Stage Senior Pisa 2018 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia M la più piccola costante reale tale che

$$xy + yz \leq M(x^2 + y^2 + z^2)$$

per ogni terna (x, y, z) di numeri reali.

Determinare quale dei seguenti numeri è intero.

(A) $3M$ **(B)** $3M^3$ **(C)** $2M^2$ **(D)** M^4 **(E)** $\frac{1}{M}$

2. Consideriamo le seguenti tre disuguaglianze:

- disuguaglianza 1: $ab + 2bc + 7ca \leq K(a^4 + b^2 + c^2)$,
- disuguaglianza 2: $ab + 2bc + 7ca \leq K(a^2 + |b| + c^2)$,
- disuguaglianza 3: $ab + 2bc + 7ca \leq K(a^4 + |b| + c^4)$.

Determinare per quale o quali di esse esiste almeno un numero reale $K > 0$ che la rende vera per ogni terna (a, b, c) di numeri reali.

(A) Solo la prima **(B)** Solo la seconda **(C)** Solo la terza **(D)** Nessuna

(E) Tutte

3. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi con almeno una radice intera.

Determinare quante sono, al massimo, le soluzioni *intere* (distinte) dell'equazione

$$p(x) = 2019.$$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8

(E) Non c'è un limite superiore, pur di usare polinomi di grado opportuno

4. Per ogni numero reale a, sia $\mathcal{F}_a$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x)) = x^2 f(x) + ax^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

(A) $\mathcal{F}_0$ contiene almeno una funzione surgettiva **(B)** $\mathcal{F}_0$ contiene almeno due funzioni

(C) $f(0) = 0$ per ogni funzione $f \in \mathcal{F}_0$ **(D)** $\mathcal{F}_1$ contiene almeno una funzione non iniettiva

(E) $\mathcal{F}_1$ contiene almeno una funzione bigettiva

5. Una rana si trova inizialmente nell'origine del piano cartesiano. Ad ogni mossa può spostarsi, dal punto (x, y) in cui si trova, in uno a scelta dei 4 punti $(x + 1, y)$, $(x + 2, y)$, $(x, y + 1)$, $(x, y + 2)$.

Determinare quante sono le possibili successioni di mosse che la portano nel punto $(4, 4)$.

(A) 25 **(B)** 141 **(C)** 312 **(D)** 476 **(E)** 556

6. Definiamo *neo-maggiorenni* i sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, 20\}$ che contengono esattamente 4 elementi, due dei quali (distinti) hanno come somma esattamente 18.

Detto M il numero dei sottoinsiemi neo-maggiorenni, determinare quale dei seguenti primi divide M.

(A) 17 **(B)** 19 **(C)** 23 **(D)** 29 **(E)** 31

7. Il *tri-quadrato* di ordine n è il sottoinsieme del piano cartesiano costituito dall'unione dei 3 quadrati

$$[0, n] \times [0, n], \qquad [n, 2n] \times [n - 1, 2n - 1], \qquad [2n, 3n] \times [2n - 2, 3n - 2].$$

Pensando il tri-quadrato come unione di $3n^2$ quadratini unitari, vorremmo tassellarlo usando mattonelle 3×1 e 1×3, ovviamente senza creare sovrapposizioni o sforare dai bordi.

Determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(A) Tutti i tri-quadrati di ordine sufficientemente grande sono tassellabili

(B) Il tri-quadrato di ordine $n = 2017^{2017}$ non è tassellabile

(C) Il tri-quadrato di ordine $n = 2017^{2018}$ non è tassellabile

(D) Il tri-quadrato di ordine $n = 2018^{2017}$ non è tassellabile

(E) Il tri-quadrato di ordine $n = 2018^{2018}$ non è tassellabile

8. Ad un torneo di scacchi hanno partecipato 2018 giocatori. Ogni coppia di giocatori si è sfidata al massimo una volta. Definiamo *pigri* i giocatori che hanno giocato un numero di partite minore o uguale a 20, ed *iperattivi* i restanti. In tutto il torneo, non è mai successo che due giocatori iperattivi si siano incontrati.

   Sia M il massimo numero di incontri che sono stati disputati nel torneo, tenendo conto delle condizioni precedenti.

   Determinare l'esponente di 3 nella fattorizzazione di M.

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

9. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, sia M il punto medio dell'ipotenusa BC, e sia H il piede dell'altezza uscente da A.

   Sia D un punto sul cateto AB, e sia E un punto sul cateto AC.

   Allora vale l'uguaglianza $AD \cdot DB = AE \cdot EC$ se e solo se ...

   (A) $AB = AC$ e $AD = AE$ **(B)** $MD = ME$ **(C)** $HD = HE$

   (D) il quadrilatero $BDEC$ è ciclico **(E)** $AD = AE$ oppure $AD = EC$

10. Siano ω_1 e ω_2 due circonferenze esterne l'una rispetto all'altra. Conosciamo la distanza d_1 tra i punti di tangenza di ω_1 e ω_2 con una tangente comune interna (cioè una retta tangente ad ω_1 e ω_2 rispetto alla quale le due circonferenze stanno in semipiani distinti), e la distanza d_2 tra i punti di tangenza di ω_1 e ω_2 con una tangente comune esterna (rispetto alla quale le due circonferenze stanno nello stesso semipiano).

    Sulla base di queste informazioni siamo in grado di determinare univocamente ...

    (A) il prodotto dei due raggi **(B)** la somma dei due raggi **(C)** il rapporto tra i due raggi

    (D) il rapporto tra la distanza tra i centri e la somma dei due raggi

    (E) il prodotto tra la distanza tra i centri e la differenza dei due raggi

11. In un parallelogrammo $ABCD$ il lato AB è la metà del lato BC. La bisettrice dell'angolo $\angle ABC$ interseca la diagonale AC in P. La bisettrice dell'angolo $\angle ADC$ interseca il prolungamento del lato AB (dalla parte di B) in Q. La retta PQ interseca il lato AD in R.

    Allora il rapporto $AD : AR$ ...

    (A) vale sempre $\sqrt{6}$ **(B)** non dipende dal parallelogrammo ed è maggiore di $\sqrt{6}$

    (C) non dipende dal parallelogrammo ed è minore di $\sqrt{6}$

    (D) dipende dal parallelogrammo ed è massimo nel caso del rettangolo

    (E) dipende dal parallelogrammo ed è minimo nel caso del rettangolo

12. Sia ABC un triangolo, sia ω la sua circonferenza circoscritta, sia M il punto medio dell'arco AC di ω che non contiene B, e sia N il punto di ω diametralmente opposto ad M.

    Alcuni amici stanno studiando la figura che si ottiene dopo aver effettuato un'inversione con centro in A. Come da tradizione, si indica con P' l'immagine di ogni punto P, con il tacito accordo che $A' = A$.

    - Alberto afferma: "N' è il piede di un'altezza nel triangolo $A'B'C'$".
    - Barbara afferma: "il triangolo $A'M'C'$ è isoscele".
    - Cristina afferma: "l'immagine della bisettrice dell'angolo $\angle ABC$ è una circonferenza con centro in C' se e solo se $BA = BC$".

    Chi ha ragione?

    (A) Tutti tranne Alberto **(B)** Tutti tranne Barbara **(C)** Tutti tranne Cristina

    (D) Solo Barbara **(E)** Tutti

13. Consideriamo il numero n la cui rappresentazione in base 10 è

$$30x070y03,$$

    in cui si intende che x e y sono cifre, non necessariamente distinte, comprese tra 0 e 9.

    Sappiamo per ipotesi che n è multiplo di 37.

    Determinare quanto vale, al *massimo*, la somma $x + y$.

    (A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

14. Determinare quante sono le coppie (m, n) di numeri interi (relativi) tali che

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 12.$$

    (A) Nessuna **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 8

15. Consideriamo l'insieme

$$R := \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : 11a - 17b + 6c = 0\}$$

e l'insieme

$$S := \{(a^2 - b^2)(b - c)(c - a) : (a, b, c) \in R\}.$$

Sia d il massimo comun divisore di tutti gli elementi di S.

Determinare quale delle seguenti relazioni è corretta.

(A) $d \leq 100$ **(B)** $100 < d \leq 1000$ **(C)** $1000 < d \leq 2000$ **(D)** $2000 < d \leq 4000$

(E) $d > 4000$

16. Nelle risposte sono riportate 5 espressioni, ciascuna delle quali è la somma di tre addendi nelle variabili (x, y, z).

Determinare per quale di esse esiste una terna (x, y, z) di interi positivi che rende l'espressione intera, ma rende non intero almeno uno dei 3 addendi.

(A) $\dfrac{x^{33} + 7}{77} + \dfrac{y^7 + 77}{33} + \dfrac{z^{77} + 33}{7}$ **(B)** $\dfrac{x^3 + 5}{7} + \dfrac{y^5 + 7}{3} + \dfrac{z^7 + 3}{5}$

(C) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$ **(D)** $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y}$ **(E)** $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} + \dfrac{z^7}{7}$

Stage Senior Pisa 2018 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Determinare la più grande costante reale K tale che

$$3(x^3+y^3+z^3)+17xyz \geq K(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)$$

per ogni terna (x,y,z) di numeri reali positivi.

2. Siano z_1, z_2, ..., z_{100} le radici complesse (eventualmente ripetute con molteplicità) dell'equazione

$$(x+1)^{100}=(x-1)^{99}.$$

Determinare

$$\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\ldots+\frac{1}{z_{100}^2}.$$

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" in cui nessuna delle due I resta fissa (cioè in cui la quinta e ultima lettera non sono I).

4. Determinare quante sono le funzioni $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ tali che $f(f(x))=f(x)$ per ogni $x\in\{1,2,3,4,5\}$.

5. Sia ABC un triangolo isoscele con $AB=AC=10$ e $BC=12$. Siano D un punto interno al lato AB ed E un punto interno al lato AC tali che $AD=DE=EC$.

   Determinare la lunghezza di DE.

6. Sia ABC un triangolo rettangolo isoscele con $AB=AC=6$, e sia M il punto medio dell'ipotenusa BC. Una circonferenza passante per A ed M interseca il lato AB in D ed il lato AC in E. Sappiamo che l'area di DME è 8 e che $EC>BD$.

   Determinare la lunghezza di EC.

7. Prediamo un intero, lo eleviamo alla 120 e poi dividiamo il risultato per 2019. Quanti resti diversi possiamo ottenere?

8. Determinare tutti i numeri primi p per cui esistono interi positivi a e b tali che

$$p^a+36=b^2.$$

Problemi dimostrativi

9. Determinare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti reali per cui il polinomio

$$(x+y)^4 - p(x) - p(y)$$

risulta multiplo di $xy - x - y$.

10. Siano x_1, x_2, ..., x_{2018} dei numeri reali. Per ogni intero $0 \leq m \leq 2018$, indichiamo con P_m la somma dei primi m numeri (quelli con gli indici più bassi), e indichiamo con U_m la somma degli ultimi m numeri.

    Sappiamo che, per ogni $0 \leq m \leq 2018$, almeno uno tra P_m e U_m è intero.

    Determinare il *minimo* numero di interi che sono *necessariamente* presenti tra i 2018 numeri reali.

11. Sia ABC un triangolo scaleno con $AB < AC$, e sia L il piede della bisettrice uscente da A.

    Sia D la proiezione di C sulla retta AL, sia E la proiezione di L sulla retta AB, e sia F l'intersezione delle rette BC ed ED.

    Dimostrare che AF è un'altezza del triangolo ABC.

12. Determinare tutte le coppie (a, b) di interi positivi tali che

$$9^a - 7^a = 2^b.$$

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
C	D	C	E	E	C	D	D	B	A	B	A	D	D	D	A

Test Iniziale – “Aiutini”

1. La più piccola costante reale con la proprietà richiesta è $M = 1/\sqrt{2}$.

   Infatti per AM–GM (o banali sviluppi di quadrati) deduciamo (come?) che

   $$2xy \leq \sqrt{2}\,x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y^2 \qquad \text{e} \qquad 2yz \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,y^2 + \sqrt{2}\,z^2.$$

   Sommando le due disuguaglianze otteniamo che

   $$2(xy + yz) \leq \sqrt{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

   da cui la tesi.

   Da dove arriva la bizzarra scelta dei coefficienti? Perché non va bene partire da disuguaglianze del tipo $2xy \leq x^2 + y^2$?

2. Per nessuna delle tre disuguaglianze esiste il K richiesto.

   - Nella prima basta considerare terne del tipo $(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)$ con $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo.
   - Nella seconda basta considerare terne del tipo $(n, n^2, 0)$ con n abbastanza grande.
   - Nella terza basta considerare terne del tipo $(n, n^4, 0)$ con n abbastanza grande.

   In che senso le scelte indicate conducono alla soluzione?

3. Il massimo numero di soluzioni è 4. Supponiamo infatti che l'equazione abbia almeno 5 soluzioni. Allora per il teorema di Ruffini (cosa? come?) si avrebbe che

   $$p(x) - 2019 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)q(x),$$

   dove a, b, c, d, e sono le 5 soluzioni (intere) e $q(x)$ è un opportuno polinomio a coefficienti interi. Sia ora λ la radice intera, o una delle radici intere, di $p(x)$. Allora si avrebbe che

   $$-2019 = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d)(\lambda - e)q(\lambda).$$

   I primi 5 fattori sono tutti distinti, ma la fattorizzazione di 2019 è $3 \cdot 673$, e quindi non è possibile scrivere -2019 come prodotto di almeno 5 interi distinti (perché? e se i fattori sono solo 4?).

   La dimostrazione non è finita. Occorrerebbe ora mostrare che è possibile fare in modo che l'equazione $p(x) - 2019$ abbia 4 soluzioni. Per questo basta ispirarsi alla fattorizzazione precedente (farlo!).

4. La soluzione segue da varie osservazioni. Consideriamo intanto l'equazione con $a = 0$, e cioè

$$f(f(x)) = x^2 f(x).$$

- La funzione $f_1(x) \equiv 0$ (cioè la funzione identicamente nulla) e la funzione $f_2(x) = x^2$ sono soluzioni. Dunque l'affermazione (B) è vera.
- La funzione $f_3(x) = |x| \cdot x$ è soluzione, ed è bigettiva. Dunque l'affermazione (A) è vera.
- Poniamo $f(0) = \alpha$. Sostituendo $x = 0$ nell'equazione scopriamo che $f(\alpha) = 0$. A questo punto, sostituendo $x = \alpha$ nell'equazione, scopriamo (come?) che $\alpha = 0$. Ne segue che ogni soluzione dell'equazione verifica $f(0) = 0$, dunque l'affermazione (C) è vera.

Passiamo ora all'equazione con $a = 1$, e cioè

$$f(f(x)) = x^2 f(x) + x^2.$$

- La funzione $f_4(x) = 1 - x^2$ è soluzione e non è iniettiva, dunque l'affermazione (D) è vera. Ma come fa uno a farsi venire in mente che una funzione del genere sia soluzione? Se ci fosse una soluzione polinomiale, di che grado sarebbe? Come si trovano tutte le soluzioni di un dato grado (basso)?
- Sia $f(x)$ una soluzione surgettiva. Allora esiste x_0 tale che $f(x_0) = -1$. Sostituendo $x = x_0$ nell'equazione scopriamo che $f(-1) = 0$. Sostituendo $x = 0$ scopriamo che $f(f(0)) = 0$. Se $f(x)$ è pure iniettiva, allora per forza (ma davvero?) $f(0) = -1$, cioè $x_0 = 0$.

  D'altra parte, ponendo come prima $f(0) = \alpha$, e sostituendo come prima $x = 0$ ed $x = \alpha$ nell'equazione, scopriamo (come?) che $\alpha \in \{0, 1\}$, il che è assurdo (perché?). Questo mostra che non esistono soluzioni bigettive, e quindi l'affermazione (E) è falsa.

5. La soluzione segue, sostanzialmente senza parole, dalla tabella

5	20	71	207	556
3	10	32	84	207
2	5	14	32	71
1	2	3	10	20
1	1	2	3	5

in cui ogni numero è la somma dei due che gli stanno sotto e dei due che gli stanno a sinistra, ovviamente quando questi esistono.

Cosa rappresentano i numeri di questa tabella? A partire da dove è stata costruita?

6. Ci sono $1196 = 4 \cdot 13 \cdot 23$ sottoinsiemi neo-maggiorenni.

Per dimostrarlo, osserviamo che nell'insieme $\{1, 2, \ldots, 20\}$ ci sono 8 sottoinsiemi di due elementi a somma 18, e cioè $\{1, 17\}$, $\{2, 16\}$, ..., $\{8, 10\}$ (ma perché stiamo ignorando l'ordine degli elementi?). Ogni sottoinsieme neo-maggiorenne contiene *almeno* una di queste coppie. Indichiamo con A_i l'insieme costituito dai sottoinsiemi neo-maggiorenni che contengono l'i-esima coppia. Vogliamo contare quanti sono gli elementi dell'unione degli A_i.

Per il principio di inclusione-esclusione (che mostro è?) avremo che

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_8| = |A_1| + \ldots + |A_8| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j|$$

(dove variano i e j? ma non c'erano anche termini con intersezioni di 3 o più insiemi?).

Ora basta osservare che (da dove arrivano questi conti?)

$$|A_i| = \binom{18}{2} = 153 \qquad \text{e} \qquad |A_i \cap A_j| = 1$$

per concludere (come?) che il numero richiesto è $153 \cdot 8 - \binom{8}{2} = 1196$.

7. Il tri-quadrato di ordine n è tassellabile se e solo se n è congruo a 0 oppure 1 modulo 3, e 2018^{2017} è l'unico numero congruo a 2 tra quelli indicati nelle risposte. La dimostrazione segue dalle seguenti osservazioni.

   - I tri-quadrati di ordine $n \equiv 0$ modulo 3 si tassellano banalmente.
   - I tri-quadrati di ordine $n \equiv 1$ modulo 3 si tassellano mostrando la tassellabilità
     - di un quadrato $n \times n$ privato di un vertice,
     - di un quadrato $n \times n$ privato delle due caselle in alto a destra e delle due caselle in basso a sinistra.

     Come si dimostrano queste tassellabilità? Perché bastano per concludere?
   - I tri-quadrati di ordine $n \equiv 2$ modulo 3 non si tassellano perché non è possibile tassellare
     - un quadrato $n \times n$ privato di un vertice,
     - un quadrato $n \times n$ privato delle due caselle in un vertice.

     Perché bastano queste due non tasselabilità? Come si dimostrano? Se si colora con tre colori diagonalmente, quali caselle restano scoperte?

8. Il massimo numero di incontri nel torneo è $1998 \cdot 20$, e corrisponde al caso in cui ci sono 1998 pigri e 20 iperattivi, e le partite sono tutte e sole quelle tra un pigro ed un iperattivo.

   Per dimostrare che non è possibile avere un torneo con più incontri, conviene distinguere due casi.

   - Se i pigri sono meno di 1998, allora le partite sono meno di $1998 \cdot 20$ (in ogni partita c'è almeno un pigro).
   - Se i pigri sono più di 1998, diciamo $1998 + k$, allora le partite sono al massimo

     $$(1998 + k)(20 - k) + \frac{(1998 + k)k}{2},$$

     in cui il primo addendo rappresenta le possibili partite tra un pigro ed un interattivo, mentre il secondo addendo rappresenta le possibili partite tra due pigri (perché c'è il 2 al denominatore? ma davvero conviene tenere così basso il numero di incontro tra pigri?). Ora basta verificare (ma occorre farlo!) che tale numero è minore di $1998 \cdot 20$.

9. Sia ω la circonferenza circoscritta ad ABC, che come è noto ha il centro in M. Allora valgono le implicazioni

$$AD \cdot DB = AE \cdot EC \iff \operatorname{pow}_\omega(D) = \operatorname{pow}_\omega(E) \iff MD = ME.$$

Da cosa segue la prima implicazione? Che cosa sono quelle strane $\operatorname{pow}_\omega$? Da cosa segue la seconda implicazione? Cosa lega la potenza di un punto alla distanza dal centro?

Detto questo, per completare la risoluzione dell'esercizio occorrerebbe verificare con opportuni esempi che le altre opzioni non sono necessariamente vere (e quindi non sarebbe male mettersi a farlo!).

10. Siano r_1 ed r_2 i due raggi, e sia d la distanza tra i due centri. Dalla condizione sulla tangente interna segue, guardando un opportuno trapezio (quale?), che

$$(r_1 + r_2)^2 + d_1^2 = d^2.$$

Dalla condizione sulla tangete esterna segue, guardando un opportuno trapezio (quale?), che

$$(r_1 - r_2)^2 + d_2^2 = d^2.$$

Sviluppando i quadrati e sottraendo troviamo che $4r_1r_2 = d_2^2 - d_1^2$ e quindi abbiamo determinato r_1r_2.

Come nell'esercizio precedente, per avere una soluzione completa occorrerebbe verificare che le altre quantità proposte nelle risposte non si possono ricavare univocamente.

11. Il rapporto richiesto vale $5/2$ indipendentemente dal parallelogrammo, ed in particolare è sempre maggiore di $\sqrt{6}$.

Per dimostrarlo, con un po' di angle chasing (fatto come?) si scopre che

- le rette DQ e BP sono parallele,
- la retta BP interseca il lato AD nel punto medio,
- le rette DQ e BP trisecano la diagonale AC,
- $BQ = BA$.

A questo punto è possibile costruire la configurazione parlando solo di rapporti tra segmenti sulla stessa retta, senza mai nominare le bisettrici (come?). Di conseguenza, il problema è invariante per affinità (cosa vuol dire?), dunque si può assumere che il parallelogrammo sia un quadrato e fare il conto in analitica (ma che comodità sono queste? e come si fa il conto?).

12. Cerchiamo di determinare gli angoli nella figura dopo l'inversione. Ricordiamo intanto (ma si tratta davvero solo di ricordare?) che M è il secondo punto di intersezione tra ω e la bisettrice interna dell'angolo B, mentre N è il secondo punto di intersezione tra ω e la bisettrice esterna dell'angolo B.

Utilizzando la nomenclatura standard, dalle ben note (a chi?) proprietà dell'inversione (e non solo) deduciamo che

- i punti B', N', C', M' sono allineati,
- $\angle A'B'C' = \gamma$ e $\angle A'C'B' = \beta$,
- $\angle C'A'M' = \beta/2$ (perché?) e quindi $\angle C'M'A' = \beta/2$ (e di conseguenza il triangolo $A'M'C'$ è isoscele sulla base $A'M'$),
- $\angle C'A'N' = 90° - \beta/2$ e quindi $\angle A'N'C' = 90° - \beta/2$ (e di conseguenza $A'N'$ non può essere un'altezza nel triangolo $A'B'C'$).
- L'immagine della bisettrice interna di $\angle ABC$ è la circonferenza circoscritta al triangolo $A'B'M'$ (e perché mai?). Tale circonferenza può avere centro in C' solo se $A'B'M'$ è rettangolo in A' (davvero?), il che accade se e solo se AM è perpendicolare ad AB, che a sua volta accade se e solo se $BA = BC$ (cioè $B \equiv N$).

13. Le possibili coppie (x, y) sono $(8, 1)$, $(4, 4)$ e $(0, 7)$.

Per dimostrarlo osserviamo che $3 \cdot 37 = 111$, da cui (certo, sapendo un po' di congruenze)

- $10^2 = 100 \equiv -11 \pmod{37}$,
- $10^4 \equiv (-11)^2 = 121 \equiv 10 \pmod{37}$,
- $10^6 = 10^2 \cdot 10^4 \equiv -110 \equiv 1 \pmod{37}$,
- $10^8 = 10^6 \cdot 10^2 \equiv -11 \pmod{37}$.

Ne segue (con qualche conto, che va fatto) che il numero dato è congruo, modulo 37, a $x - 11y + 3$. Tenendo conto che si tratta di cifre (dunque con le ovvie limitazioni), deduciamo che

$$11y - x \in \{3, 40, 77\},$$

da cui con semplici conti si ottiene che le uniche possibilità sono quelle elencate all'inizio.

14. Le possibili coppie $(m.n)$ sono $(3, 6)$, $(3, 0)$, $(-4, 6)$, $(-4, 0)$.

Per dimostrarlo, aggiungiamo 9 a destra e sinistra, e riscriviamo l'equazione data come

$$(n - 3)^2 = m^2 + m - 3.$$

Ne segue che $m^2 + m - 3$ deve essere un quadrato perfetto, il che non è facilissimo essendo molto vicino a m^2. Per formalizzare il discorso, distinguiamo vari casi.

- Per $m > 3$ si hanno le disuguaglianze

  $$m^2 < m^2 + m - 3 < m^2 + 2m + 1,$$

  e quindi non c'è nessuna possibilità di avere soluzioni (e perché?).
- I casi $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ si trattano a mano e si vede che solo $m = 3$ va bene.
- Per m negativo poniamo $m = -k$ e osserviamo che per $k > 4$ valgono le disuguaglianze

  $$k^2 - 2k + 1 < k^2 - k - 3 < k^2,$$

  da cui ancora una volta nessuna speranza.

- Restano i casi $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Trattandoli a mano si vede che solo $k = 4$, cioè $m = -4$, produce soluzioni.

15. Dimostriamo che $d = 2244$. Questo segue da varie osservazioni.

    - Guardando la relazione tra le variabili modulo 11 scopriamo che $b \equiv c \pmod{11}$.
    - Guardando la relazione tra le variabili modulo 17 scopriamo che $a \equiv c \pmod{17}$.
    - Guardando la relazione tra le variabili modulo 6 scopriamo che $b \equiv a \pmod 6$. Da questa relazione scopriamo anche che a e b hanno la stessa parità, il che fa guadagnare almeno un altro fattore 2 (dove?).
    - Dalle osservazioni precedenti sappiamo che d è multiplo di $11 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 2 = 2244$. Per mostrare che non si può fare di meglio, basta per esempio considerare le terne $(17, 11, 0)$ e $(0, 6, 17)$ (dalle quali si deduce cosa?).

16. La soluzione segue da diverse osservazioni.

    - Il numero
    $$\frac{A}{3} + \frac{B}{5} + \frac{C}{7}$$
    è intero se e solo se lo sono le tre singole frazioni. Si tratta in fondo di una questione di valutazioni (di cosa?). Volendo, basta anche fare bovinamente il denominatore ed esaminare la divisibilità per 3, 5, 7. Questo elimina le risposte (B) ed (E).
    - Il numero
    $$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$
    è intero se e solo se $x = y = z = 1$, perché in caso contrario le frazioni sono troppo piccole (in che senso?). Questo elimina la risposta (C).
    - Esaminiamo ora l'espressione
    $$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y},$$
    e supponiamo che $p^a \parallel x$, $p^b \parallel y$, $p^c \parallel z$ (cosa vuol dire?). Supponiamo wlog (che è questa sigla?) che la prima frazione non sia intera, e quindi $c > a + b$. Ma allora dovrebbe essere vero che
    $$c - a - b > a - b - c \qquad \text{e} \qquad c - a - b > b - a - c,$$
    il che implica, per ragioni di valutazione p-adica, che la somma non può essere intera (che discorsi sono questi?).
    - Mostriamo infine che
    $$\frac{x^{33} + 7}{77} + \frac{y^7 + 77}{33} + \frac{z^{77} + 33}{7}$$
    può essere un intero senza che lo siano la prima e la terza frazione. Per far questo procediamo nel seguente modo.
        - Scegliamo $y = 22$, così la seconda frazione è intera (davvero? e perché?).

- Scegliamo x non multiplo di 7 e tale che $x^{33} + 7 \equiv 0$ modulo 11. Questo si può fare perché la potenza terza è surgettiva modulo 11 (cosa vuol dire tutto questo? e come garantisce che x non sia multiplo di 7?). In questo modo la prima frazione risulta del tipo $A/7$, con A che non è multiplo di 7.
- Ora non resta che fare in modo che $z^{77} + 33 \equiv -A$ modulo 7, il che è ancora una volta possibile perché la potenza 77-esima, che poi è la potenza quinta, è surgettiva modulo 7 (ma che discorsi sono questi?).

Test Finale – Risposte

1. 3
2. $\dfrac{1}{4} - 99^2$
3. 2700
4. 196
5. 250/39
6. $3 + \sqrt{7}$
7. 58
8. $p = 2$ oppure $p = 13$
9. L'unica soluzione è $p(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 20x$
10. Il minimo numero è 2
11. ...
12. Le possibili coppie sono $(1, 1)$ e $(2, 5)$

Test Finale – "Aiutini"

1. La più grande costante è $K = 3$. La dimostrazione segue da due osservazioni.

   - Ponendo $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ troviamo che $6 \geq 2K$, da cui $K \leq 3$. Ma porre $z = 0$ non è vietato dal fatto che si tratta di reali positivi?
   - Utilizzando la notazione con le somme simmetriche (cosa?), dalla disuguaglianza di Schur (di chi?) deduciamo che

     $$\frac{3}{2}\sum_{\text{sym}} x^3 + \frac{17}{6}\sum_{\text{sym}} xyz \geq \frac{3}{2}\sum_{\text{sym}} x^3 + \frac{3}{2}\sum_{\text{sym}} xyz \geq 3\sum_{\text{sym}} x^2 y,$$

     il che dimostra che $K = 3$ va bene.

2. Limitandosi ai termini fino al secondo grado, l'equazione proposta ha la forma

   $$1 + 100x + \binom{100}{2}x^2 + \ldots = -1 + 99x - \binom{99}{2}x^2 + \ldots$$

   Portando tutto dalla stessa parte e dividendo per 2 l'equazione diventa

   $$1 + \frac{1}{2}x + \frac{99^2}{2}x^2 + \ldots$$

   Ora basta sapere (già, la parola magica) che la somma dei quadrati dei reciproci delle radici è uguale ad $a_1^2 - 2a_2$, dove a_1 e a_2 sono i coefficienti di x ed x^2, rispettivamente. Sotto quali ipotesi vale questa formula? Dato un polinomio, come si ottiene un polinomio che ha come radici i reciproci delle radici del polinomio dato?

3. Ci sono almeno due modi di procedere.

   - Dal principio di inclusione-esclusione troviamo che il numero richiesto è

     $$\frac{8!}{8} - \frac{7!}{4} - \frac{7!}{4} + \frac{6!}{4} = 2700,$$

     dove il primo addendo conta tutti gli anagrammi, il secondo/terzo termine conta gli anagrammi che fissano la prima/seconda delle due I, e il quarto termine conta gli anagrammi che fissano entrambe le I.
   - In alternativa, gli anagrammi richiesti sono

     $$\binom{6}{2} \cdot \frac{6!}{4} = 2700,$$

     dove il binomiale rappresenta i modi di scegliere le posizioni in cui sistemare le due I, e il termine successivo rappresenta i possibili anagrammi del resto.

4. L'osservazione fondamentale è che ogni elemento dell'insieme può solo essere fisso, oppure andare a finire in un elemento che a sua volta resta fisso. Le funzioni richieste che hanno esattamente k punti fissi sono

$$\binom{5}{k} \cdot k^{5-k},$$

in cui il binomiale conta i modi di scegliere i k punti fissi, e la potenza conta i modi di mappare i restanti $5-k$ punti nell'insieme dei k punti fissi. Di conseguenza, il numero richiesto è

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot k^{5-k} = 0 + 5 + 80 + 90 + 20 + 1 = 196.$$

5. Indichiamo con ℓ la lunghezza dei tre segmenti uguali. Osserviamo che il triangolo ADE è isoscele e, con le notazioni standard, $AE = 2\ell\cos\alpha$. Guardando al lato AC, ne segue che

$$\ell(2\cos\alpha + 1) = 10.$$

Ora $\cos\alpha$ si calcola facilmente utilizzando il teorema del coseno nel triangolo ABC.

Per chi volesse cimentarsi in approcci analitici, probabilmente strada facendo occorrerà discutere e scartare la soluzione $DE = 10$ (a che configurazione corrisponde?).

6. Dalla ciclicità segue che $\angle MDA = \angle MEC$, da cui la similitudine $MDA \sim MEC$, da cui l'uguaglianza $MD = ME$. Ma allora il triangolo DME è rettangolo isoscele e quindi, conoscendo la sua area, deduciamo che $MD = ME = 4$.

Ora si tratta di risolvere un semplice triangolo in cui conosciamo due lati e un angolo di 45° (uhm, è così terribile che l'angolo non sia quello compreso tra i due lati noti?).

7. Si chiede sostanzialmente di determinare l'immagine di n^{120} modulo 2019, il che si riduce allo stesso problema modulo 3 e modulo 673 (per quale misterioso motivo?).

   - Modulo 3 le classi sono le stesse dei quadrati, cioè 0 e 1.
   - Modulo 673 abbiamo la classe 0 e le classi di $120k$ modulo 672 (e perché mai? perché poi trattare lo 0 a parte?). Essendo $(120, 672) = 24$, si ottengono quindi tutti e soli i 28 multipli di 24 (ma cosa vuol dire?).

   In conclusione abbiamo 2 classi modulo 3 e 29 classi modulo 673, per un totale di 58 classi.

8. Scriviamo l'equazione nella forma

$$p^a = b^2 - 36 = (b+6)(b-6)$$

e distinguiamo due casi.

   - Se $b - 6 = 1$, allora si trova la soluzione $(p, a, b) = (13, 1, 7)$.
   - Se $b - 6 > 1$, allora necessariamente $b + 6 = p^A$ e $b - 6 = p^B$ per opportuni esponenti $A > B > 0$. Sottraendo si deduce (come?) che p può essere solo 2 o 3. Ora potenze di 3 che distano 12 non ce ne sono, e le uniche potenze di 2 che distano 12 sono 16 e 4, da cui la soluzione $(p, a, b) = (2, 6, 10)$.

     In alternativa, in questo secondo caso si può anche osservare che p^B divide p^A, quindi $b - 6$ divide $p + 6$, e pertanto $b - 6$ divide 12 (e perché mai?).

9. Il punto fondamentale è che deve essere necessariamente (perché mai?)

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^4-p(x)-p\left(\frac{x}{x-1}\right)\equiv 0.$$

Sviluppando la quarta potenza con il binomio di Newton, con ragionamenti di crescita deduciamo (come?) che $p(x)$ deve essere di quarto grado e monico. Sostituendo $x=0$ deduciamo che il termine noto è nullo. Resta dunque $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$. Sostituendo, facendo il denominatore comune ed espandendo (basta farlo sui termini di grado più alto), troviamo che $a=4$, $b=10$ e $c=20$.

Non resta che verificare che quella trovata è effettivamente una soluzione, cosa che segue dalla fattorizzazione

$$(x+y)^4-p(x)-p(y)=(xy-x-y)(4x^2+4y^2+6xy+10x+10y+20).$$

Serve davvero fare la verifica?

10. Il minimo numero possibile di interi è 2. Questo segue da alcune osservazioni.

- Considerando $m=1$ deduciamo che il primo o l'ultimo numero sono interi.
- Considerando $m=2018$ deduciamo che la somma di tutti i numeri è intera.
- Considerando $m=1009$ deduciamo che è intera sia la somma dei primi 1009 numeri, sia la somma degli ultimi 1009 numeri (perché da entrambe le parti?).
- Considerando $m=1010$ deduciamo che la somma di metà più uno dei numeri, da una parte o dall'altra, è intera, e quindi per differenza uno tra x_{1008} e x_{1010} è intero.
- Per vedere che due interi bastano, si può per esempio considerare la configurazione in cui $x_1=x_{1010}=0$ e tutti gli altri numeri sono $1/2$. In questo caso tutte le somme U_{2k} e P_{2k+1} sono intere.

11. Sia G l'intersezione delle rette AB e CD. Nel triangolo AGC abbiamo che AD è altezza e bisettrice, quindi il triangolo è isoscele. Per simmetria rispetto ad AD si deduce allora che $\angle ACL=\angle AGL=\gamma$. Per la ciclicità di $ELDG$ si ha pure che $\angle EDL=\gamma$.

Ma allora $FDCA$ è ciclico e quindi $\angle AFC=\angle ADC=90°$.

12. Distinguiamo alcuni casi.

- Se a è dispari otteniamo che
$$9^a-7^a\equiv 2 \pmod 8,$$
quindi l'unica possibilità è $9-7=2$.
- Se a è pari, ma con un fattore dispari, diciamo $a=2^k\cdot D$, allora
$$9^a-7^a=9^{2^k\cdot D}-9^{2^k\cdot D}=\left(9^{2^k}-7^{2^k}\right)\cdot\text{dispari},$$
il che non è cosa buona (ma perché quell'altro termine è dispari?).

- Se $a = 2^k$, allora per induzione si dimostra (ma come?) che

$$9^a \equiv 1 + 2^{k+3} \pmod{2^{k+5}} \qquad \text{e} \qquad 7^a \equiv 1 - 2^{k+3} \pmod{2^{k+5}},$$

  e quindi

$$9^a - 7^a \equiv 2^{k+4} \pmod{2^{k+5}}.$$

  Di conseguenza, l'unico caso che sopravvive (e perché mai?) è $9^2 - 7^2 = 32$.