Stage Senior Pisa 2017 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia k il più grande numero reale tale che
$$\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{3y+z}+\frac{z}{4z+x}\geq k$$
per ogni terna (x,y,z) di numeri reali positivi.

   Determinare quale dei seguenti numeri è *intero*.

   (A) $\dfrac{2015}{1-k}$ **(B)** $2016\sqrt{k}$ **(C)** $2017\,k^2$ **(D)** k^{2018} **(E)** $2019\,k$

2. Determinare *quante* sono le soluzioni reali dell'equazione
$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}}.$$

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 5

3. Alcuni amici stanno cercando di determinare tutte le funzioni $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ tali che
$$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)$$
per ogni terna terna (x,y,z) di numeri razionali.

   - Alberto afferma: "tutte le soluzioni sono iniettive e surgettive".
   - Barbara afferma: "esiste una soluzione tale che $f(2017^2)=2017$".
   - Cristina afferma: "tutte le soluzioni sono funzioni affini".
   - Dario afferma: "esistono infinite soluzioni".

   Chi ha ragione?

   (A) Solo Alberto **(B)** Tutti tranne Barbara **(C)** Tutti tranne Cristina
   (D) Solo Alberto e Cristina **(E)** Tutti

4. Consideriamo il polinomio

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Dividendo $p(x^{70})$ per $p(x^2)$ si ottiene come resto ...

(A) 7 **(B)** 35 **(C)** 70 **(D)** un polinomio di grado 6

(E) un polinomio di grado 12

5. Il numero 2017 si scrive in base 2 come 11111100001. Definiamo *numeri d'annata* gli interi positivi la cui scrittura in base 2 ha esattamente 11 cifre, di cui 4 sono 0 e 7 sono 1.

Sia S la somma di tutti i numeri d'annata.

Determinare quale dei seguenti primi *non* divide S.

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 7 **(D)** 11 **(E)** 19

6. Dato un insieme di tre numeri distinti, definiamo *mediano* l'elemento che non è né il massimo, né il minimo. Data una qualunque disposizione $\mathcal{D}$ degli interi da 1 a 9 nelle caselle di una tabella 3×3 (ogni numero viene usato una ed una sola volta), definiamo r_i come il mediano della riga i-esima, e definiamo $m(\mathcal{D})$ come il mediano tra r_1, r_2, r_3.

Sia M il numero delle disposizioni $\mathcal{D}$ per cui $m(\mathcal{D}) = 5$.

Determinare quanti sono i divisori (positivi) di M.

(A) 45 **(B)** 48 **(C)** 63 **(D)** 100 **(E)** 150

7. Alberto e Barbara giocano con una pila che inizialmente contiene

$$2017^{2016} + 2019^{2018}$$

gettoni. Ad ogni turno, ogni giocatore può rimuovere, a sua scelta, 1, 2 o 3 gettoni dalla pila, purché lo stesso numero di gettoni non sia stato rimosso al turno precedente dall'altro giocatore (e ci sia ancora un numero sufficiente di gettoni nella pila). Inizia Alberto, e perde chi non ha più mosse a disposizione secondo queste regole.

Determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(A) Alberto ha una strategia vincente, e al primo turno può giocare la mossa che gli pare

(B) Alberto ha una strategia vincente, ma al primo turno deve rimuovere un gettone

(C) Alberto ha una strategia vincente, ma al primo turno deve rimuovere due gettoni

(D) Alberto ha una strategia vincente, ma al primo turno deve rimuovere tre gettoni

(E) Barbara ha una strategia vincente

8. In una nazione ci sono cinque città. Ogni coppia di città è collegata da esattamente una strada a doppio senso di circolazione. Le autorità vogliono trasformare tutte le strade in sensi unici, facendo però in modo che da ogni città si possa continuare a raggiungere ogni altra città, eventualmente passando per altre città.

   Determinare in quanti modi è possibile effettuare questa trasformazione.

   (A) 384 **(B)** 512 **(C)** 544 **(D)** 642 **(E)** 704

9. Sia $ABCD$ un parallelogrammo, sia M il punto medio del lato AD, e sia N il punto del lato CD tale che $CN = 2DN$. Il segmento MC interseca AN in P.

   Determinare il rapporto tra l'area di $ABCD$ e l'area del triangolo DMP.

   (A) 15 **(B)** 16 **(C)** 18 **(D)** 20 **(E)** 24

10. Consideriamo i numeri complessi

$$z_1 = 18 + 83i, \qquad z_2 = 18 + 39i, \qquad z_3 = 78 + 99i.$$

   Sia $\mathcal{S}$ l'insieme dei numeri complessi z tali che

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

   è un numero reale. Sia z_M l'elemento di $\mathcal{S}$ che ha la parte immaginaria maggiore.

   Determinare la parte *reale* di z_M.

   (A) 38 **(B)** 48 **(C)** 56 **(D)** 60 **(E)** 96

11. Alcuni amici stanno considerando un problema in cui si parla di un quadrilatero convesso $ABCD$ le cui diagonali AC e BD sono tra loro perpendicolari e si intersecano in E.

   - Alberto afferma: "invertendo con centro in E, i lati di $ABCD$ diventano 4 circonferenze passanti per E".
   - Barbara afferma: "i baricentri dei triangoli ABE, BCE, CDE, DAE sono conciclici".
   - Cristina afferma: "i circocentri dei triangoli ABE, BCE, CDE, DAE sono conciclici".
   - Dario afferma: "i simmetrici di E rispetto ai lati AB, BC, CD, DA sono conciclici".
   - Elena afferma: "gli incentri dei triangoli ABE, BCE, CDE, DAE sono conciclici se e solo se il prodotto dei perimetri di ABE e CDE è uguale al prodotto dei perimetri di BCE e DAE".

   Chi ha ragione?

   (A) Solo Alberto e Cristina **(B)** Solo Barbara e Cristina **(C)** Tutti tranne Dario

   (D) Tutti tranne Elena **(E)** Tutti

12. Una circonferenza ω_1 di raggio 1 è tangente esternamente ad una circonferenza ω_2 di raggio 2. Le circonferenze ω_1 ed ω_2 sono a loro volta tangenti internamente ad una circonferenza ω_3 di raggio 3. Una quarta circonferenza ω_4 è tangente esternamente ad ω_1 e ω_2, ed è tangente internamente ad ω_3.

    Determinare il raggio di ω_4.

    (A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{6}{7}$ **(C)** $\frac{11}{12}$ **(D)** $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. Determinare *quanti* sono i numeri interi (relativi) n tali che

$$n^2 + 85n + 2017$$

    è un quadrato perfetto.

    (A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 16 **(E)** Infiniti

14. Consideriamo il polinomio

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}.$$

    Determinare *quanti* sono gli interi n, con $2001 \leq n \leq 2099$, tali che $p(n)$ è intero.

    (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 7

15. Alla birreria Taggiasca ti danno 13 olive per ogni birra chiara ordinata e 17 olive per ogni birra scura ordinata. Sam, abituale frequentatore della birreria, ha osservato che esiste un intero M con la proprietà che, bevendo opportunamente, può ottenere un qualunque numero maggiore di M di olive, ma non esattamente M olive.

    Determinare M.

    (A) 29 **(B)** 139 **(C)** 178 **(D)** 191 **(E)** 220

16. Consideriamo l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le terne (a, b, c) di numeri interi positivi che soddisfano la relazione

$$a^2 + b^2 - abc + 1 = 0.$$

    Determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

    (A) L'insieme $\mathcal{S}$ è vuoto **(B)** L'insieme $\mathcal{S}$ ha un solo elemento

    (C) L'insieme $\mathcal{S}$ ha un numero finito maggiore di 1 di elementi

    (D) L'insieme $\mathcal{S}$ ha infiniti elementi, e tutte le variabili assumono infiniti valori

    (E) L'insieme $\mathcal{S}$ ha infiniti elementi, ma non tutte le variabili assumono infiniti valori

Stage Senior Pisa 2017 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Siano z e w due numeri complessi tali che $z^2 + w^2 = 7$ e $z^3 + w^3 = 10$.

   Determinare il massimo valore possibile per $|z + w|$.

2. Determinare la più piccola costante reale k tale che

   $$(4x + 5y + 3z)^2 \leq k(3x^2 + 4y^2 + 5z^2)$$

   per ogni terna (x, y, z) di numeri reali.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" che *non* contengono vocali in posizioni adiacenti.

4. Un bambino ha inizialmente una lunga striscia di carta. Al primo passaggio può dividerla in 6 o 11 parti. Ad ogni passaggio successivo, prende una qualunque delle strisce prodotte in un passaggio precedente e la divide in 6 o 11 parti, a sua scelta.

   Determinare il più piccolo intero $n \geq 2017$ con la proprietà che, procedendo opportunamente, il bambino può arrivare ad avere esattamente n strisce di carta.

5. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico in cui $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 6$, $DA = 8$.

   Determinare la lunghezza della diagonale BD.

6. Sia ABC un triangolo acutangolo, sia K il piede dell'altezza uscente da A, sia L il punto medio di AB, e sia M il punto medio di AC. Sappiamo che l'ampiezza dell'angolo in A è di $30°$, e che la lunghezza del lato BC è 100.

   Determinare il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo KLM.

7. Una successione a_n di interi è definita ponendo $a_{10} = 10$ e poi, per ricorrenza,

   $$a_n = 100a_{n-1} + n \qquad \forall n \geq 11.$$

   Determinare il più grande intero $n \leq 100$ per cui a_n risulta multiplo di 99.

8. Determinare quale resto si ottiene dividendo $6^{2017} + 8^{2017}$ per 49.

Problemi dimostrativi

9. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tali che

$$xf(xy) + f(-y) = xf(x)$$

per ogni coppia di numeri reali non nulli x e y.

10. I numeri da 0 a $n^2 - 1$ sono stati disposti "in ordine" nelle caselle di una tabella $n \times n$, cioè in modo che il numero

$$(i-1)n + j - 1$$

venga a trovarsi nella riga i e colonna j.

Successivamente Ludo sceglie n numeri, facendo in modo che ce ne sia esattamente uno per riga ed esattamente uno per colonna, e ne calcola il prodotto.

Determinare il massimo valore possibile per il prodotto di Ludo.

11. Sia ABC un triangolo scaleno, sia D il piede della bisettrice uscente da A, e sia P l'ulteriore intersezione tra la circonferenza circoscritta e la bisettrice *esterna* dell'angolo in A. Una circonferenza passante per A e P interseca il segmento PB in E ed interseca il segmento PC in F.

Dimostrare che $\angle DEP = \angle DFP$.

12. Determinare tutte le quadruple (x, y, z, w) di interi non negativi tali che

$$2^x + 3^y + 5^z = 7^w.$$

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B	B	E	A	D	D	A	C	D	C	E	B	C	E	D	E

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Il più grande numero reale con la proprietà richiesta è $k = 1/4$. Questo segue da due fatti.

   - Per ogni terna di numeri reali positivi (x, y, z) vale la disuguaglianza
   $$\frac{x}{2x+y} + \frac{y}{3y+z} + \frac{z}{4z+x} \geq \frac{x}{4x+4y+4z} + \frac{y}{4x+4y+4z} + \frac{z}{4x+4y+4z} = \frac{1}{4},$$
   il che mostra che $1/4$ soddisfa la disuguaglianza.
   - Ponendo $(x, y, z) = (1, n, n^2)$, con n abbastanza grande, si verifica che nessuna costante minore di $1/4$ può andare bene. Questo passaggio però va giustificato per bene.

   Si invita a riflettere sulla differenza tra questa disuguaglianza e quelle "di tipo Nesbit" in cui le variabili al denominatore sono diverse da quelle al numeratore.

2. Consideriamo la successione per ricorrenza definita da $a_0 = x$ e $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'equazione proposta è equivalente a chiedersi per quali valori di a_0 si ha che $a_5 = a_0$.

   Ora dalla teoria delle successioni per ricorrenza (certo, bisognerebbe saperla ...) segue che, detta ℓ l'unica soluzione dell'equazione
   $$\ell = \sqrt{1+\ell},$$
   valgono i seguenti tre fatti:

   - la successione è strettamente crescente se $a_0 < \ell$ (e tende ad ℓ, anche se qui non serve),
   - la successione è costante se $a_0 = \ell$,
   - la successione è strettamente decrescente se $a_0 > \ell$ (e tende ad ℓ, anche se qui non serve).

   Di conseguenza ℓ è l'unica soluzione dell'equazione proposta (e sarebbe stata la stessa con un numero qualunque di radici annidate).

3. Le soluzioni dell'equazione funzionale sono $f(x) = x$ e tutte quelle del tipo $f(x) = -x + a$, con a parametro reale arbitrario.

   Per dimostrarlo si può procedere nel seguente modo.

   - Posto $f(0) = a$, con la sostituzione $y = -f(z)$ si ottiene che
   $$f(x+z) = f(x+a) + f(z),$$
   che è una specie di equazione di Cauchy (cosa?).

- Posto $f(x) = g(x - a)$, l'equazione precedente diventa

  $$g(x + z - a) = g(x) + g(z - a),$$

  e cioè (ma che razza di trucchi sono questi? sono cose che si possono fare?)

  $$g(x + w) = g(x) + g(w),$$

  che è una vera Cauchy.

- A questo punto $g(x) = \lambda x$, dunque $f(x) = \lambda(x - a)$, e sostituendo nell'equazione data si trovano i possibili valori di λ ed a (occhio che questi passaggi vanno giustificati per bene: non basta ad esempio dire che i coefficienti di x, y, z devono essere gli stessi a destra e sinistra).

Vale la pena osservare che la sostituzione $x = z = 0$ porta immediatamente (come?) a dedurre che $f(x)$ è iniettiva e surgettiva, indipendentemente dagli altri passaggi.

4. Basta osservare che dividendo $p(y^{35})$ per $p(y)$ si ottiene come resto 7 (davvero basta?). Per fare questo ci sono almeno due modi.

   - *Divisione e radici complesse.* Effettuando la divisione troviamo

     $$p(y^{35}) = p(y)q(y) + r(y)$$

     per un opportuno quoziente $q(y)$ e un opportuno resto $r(y)$ di grado minore o uguale a 5. Ora sostituiamo a y le 6 radici complesse di $p(y)$, che poi sono le 6 radici settime non reali dell'unità (che è questa roba?). Visto che tali radici elevate alla settima fanno 1, lo stesso accade quando si elevano alla 35-esima, e quindi si ottiene che $7 = r(y)$ per 6 valori complessi di y. Da qui segue (come e perché?) che $r(y)$ è il polinomio costante 7.

   - *Congruenze tra polinomi.* Sappiamo (ma lo sappiamo davvero?) che

     $$y^7 \equiv 1 \pmod{p(y)},$$

     dunque anche (ma cosa sono queste congruenze tra polinomi?)

     $$y^{35} \equiv 1 \pmod{p(y)},$$

     da cui facilmente (sarà ...) la tesi.

5. La somma di tutti i numeri d'annata è 42×8189.

   Si tratta sostanzialmente di un *double counting* (che mostro è?).

   - La cifra iniziale (a sinistra) è 1 per tutti i numeri d'annata, che sono $\binom{10}{4}$ (davvero?). Quindi il suo contributo alla somma è

     $$\binom{10}{4} \cdot 1024.$$

   - Ogni altra cifra si ritrova ad essere 1 per $\binom{9}{4}$ volte (e perché?). Quindi il contributo delle altre cifre è

     $$\binom{9}{4}(1 + 2 + 4 + \ldots + 512) = \binom{9}{4} \cdot 1023.$$

In conclusione, la somma di tutti i numeri d'annata risulta essere

$$\binom{10}{4} \cdot 1024 + \binom{9}{4} \cdot 1023 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{12}(5 \cdot 1024 + 3 \cdot 1023) = 42 \cdot 8189 = 42 \cdot 19 \cdot 431.$$

6. Si tratta di dimostrare che $M = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5$, e quindi per una formula nota (ma nota davvero?) i suoi divisori sono $10 \cdot 5 \cdot 2 = 100$.

   L'osservazione fondamentale è che $m(\mathcal{D}) = 5$ se e solo se 5 è il mediano della sua riga. Che si tratta di una condizione necessaria è quasi evidente (davvero?); per il fatto che sia pure sufficiente occorre (ma forse basta) pensarci un attimo.

   A questo punto il conto diventa
   $$M = 9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6!,$$
   dove

   - 9 sono le posizioni possibili per il 5,
   - 8 sono le scelte possibili per il primo (ma primo in che senso?) dei compagni del 5 nella sua riga,
   - 4 sono le scelte possibili per completare la riga del 5 se vogliamo che 5 sia il mediano (perché sono solo 4?),
   - 6! sono i modi di sistemare i restanti 6 numeri nelle restanti 6 caselle.

7. Le configurazioni "perdo se trovo" (cosa vuol dire?) sono quelle del tipo $(1,1)$, $(3,3)$, $(x,0)$, dove la prima componente è il numero di gettoni tolti alla mossa precedente, e la seconda è la classe modulo 4 del numero di gettoni rimasti nella pila (la x sta ad indicare che in quel caso la mossa precedente è irrilevante).

   Per dimostrarlo occorre fare, con un paziente "case work", le solite (solite per chi?) due verifiche:

   - da ogni configurazione "perdo se trovo" si va *per forza* in una configurazione di altro tipo,
   - da ogni configurazione di altro tipo è possibile muovere in modo da riportare la partita in una configurazione "perdo se trovo".

   Ora il numero di gettoni iniziale è congruo a 2 modulo 4, e quindi si vede facilmente (forse) che ognuna delle tre mosse possibili porta in una configurazione perdente.

   Come fa uno a farsi venire in mente quel set di configurazioni?

8. Le configurazioni non connesse sono 480, dunque le configurazioni connesse sono $1024-480 = 544$ (ma cosa vuol dire connesse? e da dove arriva quel 1024?).

   Per dimostrarlo, con una certa dose di "case work" (che va organizzato e svolto per bene) si scopre che le configurazioni non connesse contengono necessariamente o una città da cui partono 4 strade, o una città in cui arrivano 4 strade. A questo punto il *principio di inclusione-esclusione* porta al seguente conto
   $$5 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^6 - 5 \cdot 4 \cdot 2^3 = 5 \cdot 2^5 \cdot (2 + 2 - 1) = 480,$$
   in cui

- il primo addendo è il numero di configurazioni in cui esiste una città (necessariamente unica) da cui partono 4 strade (5 sono i modi di scegliere questa città, 2^6 sono i modi di mettere a caso i restanti collegamenti),
- il secondo addendo è il numero di configurazioni in cui esiste una città (necessariamente unica) in cui arrivano 4 strade,
- il terzo addendo (perché sottratto, poi?) è il numero di configurazioni in cui esistono sia una città da cui partono 4 strade (che possiamo scegliere in 5 modi), sia una città in cui arrivano 4 strade (che a questo punto possiamo fissare in 4 modi). Cosa rappresenta quel 2^3 finale?

9. Il problema è invariante per affinità, quindi tanto vale fare il conto nel quadrato (comodo così! ma si possono fare queste cose?).

   A questo punto diventa semplice geometria analitica. Posto

   $$A = (0, 0), \qquad B = (1, 0), \qquad C = (1, 1), \qquad D = (0, 1),$$

   con facili intersezioni di rette si trova che $P = (1/5, 3/5)$.

   A questo punto è fatta (davvero?).

10. La condizione data è equivalente a dire che

   $$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_3 - z}{z_2 - z} \in \mathbb{R},$$

   cioè a imporre che il birapporto (che mostro è?) dei punti z_1, z_2, z_3, z sia reale. Visto così, è ben noto (a chi?) che il luogo richiesto è la circonferenza passante per z_1, z_2, z_3.

   Shiftando opportunamente i punti, si tratta della circonferenza che passa per $(0, 0)$, $(60, 60)$, $(0, 44)$. L'asse dei primi due ha equazione $x + y = 60$. L'asse di primo e terzo ha equazione $y = 22$. Quindi il centro sta in $(38, 22)$. Il numero con la parte immaginaria maggiore sta esattamente sopra il centro e quindi ha parte reale 38. Rifacendo all'indietro lo shift iniziale troviamo $38 + 18 = 56$.

11. Si tratta di dimostrare che le 5 affermazioni sono tutte corrette.

   - L'affermazione relativa all'inversione è una banale conseguenza delle proprietà dell'inversione (certo, sarebbe utile saperle!).
   - I baricentri dei 4 triangoli sono i vertici di un rettangolo, dunque conciclici. Il modo più veloce di vederlo è forse analiticamente, mettendo l'origine in E e gli assi lungo le diagonali. Chi sono in questo caso le coordinate dei baricentri?
   - I circocentri dei 4 triangoli sono i vertici di un rettangolo, dunque conciclici. Per vederlo vasta osservare che i circocentri stanno sugli assi dei segmenti che congiungono i vertici con E (perché? e allora?).
   - Per quanto riguarda i simmetrici di E rispetto ai lati, la prima osservazione è che questi sono conciclici se e solo se sono concicliche le proiezioni di E sui 4 lati. Questo segue facilmente da un'omotetia di centro E e fattore 2 (cos'è questo discorso?). Si tratta dunque di dimostrare che le proiezioni sono concicliche, il che si può fare in almeno due modi.

  - *Utilizzando l'inversione*. Invertendo in E, ed indicando con A' e B' le immagini di A e B, si ottiene che l'immagine della proiezione di E su AB è il punto M' che completa il rettangolo $A'EB'M'$ (questo fatto sembra essenziale: come si dimostra?). A questo punto la conclusione è quasi ovvia: le immagini delle proiezioni sono i vertici di un rettangolo (quale?), quindi concicliche, dunque anche le proiezioni sono concicliche.
  - *Per via sintetica*. Indichiamo con P, Q, R, S le proiezioni di E sui lati AB, BC, CD, DA. Ora $APES$ è ciclico (perché?), dunque $\angle EAS = \angle EPS$. Allo stesso modo (ma bisogna spiegare quale) si dimostrano le uguaglianze

    $$\angle EBQ = \angle EPQ, \qquad \angle ECQ = \angle ERQ, \qquad \angle EDS = \angle ERS.$$

    Da queste uguaglianze si deduce (come?) che $\angle SPQ + \angle QRS = 180°$, da cui la ciclicità di $PQRS$.

- Resta da trattare il caso degli incentri. Questi stanno sulle bisettrici (di cosa?), che sono due rette passanti per E (tra l'altro perpendicolari, ma qui non serve). Allora la ciclicità si può esprimere in termini di potenza (di cosa?). Le distanze dei baricentri da E sono proporzionali (perché?) ai raggi delle circonferenze circoscritte, per le quali ci sono note formule dipendenti dall'area e dal perimetro. Quando si va ad imporre l'uguaglianza tra le potenze (quale?), i termini con le aree si semplificano (perché?), dunque quello che resta è un'uguaglianza tra prodotti di perimetri, che guarda caso è quella indicata nell'affermazione di Elena.

12. La prima osservazione è che i punti di tangenza di ω_1 e ω_2 con ω_3 sono gli estremi di un diametro di ω_3. Indichiamo ora con O_i il centro di ω_i, con r il raggio di ω_4, e con θ l'angolo $\angle O_1O_2O_4$.

    Applicando il teorema del coseno nel triangolo $O_3O_2O_4$ otteniamo (come?) l'equazione

    $$(2+r)^2 + 1 - 2(2+r)\cos\theta = (3-r)^2.$$

    Applicando il teorema del coseno nel triangolo $O_1O_2O_4$ otteniamo (come?) l'equazione

    $$(2+r)^2 + 9 - 6(2+r)\cos\theta = (1+r)^2.$$

    Ora è banale algebra. Sottraendo alla seconda equazione il triplo della prima, il coseno si semplifica e si ottiene un'equazione di primo grado in r.

13. Possiamo riscrivere il problema nella forma

    $$n^2 + 85n + 2017 - a^2 = 0.$$

    Questa ha soluzioni intere se e solo se il discriminante è una quadrato perfetto (ma siamo sicuri?), il che porta all'equazione

    $$\Delta^2 = 85^2 - 4 \cdot 2017 + 4a^2,$$

    che si può scrivere nella forma

    $$(2a+\Delta)(2a-\Delta) = 843 = 3 \cdot 281.$$

Da qui si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} 2a + \Delta = 843 \\ 2a - \Delta = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + \Delta = 281 \\ 2a - \Delta = 3 \end{cases}$$

Ci sono quindi due possibilità (positive) per a, ciascuna delle quali produce due possibilità per n, per un totale di 4 valori ammissibili di n.

E che ce ne facciamo dei valori negativi di a? Perché sono venuti fuori *solo* quesi 2 sistemi? Siamo davvero sicuri che abbiano soluzioni intere? O non dobbiamo forse risolverli? Siamo poi sicuri che, dato a, i valori corrispondenti di n siano 2 e siano interi?

14. I valori ammissibili di n sono 2004, 2010, 2034, 2040, 2064, 2070, 2094.

    Dimostrarlo è una questione di *valutazioni* (cosa?) dei denominatori!

    Consideriamo la massima potenza di 2 contenuta nei denominatori. Si tratta del 2^4 presente in 6! e in nessun altro denominatore. Allora x deve essere necessariamente divisibile per 2 (e perché mai?). Ponendo $x = 2y$ troviamo che

$$p(2y) = \text{intero} + \frac{4}{3}y^3 + \frac{2}{3}y^4 + \frac{4}{15}y^5 + \frac{4}{45}y^6.$$

    Passiamo ora al 3. L'ultimo denominatore è l'unico ad essere divisibile per 9, quindi y è necessariamente divisibile per 3 (per lo stesso motivo misterioso di sopra). Ponendo $y = 3z$, con semplici conti troviamo che

$$p(6z) = \text{intero} + \frac{4 \cdot 3^4}{5} z^5(z+1).$$

    Da qui deduciamo che z deve necessariamente essere congruo a 0 o -1 modulo 5. Mettendo tutto insieme, con il teorema cinese (ma non ci facciamo mancare proprio nulla!) deduciamo che x deve essere congruo a 0 oppure 24 modulo 30, il che porta ai valori ammissibili citati all'inizio.

15. Il valore richiesto è

$$M = 13 \cdot 17 - 13 - 17.$$

    Il problema richiede di determinare il più grande intero che non si può scrivere nella forma $13a+17b$, con a e b interi *non negativi*. Per calcolarlo basta applicare una nota (come sempre) formula, secondo la quale, se m ed n sono interi positivi *coprimi*, allora il più grande intero che non si può scrivere come $am + bn$ per opportuni $a \geq 0$ e $b \geq 0$ è $mn - m - n$.

    Non sarebbe male familiarizzare con la dimostrazione di questa formula. Da notare che si tratta di dimostrare due cose: che quell'intero non è rappresentabile e che i successivi invece lo sono.

16. L'equazione ammette infinite soluzioni intere positive, tutte però con $c = 3$.

    La dimostrazione è l'esempio più classico di *Vieta jumping* (ci mancava solo più questo! che roba è?).

- Consideriamo tutte le coppie (a, b) che soddisfano l'equazione per un *dato valore* di c. Tra queste, ci sarà almeno una coppia (a_m, b_m) per cui la somma $a + b$ è minima. Ora ci sono due casi.
  - Se $a_m = b_m$, sostituendo nell'equazione si vede (come?) che deve per forza essere $c = 3$.
  - Se $a_m < b_m$ (perché possiamo assumere che l'altro caso sia questo?), allora si riesce a mostrare che esiste un'altra soluzione (a_m, b'_m) con $b'_m \leq a_m$ e dunque $b'_m < b_m$, contraddicendo in questo modo la minimalità. Per far questo, basta pensare all'equazione data come un'equazione di secondo grado nella variabile b:

    $$b^2 - (a_m c)b + (a_m^2 + 1) = 0.$$

    Ora noi sappiamo che questa equazione ha due soluzioni (perché?) intere (perché?) il cui prodotto è $a_m^2 + 1$, quindi le due soluzioni non possono essere entrambe maggiori di a_m. Ma una soluzione è proprio b_m e quindi ...

  In questo modo abbiamo dimostrato che tutte le soluzioni hanno $c = 3$.
- Resta da dimostrare che per $c = 3$ ci sono infinite soluzioni. L'idea è ancora la solita. Data una soluzione (a, b) con $a \leq b$, riusciamo a trovare una soluzione (a', b) con $a' > b$, il che porta immediatamente (ma davvero?) ad avere infinite soluzioni. Per trovare a' ragioniamo come prima pensando l'equazione data come equazione di secondo grado nella variabile a (completare i dettagli, che è istruttivo!).

Test Finale – Risposte

1. 5
2. 803/60
3. 1800
4. 2021
5. $\sqrt{51}$
6. 50
7. 89
8. 14
9. Tutte le funzioni del tipo $f(x) = a\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ con $a \in \mathbb{R}$
10. $(n-1)^n \cdot n!$
11. ...
12. L'unica soluzione è $(0, 0, 1, 1)$

Test Finale – "Aiutini"

1. Ponendo $S = z + w$ e $P = xy$ (non è mai male esprimere funzioni simmetriche in termini delle funzioni simmetriche elementari), le due condizioni date si traducono in

$$S^2 - 2P = 7, \qquad S^3 - 3SP = 10.$$

Ricavando bovinamente P dalla prima e sostituendolo nella seconda, deduciamo che

$$S^3 - 21S + 20 = (S-1)(S+5)(S-4) = 0,$$

da cui si conclude che il massimo del valore assoluto della somma è 5. Ma siamo proprio sicuri che esistano z e w con somma 5 e che verificano le due uguaglianze date?

2. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle due terne

$$A=\left(\sqrt{3}\,x, 2y, \sqrt{5}\,z\right), \qquad\qquad B=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{5}{2}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

si ottiene (ma come abbiamo scelto quelle due terne?) che

$$(4x+5y+3z)^2 \leq (3x^2+4y^2+5z^2)\left(\frac{16}{3}+\frac{25}{4}+\frac{9}{5}\right).$$

Questo mostra che la costante 803/60 va bene. Ma siamo sicuri che nessuna costante più piccola possa andare bene? Questo punto va esplicitato!

3. Il punto chiave è che le possibili *posizioni* delle vocali sono 20. Dando per buono questo, il conto si riduce (come?) a

$$20 \cdot 3 \cdot 30 = 1800,$$

in cui 3 sono gli anagrammi di "AII" e 30 sono gli anagrammi di "STGST" (perché?).

Per contare le possibili posizioni delle vocali, ci sono almeno due strade.

- Elencarle bovinamente (non molto istruttivo, ma abbastanza rapido in questo caso con numeri piccoli).
- Osservare che le 3 vocali dividono il gruppo di 5 consonanti in 4 tronconi, di cui il secondo ed il terzo hanno almeno un elemento. Questo è equivalente a dividere un gruppo di 3 consonanti in 4 tronconi senza vincoli sul numero di elementi, cioè a scegliere a caso 3 oggetti su 6, il che si può fare in $\binom{6}{3} = 20$ modi. Si è capito qualcosa? Sarebbe opportuno, perché si tratta di una tecnica standard ...

4. L'osservazione fondamentale è che le due mosse a disposizione del bambino aumentano di 5 o di 10 il numero di strisce presenti (perché?). Di conseguenza, la classe di congruenza modulo 5 del numero di strisce è invariante. Essendo 1 all'inizio, il più piccolo numero ammissibile maggiore o uguale di 2017 è 2021.

   Ora occorre verificare che effettivamente si può arrivare ad avere 2021 strisce (non che sia difficile, ma va fatto esplicitamente!).

5. Indicando con θ l'angolo in C, osserviamo che il coseno dell'angolo in A è $-\cos\theta$ (perché?). Sfruttando questa informazione, calcoliamo BD^2 in due modi diversi, applicando il teorema del coseno nei triangoli BCD e BAD. Otteniamo l'uguaglianza

$$BD^2 = 4 + 36 - 24\cos\theta = 9 + 64 + 48\cos\theta.$$

   Da questa equazione ricaviamo che $\cos\theta = -11/24$ e quindi per sostituzione $BD^2 = 51$.

6. La circonferenza circoscritta al triangolo KLM è la circonferenza di Feuerbach del triangolo ABC (davvero?), ed il suo raggio è metà del raggio della circonferenza circoscritta ad ABC (e perché?). Ora, con le notazioni standard,

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{100}{1/2},$$

   da cui $R = 100$, e quindi il raggio richiesto è 50.

7. Riscritta modulo 99, la ricorrenza diventa $a_n \equiv a_{n-1} + n$ da cui, tenendo conto della condizione data, una facile induzione mostra che

$$a_n \equiv 10 + 11 + \ldots + n = \frac{(n+10)(n-9)}{2} \pmod{11}.$$

8. Dopo aver stabilito che $2017 \equiv 1$ modulo 7, passando modulo 49 valgono le relazioni

$$6^{2017} + 8^{2017} \equiv (7-1)^{2017} + (7+1)^{2017} \equiv -1 + 2017 \cdot 7 + 1 + 2017 \cdot 7 \equiv 2 \cdot 1 \cdot 7 \equiv 14.$$

Certo ogni passaggio necessita di una certa esegesi, e non sarebbe male arrivare a padroneggiarli con disinvoltura.

In alternativa, a causa di una scelta infelice dei numeri, si poteva osservare che $\phi(49) = 42$ e $2017 \equiv 1$ modulo 42, e dunque (serve altra esegesi?)

$$6^{2017} + 8^{2017} \equiv 6^1 + 8^1 \equiv 14 \pmod{49}.$$

9. Indichiamo con $P(x, y)$ l'equazione funzionale (meglio sarebbe dire il predicato corrispondente all'equazione funzionale). Poniamo $f(1) = a$.

- Considerando $P(x, -1)$ si deduce che

$$xf(-x) + a = xf(x).$$

- Considerando $P(1, x)$ si deduce che

$$f(x) + f(-x) = a.$$

- Mettendo a sistema le due equazioni appena trovare si conclude che

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

- Facendo la verifica (cosa da non dimenticare mai!) ci si assicura che tutte quelle appena trovate sono effettivamente soluzioni.

10. Si tratta di dimostrare che la scelta migliore consiste nel prendere i numeri sulla diagonale che parte in alto a destra per arrivare in basso a sinistra. L'idea è la stessa che sta alla base della dimostrazione della disuguaglianza di riarrangiamento.

Consideriamo la permutazione σ di $\{1, \ldots, n\}$ definita in maniera tale che nella riga i-esima Ludo va a scegliere l'elemento della colonna $\sigma(i)$ (siamo sicuri che si tratti di una permutazione?). Vogliamo dimostrare che nella configurazione ottimale (a proposito, perché esiste?) la permutazione σ è monotona decrescente (ma basta per concludere?).

Supponiamo per assurdo che non lo sia: allora esistono $i < j$ tali che $\sigma(i) > \sigma(j)$. Cosa succede se facciamo uno scambio, cioè prendiamo l'elemento $\sigma(j)$ dalla riga i e l'elemento $\sigma(i)$ dalla riga j? Ma possiamo fare lo scambio? E siamo sicuri che questo porti ad un assurdo? Serve sapere a priori che la configurazione ottimale è unica?

11. La strategia consiste nel dimostrare la similitudine $FCD \sim EBD$. Ottenuta questa, i due angoli richiesti sono due angoli esterni corrispondenti in questi triangoli (capire bene questa affermazione!). Per dimostrare la similitudine, occorrono alcuni passaggi.

    - Si osserva che P è il punto medio dell'arco BC in cui si trova, dunque CPB è isoscele. Questo è un fatto (che dovrebbe essere) noto! Da qui segue che $\angle FCD = \angle EBD$, e non ci resta che procurarci la similitudine tra i lati che determinano questi angoli.
    - Si osserva che vale la similitudine $AFC \sim AEB$. Questo perché gli angoli in C e B sono uguali (perché?) e gli angoli in F ed E sono uguali, in quanto i loro supplementari ... Da questa similitudine deduciamo che

      $$CF : CA = BE : BA.$$

    - Dal teorema della bisettrice deduciamo che

      $$CD : CA = BD : BA.$$

    Mettendo insieme le due proporzioni si conclude (farlo!).

    Vale la pena notare (e dimostrare) un altro fatto generale che talvolta potrebbe essere utile: detta K l'ulteriore intersezione tra AC e la circonferenza circoscritta ad $APEF$, e detta L l'ulteriore intersezione tra AB e la stessa circonferenza, vale l'uguaglianza $CK = BH$.

12. La soluzione segue dalle seguenti osservazioni.

    - Un argomento di parità mostra che necessariamente $x = 0$.
    - Ragionando modulo 3 si ottiene che necessariamente $y = 0$, per cui resta l'equazione

      $$2 + 5^z = 7^w,$$

      che ha chiaramente la soluzione $z = w = 1$.
    - Ragionando modulo 25 si vede che le classi di 7^w non sono poi molte, e tra queste non c'è il 2 (e allora?). Ma come può venire in mente di ragionare modulo 25? Ha senso utilizzare altri moduli, tipo 11 o 13?