2$ **(D)** $5 \cdot 11^2$ **(E)** $10^2 \cdot 11$

14. Gli interi a_1, a_3, a_5, $\ldots$, a_{19} sono stati definiti ponendo $a_1 = 1$ e poi, per ricorrenza,

    $$a_{2n+1} = (2n+1)^{a_{2n-1}} \qquad \forall n = 1, \ldots, 9.$$

    Determinare quale resto si ottiene dividendo a_{19} per 100.

    (A) 19 **(B)** 39 **(C)** 59 **(D)** 79 **(E)** 99

15. Determinare il più grande intero k per cui 2017^k divide

    $$2016^{2017^{2018}} + 2018^{2017^{2016}} + 2017^{2016^{2018}}.$$

    (A) 2016 **(B)** 2017 **(C)** 2018 **(D)** 2017^{2016} **(E)** 2016^{2018}

16. Determinare per *quanti* valori interi di a il numero $2a^2+27a+91$ risulta un quadrato perfetto.

    (A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** Infiniti

Stage Senior Pisa 2016 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi, di grado 2016, tale che $p(1) = 3$, $p(3) = 1$ e $p(10) > 0$.

   Determinare quanto vale, come minimo, $p(10)$.

2. Una successione a_n di numeri razionali è definita ponendo $a_2 = 22$, $a_3 = 333$, e poi per ricorrenza
$$a_{n+2} = \frac{a_n^2}{a_{n+1}} \qquad \forall n \geq 2.$$

   Determinare il più piccolo intero positivo n per cui a_n, scritto come frazione irriducibile, ha il numeratore divisibile per 2^{2016}.

3. Un'urna contiene 10 lettere, e più precisamente le 5 lettere S, T, A, G, I, ciascuna ripetuta 2 volte. Supponiamo di estrarre 8 lettere a caso dall'urna, senza reinserire di volta in volta le lettere già estratte.

   Determinare la probabilità che le lettere così estratte, eventualmente riordinate, permettano di comporre la parola "STAGISTI".

4. Sulla lavagna è scritta la coppia di numeri interi $(22, 333)$. Ad ogni passaggio possiamo sostituire la coppia (x, y) presente sulla lavagna con una a scelta tra le seguenti coppie:
$$(x + y, y), \qquad (x - y, y), \qquad (y, x).$$

   Determinare il più piccolo numero *dispari* $d > 2016$ per cui non si potrà mai arrivare a scrivere la coppia $(2016, d)$.

5. Sia ABC un triangolo con $AB = 13$, $BC = 14$ e $CA = 15$. Siano D, E, F i punti medi dei lati BC, CA, AB. Sia P l'ulteriore intersezione tra le circonferenze circoscritte ai triangoli ECD e FDB.

   Determinare $PA + PB + PC$.

6. Sia ABC un triangolo acutangolo in cui l'ampiezza dell'angolo in A è di 45°. La circonferenza di diametro BC interseca il lato AB in D ed il lato AC in E.

   Determinare quanto vale, al massimo, il rapporto tra l'area del triangolo ABC e l'area del triangolo ADE.

7. Determinare il più grande intero positivo n per cui $n + 3$ divide $n^4 + 2016$.

8. Consideriamo il numero
$$S = \sum_{k=0}^{1000} k^{2016}.$$

   Determinare quale resto si ottiene dividendo S per 11.

Problemi dimostrativi

9. Siano a, b, c, d numeri reali positivi tali che $a^2+b^2+c^2+d^2=4$.

   Dimostrare che
   $$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}\geq 4.$$

10. Il test finale di uno stage Senior comprendeva, come sempre, 8 problemi facili e 4 problemi medi. Caso strano, tutti hanno risolto esattamente 11 dei 12 problemi.

    Al termine della correzione, gli organizzatori hanno scritto, per ogni coppia costituita da un problema facile ed uno medio, il numero di studenti che hanno risolto entrambi. La somma dei 32 numeri scritti è risultata essere 256.

    Determinare quanti studenti hanno partecipato al test finale.

11. Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo con angoli retti in A e D e base minore AB. Sia E l'intersezione delle rette AD e BC, sia F il simmetrico di A rispetto a D, e sia M il punto medio di EF.

    Supponiamo che CM sia perpendicolare a BF.

    Dimostrare che CF è perpendicolare a CE.

12. Determinare tutti gli interi positivi a con questa proprietà: comunque si scelga un intero positivo n, il numero $n(a+n)$ non è un quadrato perfetto.

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E	D	D	B	D	C	C	D	E	E	C	A	A	C	B	E

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Per AM–GM (applicata come? a cosa?) si ha che

$$x(x+2y)(x+3z) \geq x \cdot 2\sqrt{2xy} \cdot 2\sqrt{3xz} = 4\sqrt{6} \cdot x\sqrt{x^2yz} = 4\sqrt{6}.$$

   A questo punto si può verificare che

   - per $a < 4\sqrt{6}$ il sistema non ha soluzione,
   - per $a = 4\sqrt{6}$ si deve avere $x = 2y$ e $x = 3z$ (e perché mai?) il che, unito al vincolo sul prodotto, determina univocamente x, y e z (come?),
   - per $a > 4\sqrt{6}$ il sistema ha più di una soluzione (questo andrebbe verificato per bene: ad esempio si può porre $x = 1$ e vedere che si ottiene un sistema di secondo grado in y e z con due soluzioni).

2. La soluzione segue dalle seguenti considerazioni.

   - La prima disuguaglianza segue (come?) dalle due disuguaglianze standard

$$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2, \qquad 3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2.$$

   - La seconda disuguaglianza è falsa per $x = y = z = \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ piccolo. Il punto fondamentale è che il rhs è omogeneo con un ordine maggiore del lhs (cosa vuol dire?).
   - La terza disuguaglianza segue (come?) dalla disuguaglianza

$$(xy + yz + zx)^2 \geq kxyz(x + y + z)^2,$$

     la quale, per un opportuno valore di k, si dimostra per bunching (cosa?).

3. La soluzione segue da una serie di fatti.

   - Ponendo $x = 1$ nella prima equazione troviamo $f(y + 1) = f(1) \cdot (y + 1)$, da cui si deduce facilmente (come?) che f è una funzione affine.
   - Ponendo $y = 0$ nella seconda equazione otteniamo $[f(x)]^2 = 4x^2$, da cui $f(x) = \pm 2x$.
     Achtung! Per quanto ne sappiamo potrebbe esserci il segno positivo per alcuni valori di x ed il segno negativo per altri valori di x. Tuttavia tali "mistoni" si riescono ad escludere (come? cosa ci sarebbe di male se $f(a) = 2a$ e $f(b) = -2b$?). Esclusi i mistoni, le soluzioni restanti sono affini.

- Ponendo $x = 0$ nella terza equazione otteniamo che $f(f(y)) = f(y) - k$ per un opportuno valore di k. Ponendo $y = 0$ troviamo una relazione simile per $f(f(x))$. Sostituendo queste due relazioni nel rhs dell'equazione otteniamo che

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2k.$$

  Togliendo $2k$ da entrambe le parti arriviamo ad una equazione di Cauchy per un'altra funzione (come? quale funzione? cosa vuol dire?), che sui razionali ha solo soluzioni affini (e allora?)

- La quarta equazione ha tra le sue soluzioni anche la parte intera di x.
- Ponendo $y = 0$ nella quinta equazione si ottiene (al solito modo, ma quale?) che la soluzione è necessariamente affine.

4. Osserviamo che (cosa vuol dire questa roba?)

$$x^4 \equiv 9x^2 - x - 3 \pmod{x^3 - 3x^2 + 1},$$

   e quindi (perché?)

$$a^4 + b^4 + c^4 = 9(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) - 9.$$

   Ora la somma delle radici e la somma dei loro quadrati si ricavano agevolmente con le relazioni tra i coefficienti e le radici (e cosa sarebbero?).

5. Il punto fondamentale è che vale la relazione

$$P_{n+2} = P_{n+1} + 2P_n.$$

   La giustificazione di questa relazione si basa (come?) su due considerazioni.

   - Se una parola di $n + 2$ lettere finisce con `M`, allora eliminata quella lettera ciò che resta è una *qualunque* parola di $n + 1$ lettere.
   - Se una parola di $n+2$ lettere finisce con vocale, allora la lettera precedente è sicuramente una `M`, ed eliminate le ultime due lettere ciò che resta è una *qualunque* parola di n lettere.

   Tenendo conto che $P_1 = 3$ e $P_2 = 5$ si ottiene (da cosa?) la formula esplicita

$$P_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{4} \cdot (-1)^n,$$

   e quindi (e qui ogni passaggio va decifrato e interpretato)

$$P_{2016} = \frac{2^{2018} - 1}{3} = \frac{2^{2015} \cdot 2^3 - 1}{3} \equiv \frac{7}{3} \equiv 7 \cdot 21 \equiv 23 \pmod{31}.$$

   Piccola variante: per ottenere la formula ricorsiva si può anche usare la tecnica *divide et impera*, e cioè suddividere le parole in quelle C_n che terminano per consonante e quelle V_n che terminano per vocale, e scrivere poi come C_{n+1} e V_{n+1} dipendono da C_n e V_n (ok, questo è il momento di farlo). Alla fine, considerato che $P_n = C_n + V_n$, si deve ovviamente ottenere la stessa formula.

6. Per semplicità, risolviamo il problema nel caso generale, sostituendo 100 con n, e 200 con $2n$ (ma è una buona idea studiare un problema più generale?). Allora

$$M = \binom{2n}{n}^{-1} \sum_S (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) = \binom{2n}{n}^{-1} \sum a_i a_j,$$

dove l'ultima sommatoria si intende estesa a tutte le coppie di indici diversi in X, per cui in pratica ogni prodotto compare due volte a fattori scambiati.

Ora parte un *double counting* (che mostro è?). Quante volte compare un certo termine $a_i a_j$, intendendo che a_i proviene da S e a_j dal complementare? Compare $\binom{2n-2}{n-1}$ volte, in quanto devo scegliere gli $n-1$ compagni di i in S tra i $2n-2$ elementi che rimangono in X dopo aver tolto a_i e a_j. Ne segue che

$$M = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \sum a_i a_j = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{2n} i \right)^2 - \sum_{i=1}^{2n} i^2 \right\}.$$

Ora non resta che sostituire le note formule (quali? note a chi?) e semplificare per ottenere

$$M = \frac{n^2(2n+1)(3n+1)}{6},$$

da cui per $n = 100$ si ottiene

$$M = \frac{100^2 \cdot 201 \cdot 301}{6} = 50 \cdot 100 \cdot 67 \cdot 7 \cdot 43.$$

7. Trattiamo direttamente il caso generale con n coppie. Si tratta di capire che la situazione è molto rigida, nel senso che ogni configurazione che rispetta le condizioni si ottiene in questo modo: numeriamo le coppie (A_1, B_1), (A_2, B_2), $\ldots$, (A_n, B_n), ovviamente con $A_1 =$ Alberto e $B_1 =$ Barbara. Allora in ogni coppia (A_i, B_i) con $i \geq 2$ c'è uno che stringe la mano a tutti i componenti delle coppie precedenti ed uno che non la stringe a nessuno dei componenti delle coppie precedenti.

   Per dimostrarlo si può procedere per induzione. I casi con $n = 1$ oppure $n = 2$ si fanno a mano. Consideriamo ora la persona che ha strinto più mani. Non può trattarsi di Barbara (perché?). Inoltre il partner di questa persona non può aver stretto mani (perché?). Se ora eliminiamo questa coppia ci ritroviamo nuovamente nelle ipotesi del problema (verificare!), solo con una coppia in meno.

8. Le configurazioni perdenti per il primo giocatore sono tutte e sole quelle in cui la somma S dei gettoni nelle due pile è congrua ad 1 modulo 3. Questo segue (come?) da due considerazioni.

   - Chi trova $S \equiv 1$ modulo 3 è costretto a lasciare $S \not\equiv 1$ modulo 3.
   - Chi trova $S \not\equiv 1$ modulo 3 può muovere in modo da lasciare $S \equiv 1$ modulo 3. Infatti se $S \equiv 0$, allora c'è almeno una pila con almeno due gettoni toglibili (perché? e allora?); se $S \equiv 2$, allora c'è almeno una pila con un gettone toglibile.

   E allora, procedendo di questo passo, dove arriva la partita?

9. La risposta è la differenza tra le due misure date. Per dimostrarlo, basta osservare che il centro della circonferenza circoscritta ad AFC è il punto medio di AF (perché?), la cui "ordinata" si calcola facilmente (come?). La proiezione di questo centro sul lato BC è il punto medio di HC (e allora?).

10. La figura è piena di parallelismi, perpendicolarità, rombi, parallelogrammi! Indichiamo con O_1, O_2, O_3 i centri delle tre circonferenze.

    - La retta BP è l'asse di O_1O_3 (perché?). Ciclando il discorso (che vuol dire?) si verifica che Dario ha ragione.
    - Sfruttando opportuni rombi (quali?) si ottiene che AO_1, PO_2, CO_3 sono uguali e paralleli. Se ne deduce (come?) che O_1ACO_3 è un parallelogrammo, ed in particolare O_1O_3 è parallelo ad AC, il che dà ragione a Barbara (forse bisogna ciclare anche qui).
    - Dal momento che O_1O_3 è perpendicolare a BP, deduciamo (come?) che BP è perpendicolare pure ad AC. Ripetendo il discorso sugli altri vertici/lati, deduciamo (come?) che Alberto ha ragione.
    - Sia O il simmetrico di O_3 rispetto a BC. Allora OB è uguale e parallelo a O_3C, il quale è uguale e parallelo a O_1A. Ne segue che il quadrilatero AO_1BO è un parallelogrammo con tre lati uguali, dunque un rombo. Questo mostra (come?) che O è il circocentro di ABC e dà ragione a Cristina.

11. Invertendo in A si hanno i seguenti fatti:

    - l'immagine di ω_b è una retta parallela ad AC (cosa?), e l'immagine di ω_c è una retta parallela ad AB,
    - il quadrilatero $AC'D'B'$ risulta un parallelogrammo (e perché mai?),
    - il punto E' è il punto medio di AB' (non viceversa, come sostenuto da Barbara), mentre F' è il simmetrico di C' rispetto ad A,
    - F', E', D' sono allineati per il Teorema di Talete (applicato come?), e questo allineamento è equivalente alla ciclicità di $AFED$ (per quale motivo?).

12. Numeri complessi! Indichiamo con a, b, c, d i numeri complessi corrispondenti ai vertici, e poniamo $\omega = (1+i)/2$.

    - Con facili calcoli (quali?) si ottiene che $A' = a + (b-a)\omega$ e cicliche (ma cosa vuol dire?), da cui
    $$A'C' = (c-a) + (a+d-b-c)\omega, \qquad B'D' = (d-b) + (a+b-c-d)\omega.$$
    - Si verifica ora abbastanza facilmente (fare la verifica!) che $A'C' = i \cdot B'D'$, da cui segue (come?) che $A'C'$ è perpendicolare ed uguale a $B'D'$.
    - Il quadrilatero $A'B'C'D'$ ha le diagonali uguali e perpendicolari, dunque è un quadrato appena è un parallelogrammo.
    - Per caratterizzare i casi in cui $A'B'C'D'$ è un parallelogrammo, imponiamo la condizione $A'B' = C'D'$ (ma basta questa?). Svolgendo i calcoli, troviamo che deve valere la relazione $a - d = b - c$, la quale è equivalente (come mai?) a dire che $ABCD$ è a sua volta un parallelogrammo.

- Resta da mostrare che $A'B'C'D'$ non è necessariamente ciclico. Per questo basta pensare al caso in cui $ABCD$ è un trapezio isoscele con base AB, lati obliqui uguali alla base minore, ed altezza piccolissima (o al limite nulla). In tal caso i centri dei quadrati costruiti sui lati obliqui e la base minore saranno sostanzialmente allineati tra di loro, ma non allineati con il restante centro (e quindi?).

13. Distinguiamo tre casi.

    - Se $b \not\equiv 0 \pmod{11}$, allora dati (b, c, d) possiamo sempre trovare a (e perché?). Quindi questo caso produce (come?) $10 \cdot 11 \cdot 11$ elementi di S.
    - Se $b \equiv 0 \pmod{11}$ e $d \not\equiv 0 \pmod{11}$, allora dati (a, b, d) possiamo sempre trovare c (e perché? non dà fastidio il cubo?). Questo caso produce $11 \cdot 1 \cdot 10$ elementi di S (da cosa arrivano i tre fattori?).
    - Se $b \equiv 0 \pmod{11}$ e $d \equiv 0 \pmod{11}$, allora non c'è niente da fare (in che senso?).

    Sommando gli elementi ottenuti nei primi due casi si ha la risposta.

14. Dobbiamo determinare la classe di congruenza di $a_{19} = 19^{a_{17}}$ modulo 100, la quale dipende dalle classi modulo 4 e modulo 25 (cosa ci sta qui sotto?). Modulo 4 abbiamo -1 con esponente dispari (cosa?), quindi

    $$a_{19} \equiv 3 \pmod{4}.$$

    Ora 19 ha ordine 2 modulo 5 (e perché?), e quindi avrà ordine 2 o 10 modulo 25 (da dove arrivano tutti questi discorsi?), ed il 2 si scarta subito (come?). Serve dunque la classe di $a_{17} = 15^{a_{15}}$ modulo 10, e questa si vede subito (come?) che dipende dalla classe di $a_{15} = 15^{a_{13}}$ modulo 4. Ancora una volta abbiamo -1 con esponente dispari, quindi $a_{15} \equiv 3$ modulo 4 e di conseguenza $a_{17} \equiv 3$ modulo 10 (uhm ...), e infine

    $$a_{19} \equiv 19^3 \equiv (-6)^3 \equiv 9 \pmod{25}.$$

    Tenendo conto della congruenza modulo 4 e modulo 25 concludiamo che $a_{19} \equiv 59$ modulo 100.

15. L'osservazione fondamentale è che 2017 è un numero primo. Scriviamo ora il numero in questione come

    $$\left(2016^{2017^{2018}} + 1\right) + \left(2018^{2017^{2016}} - 1\right) + 2017^{2016^{2018}}.$$

    Indaghiamo ora la valutazione 2017-adica (che mostro è?) dei tre termini.

    Per LTE (cos'è quest'altro mostro? ma quali ipotesi bisogna verificare?) si ha che

    $$v_{2017}\left(2016^{2017^{2018}} + 1\right) = v_{2017}(2016 + 1) + v_{2017}\left(2017^{2018}\right) = 1 + 2018 = 2019,$$

    $$v_{2017}\left(2018^{2017^{2016}} - 1\right) = v_{2017}(2018 - 1) + v_{2017}\left(2017^{2016}\right) = 1 + 2016 = 2017,$$

    mentre ovviamente (si fa per dire ...)

    $$v_{2017}\left(2017^{2016^{2018}}\right) = 2016^{2018}.$$

    Quindi (perché?) la massima potenza è 2017.

16. Riscriviamo l'equazione come

$$(2a+13)(a+7) = B^2.$$

I due termini al lhs sono coprimi (e perché mai?), quindi

$$2a+13 = x^2, \qquad a+7 = y^2,$$

da cui

$$2y^2 - x^2 = 1.$$

Questa è un'*equazione di Pell* (di chi?) con infinite soluzioni (perché?).

Ad un'equazione di Pell si arriva anche scrivendo la formula risolutiva per l'equazione di secondo grado iniziale, ed imponendo che il discriminante sia un quadrato perfetto (provare per credere).

Volendo si può anche scrivere una formula che genera infinite soluzioni. Basta considerare le successioni x_n e y_n ottenute ponendo $x_0 = y_0 = 1$ e poi per ricorrenza

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n, \qquad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n.$$

A questo punto si verifica che vanno bene tutti (ed in realtà tutti e soli) i valori della forma $a = (x_n^2 - 13)/2$ con $n \geq 1$. Certo non sarebbe male capire per bene queste righe finali!

Test Finale – Risposte

1. 57
2. 16
3. 4/45
4. 2019
5. 195/8
6. 2
7. 2094
8. 0
9. ...
10. 10
11. ...
12. 1, 2, 4

Test Finale – "Aiutini"

1. Le condizioni imposte implicano (come?) che

   $$p(x) = 4 - x + q(x)(x-1)(x-3)$$

   per un opportuno polinomio $q(x)$ a coefficienti interi di grado 2014.

   Ne segue che $p(10) = -6 + 63q(10)$, e quindi il minimo valore intero positivo possibile di $p(10)$ si ha quando $q(10) = 1$. Per concludere bisogna esibire un polinomio $q(x)$ di grado 2014 che soddisfi questa condizione.

2. Indichiamo con e_n l'esponente con cui compare 2 nella scrittura di a_n come frazione irriducibile, intendendo che l'esponente è positivo se il 2 compare al numeratore e negativo se compare al denominatore. Si verifica allora (come?) che vale la ricorrenza

   $$e_{n+2} = -e_{n+1} + 2e_n,$$

   da cui la formula esplicita (come si ricava? perché c'è un denominatore?)

   $$e_n = \frac{(-2)^{n-2} + 2}{3}.$$

   Ora non è difficile determinare il più piccolo n per cui $e_n \geq 2016$.

3. I casi che ci interessano sono quelli in cui restano dentro l'urna una A e una G. Supponendo per semplicità di estrarre le lettere da lasciare nell'urna (ma si possono fare queste cose?) il conto si riduce a
$$\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{45}.$$

4. Le osservazioni fondamentali sono due:
   - il massimo comun divisore (tra cosa?) è invariante (cosa vuol dire?),
   - le operazioni sono invertibili, nel senso che se posso passare da una coppia (a, b) ad una coppia (c, d), allora posso anche passare dalla coppia (c, d) alla coppia (a, b).

   Poiché il massimo comun divisore all'inizio è 1, dalle due osservazioni fondamentali segue (come?) che le coppie ottenibili sono tutte e sole quelle che hanno le coordinate coprime.

5. Il punto chiave è capire che P, che in questo caso è definito come punto di Miquel (di chi?) dei punti medi, è in realtà il circocentro di ABC. A questo punto la somma richiesta è il triplo del raggio della circonferenza circoscritta, e questo si calcola in funzione delle lunghezze dei lati mediante note formule (quali?).

6. L'area di ABC è sempre il doppio dell'area di ADE. Per dimostrarlo, iniziamo ad osservare che il quadrilatero $BDEC$ è ciclico, e quindi $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ (perché?), da cui con ovvie notazioni
$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{2}.$$

   Ora per note formule si conclude che
$$\frac{[ABC]}{[ADE]} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin\alpha} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = 2.$$

7. Dividendo $n^4 + 2016$ per $n + 3$ si ottiene come resto $81 + 2016 = 2097$ (così senza nemmeno fare la divisione?), da cui
$$\frac{n^4 + 2016}{n + 3} = \frac{(n + 3)q(n) + 2097}{n + 3} = q(n) + \frac{2097}{n + 3}.$$

   Il più grande valore di n per cui l'ultima frazione risulta un intero è 2094.

8. Come visto più volte durante innumerevoli test iniziali/finale, si ha che
$$\sum_{k=1}^{p} k^a \equiv 0 \pmod{p}$$
   per ogni primo p ed ogni intero a che non è multiplo di $p - 1$ (anche negativo, interpretando opportunamente le frazioni).

   Nel caso specifico $p = 11$ e 2016 non è multiplo di 10, quindi la somma su blocchi consecutivi da 11 viene sempre nulla. Osservato che 1001 è multiplo di 11, concludiamo che
$$0 \equiv \sum_{k=0}^{1001} k^{2016} \equiv \sum_{k=0}^{1000} k^{2016} \pmod{p}.$$

9. Nel seguito tutte le somme si intendono cicliche (che vuol dire?).

   Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (applicata come?) segue che

$$4=\sum a^2=\sum \frac{a}{\sqrt{b}}\cdot a\sqrt{b}\leq\left(\sum\frac{a^2}{b}\right)^{1/2}\left(\sum a^2b\right)^{1/2}.$$

   Ci basta dunque dimostrare (perché?) che

$$\sum a^2b\leq 4.$$

   Utilizzando nuovamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (come?) si ottiene che

$$\sum a^2b=\sum a\cdot ab\leq\left(\sum a^2\right)^{1/2}\left(\sum a^2b^2\right)^{1/2}\leq 2\left(\sum a^2b^2\right)^{1/2}.$$

   Ci basta dunque dimostrare che l'ultima somma è minore o uguale a 4, o equivalentemente che (cosa abbiamo fatto qui?)

$$4\sum a^2b^2\leq\left(\sum a^2\right)^2.$$

   Per quest'ultima basta osservare che la somma al lhs si scrive come $(a^2+c^2)(b^2+d^2)$ e applicare GM–AM (davvero? come?). In alternativa si può espandere il quadrato e realizzare che, portato tutto al rhs, si ottiene una quadrato perfetto (farlo per convincersene!).

10. Volendola raccontare in modo complicato, si tratta di un *double counting* sull'insieme X delle terne (f,m,c), in cui f è un problema facile, m è un problema medio, e c è un concorrente che ha risolto sia f sia m.

    Il testo ci dice (come?) che X ha 256 elementi.

    D'altra parte, poiché ogni stagista ha risolto esattamente 11 problemi, se ne deduce che ci sono solo due tipi di concorrenti: quelli che hanno risolto 8 problemi facili e 3 medi, e quindi compaiono in 24 elementi di X, e quelli che hanno risolto 7 problemi facili e 4 medi, e quindi compaiono in 28 elementi di X. Se ci sono a stagisti del primo tipo e b del secondo, avremo allora che

$$24a+28b=256,$$

    e si verifica facilmente (come?) che l'unica soluzione non negativa di questa equazione diofantea è $a=6$ e $b=4$.

11. Segnaliamo due approcci.

    - *Approccio sintetico.* Indichiamo con H l'intersezione tra FB e CD, ed osserviamo che si tratta dell'ortocentro del triangolo FMC (perché?). Ora l'omotetia con centro in F e fattore $1/2$ manda $E\to M$ e $B\to H$ (perché?), dunque manda la retta EB nella retta MH, che è perpendicolare a FC (e allora?).
    - *Approccio contoso.* Trattandosi di un problema che ha a che fare solo con rette e condizioni di perpendicolarità, è chiaro che deve venire anche utilizzando la geometria analitica in coordinate cartesiane (senza nemmeno troppe astuzie su come mettere le coordinate).

12. Occorre distinguere alcuni casi, a seconda della classe di congruenza di a modulo 4.

- Se $a = 2k + 1$, scegliamo $n = k^2$ ed otteniamo
$$n(a + n) = k^2(k^2 + 2k + 1) = [k(k + 1)]^2.$$
- Se $a = 4k$, scegliamo $n = (k - 1)^2$ ed otteniamo
$$n(a + n) = (k - 1)^2(4k + k^2 - 2k + 1) = [(k - 1)(k + 1)]^2.$$
- Se $a = 4k + 2$, scegliamo $n = 2k^2$ ed otteniamo
$$n(a + n) = 2k^2(4k + 2 + 2k^2) = [2k(k + 1)]^2.$$
- Se esaminiamo con cura i casi precedenti controllando di aver scelto $n \geq 1$, scopriamo che restano fuori i casi 1, 2, 4. In questi casi occorre controllare che effettivamente l'espressione non può dare origine ad un quadrato perfetto (si tratta di scrivere l'equazione di secondo grado $n(a + n) = b^2$ e vedere quando il discriminante risulta un quadrato perfetto).