Stage Senior Pisa 2019 – Test Iniziale

Tempo concesso: 150 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia M la più piccola costante reale tale che

$$(a+b)(b+c)(c+d) \leq M$$

per ogni quaterna (a,b,c,d) di numeri reali positivi tali che $a+b+c+d=2019$.
Determinare quale dei seguenti numeri è intero.

(A) $16M^2$ **(B)** $4\sqrt{M}$ **(C)** M^3 **(D)** $2M$ **(E)** $2\sqrt[3]{M}$

2. Sia m il minimo dell'espressione

$$(x+2018)(x+2019)(x+2020)(x+2021)$$

al variare di x nell'insieme dei numeri reali.
Allora...

(A) m è intero **(B)** $m > -1$ è razionale ma non intero

(C) $m < -1$ non è razionale **(D)** $m > -1$ non è razionale

(E) $m < -1$ è razionale ma non intero

3. Siano r ed s le due soluzioni dell'equazione

$$7x^2 + \sqrt{77}\,x = a.$$

Determinare per quale dei seguenti valori del parametro a il numero $\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{s^2}$ *non* è intero.

(A) 7 **(B)** $\dfrac{1}{7}$ **(C)** $\dfrac{1}{14}$ **(D)** 1 **(E)** $\dfrac{1}{77}$

4. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y)$$

per ogni coppia di numeri razionali x e y.

- Alberto afferma: "in $\mathcal{S}$ c'è un'unica funzione non iniettiva".
- Barbara afferma: "in $\mathcal{S}$ c'è un'unica funzione surgettiva".
- Cristina afferma: "l'insieme $\mathcal{S}$ ha infiniti elementi".

Chi ha ragione?

(A) Nessuno **(B)** Solo Alberto e Cristina **(C)** Solo Barbara **(D)** Tutti

(E) Solo Alberto e Barbara

5. All'ultimo stage interplanetario è stato dimostrato che esiste un'unica successione a_0, a_1, a_2, ... di numeri *reali positivi* tali che $a_{2019} = 2019$ e

$$10a_{n-1} = a_n + 2a_{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$
Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

(A) a_{9102} è intero **(B)** a_{2010} è intero **(C)** a_n è un numero razionale per ogni $n \geq 1$

(D) Esiste un intero $n \geq 2019$ tale che $a_n \geq 2019^{2019}$ **(E)** La successione è crescente

6. Sia M il numero dei modi di disporre le cifre da 1 a 9 in una tabella 3×3, usando ogni cifra esattamente una volta, in modo che la somma dei numeri di ogni riga e di ogni colonna sia sempre dispari.
Determinare quale dei seguenti numeri divide M.

(A) 100 **(B)** 2^7 **(C)** 450 **(D)** 720 **(E)** 3^5

7. Determinare quante sono le parole di 19 lettere che soddisfano le seguenti condizioni:

- sono costituite unicamente dalle lettere `A` e `B`,
- iniziano e finiscono con una lettera `A`,
- non contengono mai due lettere `A` consecutive,
- non contengono mai tre lettere `B` consecutive.

(A) 72 **(B)** 57 **(C)** 114 **(D)** 65 **(E)** 81

8. Per ogni intero positivo n, indichiamo con $s(n)$ la somma delle cifre della rappresentazione in base 10 di n (ad esempio $s(2019) = 12$). Poniamo quindi

$$S := \sum_{n=1000}^{1999} s(n).$$

Determinare il *più grande* primo che divide S.

(A) 29 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 23 **(E)** 13

9. Alcuni amici stanno considerando una scacchiera 100×100, che vorrebbero tassellare (al solito modo, cioè rispettando la quadrettatura, senza sforare dai bordi o creare sovrapposizioni) usando mattonelle 3×1 e 1×3. Presto si rendono conto che qualcosa deve restare scoperto.

   - Alberto afferma: "è possibile lasciare scoperto un solo quadratino in un vertice".
   - Barbara afferma: "comunque si scelga un quadratino della scacchiera, è possibile lasciare scoperto solo quello".
   - Cristina afferma: "è possibile lasciare scoperto solo un quadrato 2×2 in un vertice".
   - Dario afferma: "è possibile lasciare scoperto solo un quadrato 2×2, purché in una posizione opportuna".

   Chi ha ragione?

   (A) Tutti tranne Barbara **(B)** Tutti tranne Cristina **(C)** Tutti

   (D) Solo Alberto e Dario **(E)** Solo Alberto

10. Alberto e Barbara giocano con 2 pile di monete. Ad ogni turno, il giocatore a cui tocca può togliere una moneta da una pila a sua scelta, oppure togliere una moneta da ciascuna delle due pile (ovviamente non si possono togliere monete da pile vuote). Inizia Alberto, poi si prosegue a turno. Perde chi non ha più a disposizione delle mosse valide.
    Determinare per quale delle seguenti configurazioni iniziali del numero di monete nelle due pile esiste una strategia vincente per Barbara.

    (A) $(2019^{2019}, 2019^{2019})$ **(B)** $(2019^{2019}, 2020^{2020})$ **(C)** $(2019^{2020}, 2019^{2019})$

    (D) $(2020^{2019}, 2020^{2020})$ **(E)** $(2019^{2020}, 2020^{2019})$

11. Siano A, B, C tre punti nello spazio tali che $AB = AC = 15$ e $BC = 24$. I tre lati del triangolo ABC sono tangenti ad una sfera di raggio 6.
    Determinare la distanza tra il centro della sfera ed il piano su cui giace il triangolo ABC.

    (A) $2\sqrt{5}$ **(B)** 4 **(C)** $2\sqrt{3}$ **(D)** $3\sqrt{2}$ **(E)** $\dfrac{9}{2}$

12. Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia D un punto sull'ipotenusa BC tale che $AB = AD$. Sia E un punto sul cateto AC tale che $ED = EC$. Sappiamo che $AB = 4$ ed $EC = 3$.
Determinare il rapporto $\dfrac{DC}{DB}$.

(A) $\dfrac{3}{2}$ **(B)** $\dfrac{4}{5}$ **(C)** $\dfrac{4}{3}$ **(D)** 2 **(E)** $\dfrac{3}{4}$

13. Nel piano cartesiano, una circonferenza ω passa per i punti $(6, 13)$ e $(12, 11)$. Le due rette tangenti alla circonferenza in quei due punti si incontrano sull'asse x.
Determinare l'area del cerchio racchiuso da ω.

(A) $\dfrac{85}{8}\pi$ **(B)** $\dfrac{83}{8}\pi$ **(C)** $\dfrac{87}{8}\pi$ **(D)** $\dfrac{21}{2}\pi$ **(E)** $\dfrac{43}{4}\pi$

14. In un triangolo acutangolo ABC il seno dell'angolo in A è $3/5$ e la circonferenza circoscritta ha raggio unitario.
Determinare la lunghezza del segmento che congiunge il vertice A con l'ortocentro.

(A) $\dfrac{4}{5}$ **(B)** $\dfrac{8}{5}$ **(C)** $\dfrac{6}{5}$ **(D)** $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ **(E)** $\sqrt{3}$

15. Sia ABC un triangolo acutangolo, sia H il suo ortocentro, e sia O il suo circocentro. Sappiamo che $\angle ACB = 25°$ e $\angle HAO = 50°$.
Determinare l'ampiezza di $\angle ABC$.

(A) $60°$ **(B)** $65°$ **(C)** $70°$ **(D)** $75°$ **(E)** $80°$

16. Sia $D = 2.000.000.000$ (due miliardi).
Determinare quanti sono gli interi positivi che dividono D e sono quadrati perfetti o cubi perfetti (o entrambi).

(A) 46 **(B)** 29 **(C)** 25 **(D)** 37 **(E)** 42

17. Tutti sanno che l'espressione decimale del fattoriale di 19 è la seguente:

$$19! = 121.6x5.100.40y.832.z00,$$

dove x, y e z sono cifre incognite.
Determinare $x^2 + y^3 + z^4$.

(A) 80 **(B)** 528 **(C)** 90 **(D)** 346 **(E)** 9

18. Sia d il massimo comun divisore tra tutti i numeri della forma

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{12}^2) \cdot (a_1 a_2 \cdots a_{12})^2$$

al variare di a_1, a_2, ..., a_{12} nell'insieme degli interi.
Determinare quale delle seguenti relazioni è corretta.

(A) $d = 1$ **(B)** $d > 20$ **(C)** $11 \leq d \leq 20$ **(D)** $6 \leq d \leq 10$ **(E)** $2 \leq d \leq 5$

19. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^{2019} + y^{2017}.$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

(A) Per ogni y intero, esiste x intero tale che $f(x, y)$ è multiplo di 5

(B) Per ogni x intero, esiste y intero tale che $f(x, y)$ è multiplo di 7

(C) Per ogni x intero, esiste y intero tale che $f(x, y)$ è multiplo di 5

(D) Per ogni y intero, esiste x intero tale che $f(x, y)$ è multiplo di 7

(E) Esistono interi positivi dispari x e y tali che $f(x, y)$ è multiplo di 8

20. Siano a, b, c, d numeri interi positivi che verificano le seguenti tre relazioni:

$$a^5 = b^4, \qquad c^3 = d^2, \qquad c - a = 19.$$

Determinare $d - b$.

(A) 629 **(B)** 279 **(C)** 135 **(D)** 431 **(E)** 757

Test Iniziale 2019 – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	A	A	E	B	D	D	A	D	D	A	A	A	B	D	E	B	C	D	E

Test Iniziale – "Aiutini"

1. La più piccola costante reale con la proprietà richiesta è $M = 2019^3/4$.

   Infatti, detta $f(a, b, c, d)$ la funzione da massimizzare, basta osservare che

   $$f(a, b, c, d) \leq f(0, a + b, c + d, 0).$$

   Detto brutalmente, per massimizzare il prodotto conviene trasferire tutto il valore di a su b e tutto il valore di d su c. A questo punto abbiamo dimostrato che

   $$(a + b)(b + c)(c + d) \leq (a + b)(a + b + c + d)(c + d).$$

   Ora il termine centrale lo conosciamo, mentre per AM–GM il prodotto dei due laterali è massimo quando sono uguali. Ma non era vietato avere delle variabili uguali a zero?

2. Si tratta di dimostrare che $m = -1$.

   Traslando tutto in modo da avere un'espressione simmetrica rispetto a $x = 0$ (e perché mai lo facciamo? e soprattutto, perché possiamo farlo?) ci ritroviamo con la funzione

   $$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{9}{4}\right).$$

   Vista come una funzione quadratica nella variabile x^2, questa ha minimo per $x^2 = 5/4$, ed un facile conto mostra che il minimo è proprio -1.

3. Il numero richiesto non è intero nel caso $a = 7$.

   Dette in generale r ed s le radici di un polinomio di secondo grado del tipo $ax^2 + bx + c$, sfruttando le ben note (a chi?) relazioni

   $$r + s = -\frac{b}{a}, \qquad r \cdot s = \frac{c}{a},$$

   troviamo che

   $$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2},$$

   che nel nostro caso diventa

   $$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{77 + 14a}{a^2}.$$

   A questo punto basta sostituire.

4. Le uniche soluzioni dell'equazione funzionale sono $f(x) = x$ e $f(x) = 0$.

   - Ponendo $a := f(0)$ e sostituendo $y = 0$ nell'equazione troviamo che
   $$f(f(x)) = f(x) - a.$$
   Da questa sola osservazione, se sappiamo che $f(x)$ è surgettiva, possiamo dedurre (e come?) che f è una traslazione e successivamente, sostituendo bovinamente nell'equazione funzionale, trovare che $a = 0$.
   - Anche se non sappiamo nulla circa la surgettività, la formula trovata precedentemente ci permette di riscrivere l'equazione funzionale nella forma
   $$f(x - y) - a = f(x) - f(y),$$
   la quale è equivalente (sì, ma come si dimostra?) alla forma più classica
   $$f(z + w) = f(z) + f(w) - a.$$
   - Quella appena trovata è una equazione di Cauchy leggermente modificata, e per un fatto noto di teoria (noto a chi?) le sue soluzioni su $\mathbb{Q}$ sono tutte funzioni affini, cioè del tipo $f(x) = mx + n$. A questo punto una nuova bovina sostituzione nell'equazione iniziale permette di trovare i valori ammissibili di m ed n.

   Si potrebbe dimostrare, usando le basi di Hamel (le che? di chi?), che se invece cercassimo funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora esisterebbero soluzioni molto più esotiche.

5. Si tratta di dimostrare che $a_n = 2019 \cdot 2^{n-2019}$.

   Sostanzialmente abbiamo la ricorrenza
   $$a_{n+1} = -\frac{a_n}{2} + 5a_{n-1},$$
   le soluzioni della quale sono tutte (non ci sarà sotto della teoria anche questa volta?) della forma
   $$a_{n+1} = a \cdot 2^n + b \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^n.$$
   Ora dalla positività deduciamo (come?) che $b = 0$, e a questo punto dal valore per $n = 2019$ troviamo il valore del parametro a.

6. Si tratta di dimostrare che $M = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$.

   Dove si devono disporre i numeri dispari? In tutto sono 5, dunque dovranno stare 3 in una riga e 1 in ciascuna delle altre due righe (perché?). Discorso analogo vale per le colonne. Di conseguenza, i numeri dispari occuperanno un'intera riga e un'intera colonna (e basta).

   Sia la riga, sia la colonna occupate dai dispari si possono scegliere in 3 modi, poi a quel punto possiamo permutare i dispari in 5! modi ed i pari in 4! modi (e perché vorremmo permutarli?). Questo porta al conto
   $$M = 3 \cdot 3 \cdot 5! \cdot 4!.$$

7. Come sempre “divide et impera” e vai di ricorsione (mai sentita questa storia?).

   Le parole di n lettere del tipo proposto possono terminare solo con `AB`, `BA`, `BB`. Indichiamo con a_n, b_n , c_n il numero di parole di n lettere delle tre tipologie (perché tanta generalità se a noi interessa solo b_{19}?). Queste tre successioni risolvono la ricorrenza

   $$a_{n+1} = b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + c_n, \qquad c_{n+1} = a_n.$$

   Partendo dalla seconda, con i soliti passaggi (soliti per chi?) arriviamo a

   $$b_{n+1} = a_n + c_n = b_{n-1} + a_{n-1} = b_{n-1} + b_{n-2},$$

   e non ci resta che iterare questa ricorrenza a mano partendo dai casi bassi $b_3 = 1$ (solo `ABA`), $b_4 = 1$ (solo `ABBA`), $b_5 = 1$ (solo `ABABA`).

   Con il senno di poi (è sempre così!) si poteva scrivere direttamente la ricorrenza per i b_n senza nemmeno introdurre gli a_n e i c_n. Infatti, basta osservare che gli unici modi di ottenere una parola ammissibile di $n + 1$ lettere sono di aggiungere `BA` ad una parola ammissibile di $n - 1$ lettere, oppure aggiungere `BBA` ad una parola ammissibile di $n - 2$ lettere. Ma perché non si sono altre opzioni? Non è che alla fine la divisione in tre tipologie era più chiara?

8. Si tratta di dimostrare che $S = 14500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 29$.

   Per questo impostiamo un double counting (che bestia è?) cercando di capire ogni cifra quante volte contribuisce alla somma. La cifra 1 delle migliaia compare 1000 volte, dunque il suo contributo è 1000. Sulle centinaia ogni cifra da 1 a 9 (anche lo 0 in realtà, ma quello contribuisce poco) compare esattamente 100 volte (perché?). Idem per le decine e le unità. Ne segue che la somma è

   $$S = 1000 + 300 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 14500.$$

9. La soluzione segue da varie osservazioni.

   - Alberto ha ragione. Tutto il quadrato meno un vertice si tassella immediatamente (basta completare la riga e poi resta un rettangolo con un lato multiplo di 3).
   - Barbara ha torto. Coloriamo la scacchiera con 3 colori in diagonale (che vuol dire?). Il colore che finisce ai vertici (ma è sempre lo stesso?) sarà rappresentato una volta in più degli altri (perché proprio lui?). Inoltre ogni mattonella, comunque disposta, occupa sempre una casella per colore. Quindi se eliminiamo una casella di uno dei colori che non stanno ai vertici, non possiamo farcela a ricoprire tutto (e perché?).

     Qui non serve, ma questo stesso argomento (colorando diagonalmente prima in una direzione e poi nell’altra) permette di caratterizzare esattamente le caselle che possono restare scoperte.
   - Cristina ha torto. Supponiamo che il quadrato tolto sia in alto a sinistra (e chi ci autorizza a supporlo?). Coloriamo la prima riga con il pattern ABCABC. . . , la seconda riga con il pattern BCABCA. . . , e poi procediamo diagonalmente (cosa vuol dire tutto questo?). Tolte le quattro caselle eliminate, resteranno quindi 3333 A, 3331 B e 3332 C. Potremo quindi piazzare solo 3331 mattonelle, che palesemente non bastano.

- Dario ha ragione. Con un po' di pazienza e sistematicità si vede (come?) che se togliamo il quadrato costituito dalla seconda e terza casella della seconda e terza riga, allora ciò che rimane si riesce a tassellare.

10. Le configurazioni favorevoli a Barbara sono tutte e sole quelle che hanno inizialmente un numero pari di monete in entrambe le pile.

    Si tratta come sempre (ma sempre quando?) di fare due verifiche.

    - Se un giocatore trova una configurazione del tipo DD, PD o DP (con ovvio significato dei simboli), può sempre lasciare all'avversario la configurazione PP.
    - Se un giocatore trova la configurazione PP, allora è *costretto* a lasciare una delle restanti tre.

    Questa teoria andrebbe capita e interiorizzata una volta per tutte.

11. La distanza richiesta è $2\sqrt{5}$.

    Per dimostrarlo, osserviamo intanto che l'intersezione tra la sfera ed il piano che contiene il triangolo è la circonferenza inscritta nel triangolo. Con facili calcoli (quali?) e formule standard (mah?) si ottiene che la base del triangolo è lunga 9, e la circonferenza inscritta ha raggio 4.

    Ora per calcolare la distanza tra il piano ed il centro della sfera basta disegnarsi una sezione della sfera mediante un piano passante per il centro della sfera e perpendicolare al piano del triangolo. Ci riduciamo ad un teorema di Pitagora il cui conto finale è

    $$\sqrt{6^2 - 4^2}.$$

12. Il rapporto richiesto è $3/2$, e più precisamente $DC = 12/\sqrt{5}$ e $DB = 8/\sqrt{5}$.

    La dimostrazione segue da alcune osservazioni.

    - I triangoli ABD ed EDC sono isosceli.
    - Tenendo conto degli angoli in D, si ha che il triangolo ADE è rettangolo in D con lati di lunghezza 3, 4, 5.
    - A questo punto le lunghezze dei lati di ABC sono note.
    - Indicato con K il punto medio di BD, e con H il punto medio di DC, i triangoli AKD ed EHC sono simili ad ABC. A questo punto tutte le lunghezze si calcolano.

13. Si tratta di dimostrare che il raggio della circonferenza è $\sqrt{85/8}$.

    Poniamo per semplicità $A = (6, 13)$, $B = (12, 11)$, e indichiamo con O il centro di ω. Osserviamo che le due tangenti si incontreranno sull'asse di AB (davvero?), e che tale asse è la retta di equazione $y = 3x - 15$, dal momento che passa per il punto medio $M = (9, 12)$ di AB ed ha il coefficiente angolare giusto (e come determino quello giusto?).

    Tale asse interseca l'asse x nel punto $P = (5, 0)$. Ora dalla similitudine dei triangoli PMA e PAO (e perché sarebbero simili?) deduciamo che $PM : AM = PA : OA$. Visto che le lunghezze di PM, AM e PA sono ormai note, dalla proporzione ricaviamo la lunghezza di OA, che è proprio il raggio richiesto.

14. Detto H l'ortocentro, si tratta di dimostrare che $AH = 8/5$.

    Utilizzando le notazioni standard per gli elementi di un triangolo, osserviamo che nel triangolo ABH abbiamo che

    $$\angle ABH = 90° - \alpha, \qquad \angle BHA = \alpha + \beta = 180° - \gamma, \qquad \angle HAB = 90° - \beta.$$

    Applicando il teorema dei seni in ABH deduciamo quindi che

    $$\frac{AB}{\sin(180° - \gamma)} = \frac{AH}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{AH}{\cos\alpha},$$

    da cui (cosa stiamo utilizzando ora?)

    $$AH = AB \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2R\sin\gamma \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2R\cos\alpha.$$

    Non resta ora che osservare che $\cos\alpha = 4/3$ (a saperla usare, questa trigonometria!).

15. Si tratta di dimostrare che $\angle ABC = 75°$.

    Utilizzando le notazioni standard, osserviamo che $\angle BAD = \angle EAC = 90° - \beta$ (urka, questi due fatti sembrano interessanti, ma sono davvero noti?). Imponendo ora che la somma degli angoli interni di ABC faccia $180°$ troviamo l'equazione

    $$180° = \beta + 2 \cdot (90° - \beta) + 50° + 25°,$$

    da cui la conclusione.

    Non sarebbe male osservare e ricordare per il futuro che le due rette che congiungono un vertice con ortocentro e circocentro sono sempre simmetriche rispetto alla bisettrice (bellino!). Questo è un po' come dire che ortocentro e circocentro sono coniugati isogonali (ok, per oggi è troppo).

16. Mostriamo che i divisori che sono quadrati o cubi perfetti sono 42.

    Osserviamo intanto che $D = 2^{10} \cdot 5^9$. I divisori di D saranno tutti del tipo $2^a \cdot 5^b$ con a compreso tra 0 e 10 (estremi compresi) e b compreso tra 0 e 9 (estremi compresi).

    - Il divisore è un quadrato perfetto se e solo se $a \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, quindi in totale abbiamo 30 possibilità.
    - Il divisore è un cubo perfetto se e solo se $a \in \{0, 3, 6, 9\}$ e $b \in \{0, 3, 6, 9\}$, quindi in totale abbiamo 16 possibilità.
    - Il divisore è una sesta potenza (e perché contiamo pure questi?) se e solo se $a \in \{0, 6\}$ e $b \in \{0, 6\}$, quindi in totale abbiamo 4 possibilità.

    Per il principio di inclusione-esclusione (cosa?) le possibilità totali sono $30 + 16 - 4 = 42$.

17. Si tratta di mostrare che $x = 4$, $y = 8$, $z = 0$.

    Il fatto che $z = 0$ segue dal fatto che fino a 19 ci sono tre multipli di 5 (e allora?). Per determinare x e y, esaminiamo le congruenze modulo 9 e modulo 11.

- Poiché 19! è multiplo di 9, per il noto criterio (quale?) $33+x+y$ dovrà essere multiplo di 9, cioè $x+y \equiv 3$ modulo 9 (chiaro questo passaggio?).
- Poiché 19! è multiplo di 11, per il noto criterio (ma è davvero noto?) $20+y-13-x$ dovrà essere multiplo di 11, cioè $x-y \equiv 7$ modulo 11 (chiaro come sopra, suppongo).

Dalle due congruenze, considerando che x e y sono cifre, deduciamo che deve essere

$$x+y \in \{3, 12\} \qquad \text{e} \qquad x-y \in \{7, -4\}.$$

Considerando le varie possibilità, che in realtà non sono poi così tante (come se ne tagliano alcune a priori?), troviamo i valori indicati.

18. Dimostriamo che $d = 12$.

    Ponendo $a_1 = \ldots = a_{12} = 1$ il numero viene esattamente 12, quindi d è comunque un divisore di 12. Non resta ora che dimostrare che tutti i numeri della forma proposta sono effettivamente multipli di 12.

    - Per mostrare che sono tutti multipli di 3, basta distinguere due casi. Se almeno uno degli a_i è multiplo di 3, allora il numero è multiplo pure di 9. In caso contrario, i quadrati sono tutti congrui a 1 modulo 3 (ma davvero?), e quindi la somma dei quadrati è multipla di 3.
    - Per mostrare che sono tutti multipli di 4, basta distinguere due casi. Se almeno uno degli a_i è pari, allora il numero è multiplo di 4. In caso contrario, i quadrati sono tutti congrui a 1 modulo 4 (ma davvero?), e quindi la somma dei quadrati è multipla di 4.

19. La soluzione segue da diverse osservazioni.

    - Modulo 5 occorre ridurre gli esponenti modulo 4 (ma che discorsi sono questi?) e quindi

      $$f(x,y) \equiv x^3 + y \pmod 5.$$

      Ora sia x^3 sia y sono surgettive modulo 5, quindi fissata una qualunque delle due variabili, possiamo scegliere l'altra in modo che $f(x,y)$ sia multiplo di 5. Certo, non sarebbe male avere chiari questi discorsi!
    - Modulo 7 occorre ridurre gli esponenti modulo 6 (come sopra, giusto?) e quindi

      $$f(x,y) \equiv x^3 + y^5 \pmod 7.$$

      Ora y^5 è surgettiva modulo 7, mentre x^3 non lo è. Ne segue (come? perché?) che dato x possiamo sempre scegliere y in maniera tale che $f(x,y)$ sia multiplo di 7, ma il viceversa non è sempre vero.
    - Basta prendere $x \equiv 1$ e $y \equiv -1$ modulo 8 per essere sicuri che $f(x,y)$ è multiplo di 8.

20. Si tratta di dimostrare che $a = 3^4$, $b = 3^5$, $c = 10^2$, $d = 10^3$.

    Infatti dalla relazione $a^5 = b^4$ deduciamo (come?) che $a = x^4$ e $b = x^5$ per un opportuno intero x, mentre dalla relazione $c^3 = d^2$ deduciamo che $c = y^2$ e $d = y^3$ per un opportuno intero y. A questo punto la relazione $c - a = 19$ diventa

    $$19 = y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2),$$

    da cui non è difficile concludere che le uniche possibilità sono $x = 3$ e $y = 10$.

Stage Senior Pisa 2019 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Determinare la più grande costante reale M tale che
$$x^4 + y^4 + 5z^4 \geq Mx^2yz$$
per ogni terna (x, y, z) di numeri reali.

2. Determinare quale resto si ottiene dividendo il polinomio $x^{911} - x^{2019}$ per $x^2 + x + 1$.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" che iniziano e terminano con una *consonante*.

4. Ci sono 2^{16} modi di colorare di bianco o di nero le caselle di una tabella 4×4. Indichiamo con $\mathcal{C}$ l'insieme di tutte queste colorazioni. Per ogni colorazione $C \in \mathcal{C}$, indichiamo con $N(C)$ il numero di caselle nere che stanno nella prima colonna.

   Calcolare
$$\sum_{C \in \mathcal{C}} N(C).$$

5. Una retta ℓ interseca una circonferenza ω_1 in due punti distinti A e B. Una seconda circonferenza ω_2 è tangente esternamente a ω_1 in C, ed è tangente a ℓ in D. La retta CD interseca nuovamente ω_1 in E.

   Sapendo che $AE = 10$, determinare la lunghezza di BE.

6. Sia ABC un triangolo con l'angolo in B ottuso, e sia O il suo circocentro. La bisettrice dell'angolo $\angle AOB$ interseca il lato AC in D.

   Sapendo che $\angle OBC = 40°$, determinare l'ampiezza di $\angle ODA$.

7. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $3n^3 - 2019$ è positivo e multiplo di 2016.

8. Determinare il più grande valore *intero* del parametro a per cui l'equazione
$$x^3 - ax + 2a = 2$$
ammette almeno una soluzione *intera*.

Problemi dimostrativi

9. Determinare se esistono funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + f(x) + f(y)) = y + f(x) + f(y)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

10. Sia $n \geq 2$ un numero intero. Un gruppo di n stagisti è seduto in circolo intorno ad un tavolo rotondo. Inizialmente, ogni stagista ha un numero pari di caramelle. Al primo turno, ogni stagista dona metà delle sue caramelle al vicino alla sua destra. Successivamente, ad ogni turno ogni stagista dona metà delle sue caramelle al vicino alla sua destra. Se in un qualche momento qualcuno si ritrova con un numero dispari di caramelle, allora Sam (il capo degli organizzatori), mosso a compassione, gli regala una caramella in modo da ristabilire la parità.

    Dimostrare che ad un certo punto tutti avranno lo stesso numero di caramelle.

11. Due circonferenze ω_1 e ω_2, con centro in O_1 e O_2 rispettivamente, si intersecano in due punti distinti E ed F. La retta O_1E interseca nuovamente ω_1 in A e ω_2 in C. La retta O_2E interseca nuovamente ω_1 in D e ω_2 in B. Sia M il punto medio di AD, e sia N il punto medio di BC.

    Dimostrare che le circonferenza circoscritte ai triangoli FMD e FNC si intersecano nuovamente in un punto della retta DC.

12. Determinare tutte le coppie (a, b) di interi positivi per cui esiste un numero primo p tale che

$$9^a + 3^a - 2 = 2p^b.$$

Test Finale – Risposte

1. $M = 2^{3/2} \cdot 5^{1/4}$
2. $-x - 2$
3. 1800
4. 2^{17}
5. 10
6. 140°
7. 183
8. 85
9. Non esistono
10. ...
11. ...
12. L'unica coppia è $(1, 1)$

Test Finale – "Aiutini"

1. La più grande costante è $M = 2^{3/2} \cdot 5^{1/4}$.

   Applicando due volte AM–GM (come? a cosa? ma non servono numeri positivi?) otteniamo che
   $$x^4 + y^4 + 5z^4 \geq x^4 + 2\sqrt{5}\, y^2 z^2 \geq 2\sqrt{2\sqrt{5}}\; x^2 yz.$$

   A questo punto però *non è finita*, in quanto bisogna trovare una terna per cui la costante è davvero ottimale. Come si trova questa terna? Perché bisogna davvero trovarla?

   In alternativa, per la prima parte si poteva usare direttamente AM–GM *pesata* (o che bestia è mai questa?) con pesi 1/2, 1/4, 1/4. Ma a quale terna andava applicata?

2. Il resto è $-x - 2$. Per vederlo ci sono almeno due modi.

   - Utilizzando le congruenze tra polinomi (esistono pure queste?) ricaviamo che $x^3 \equiv 1$ e $x^2 \equiv -x - 1$ modulo $x^2 + x + 1$ (da dove arrivano?), e di conseguenza
     $$x^{911} - x^{2019} \equiv x^2 - 1 \equiv -x - 2 \pmod{x^2 + x + 1}.$$

   - Il resto sarà del tipo $ax + b$ (perché?). Inoltre esisterà un polinomio $Q(x)$ tale che
     $$x^{911} - x^{2019} \equiv (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b.$$

     Sostituendo ora ad x le due radici di $x^2 + x + 1$ (e perché mai questo è utile?) si trovano (come?) i valori di a e di b.

3. Il numero di anagrammi è
   $$\binom{6}{3} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} \cdot 3 = 1800,$$
   in cui il binomiale rappresenta il numero di modi in cui si possono scegliere le posizioni in cui staranno le consonanti (cosa sono quel 6 e quel 3?), la frazione rappresenta il numero di modi di piazzare le consonanti in quelle posizioni (perché?), ed il 3 finale il numero di modi di piazzare le vocali.

4. Ragionando brutalmente, possiamo dire che "mediamente" ogni casella della tabella è nera metà delle volte, dunque $N(C)$ vale in media 2, e di conseguenza la somma richiesta è uguale al doppio del numero delle possibili configurazioni, e quindi 2^{17} (capito qualcosa?).

   Più formalmente, indichiamo con $N_1(C)$ la funzione che vale 1 se la casella in alto a sinistra è nera, e 0 altrimenti. Si osserva che le configurazioni che hanno $N_1(C) = 1$ sono esattamente 2^{15} e dunque
   $$\sum_{C \in \mathcal{C}} N_1(C) = 2^{15}.$$

Un discorso analogo vale per le funzioni $N_i(C)$ definite analogamente guardando il colore della i-esima casella della prima colonna. Ora con un *double counting* (mostro mitologico?) si conclude che

$$\begin{aligned}\sum_{C\in\mathcal{C}} N(C) &= \sum_{C\in\mathcal{C}}(N_1(C)+N_2(C)+N_3(C)+N_4(C)) \\ &= \sum_{C\in\mathcal{C}} N_1(C)+\sum_{C\in\mathcal{C}} N_2(C)+\sum_{C\in\mathcal{C}} N_3(C)+\sum_{C\in\mathcal{C}} N_4(C) \\ &= 4\cdot 2^{15}.\end{aligned}$$

Il discorso si estende facilmente a tabelle di dimensioni qualunque e a sottoinsiemi più complicati della prima colonna (la cosa rilevante è solo il numero di caselle che si vanno a testare).

5. Si tratta di dimostrare che $AE = BE$, cioè che E è il punto medio dell'arco AB in cui si trova. Questo si può fare in almeno due modi, sostanzialmente equivalenti.

   - Consideriamo l'omotetia con centro in C che manda ω_1 in ω_2. Questa manda D in E, e manda la tangente in D a ω_2, cioè la retta ℓ, nella tangente in E a ω_1. Di conseguenza, questa tangente sarà parallela ad ℓ, il che è possibile solo se E è il punto medio dell'arco AB. Questi discorsi andrebbero capiti per bene.
   - Indicata con ℓ_1 la tangente in E a ω_1, e con ℓ_2 la tangente comune alle due circonferenze in C, si verifica facilmente (ma davvero?) che i due angoli che ℓ ed ℓ_1 dormano con la retta CD sono uguali a due angoli opposti al vertice in C.

6. Si tratta di dimostrare che $ODBC$ è ciclico, da cui $\angle ODC = \angle OBC = 40°$, e per differenza $\angle ODA = 140°$.

   In realtà, tutti gli angoli presenti in figura si determinano in funzione degli angoli del triangolo ABC. In particolare, utilizzando le notazioni standard avremo che $\angle AOB = 2\gamma$, da cui $\angle AOD = \gamma$ e $\angle OAB = \angle OBA = 90° - \gamma$. A questo punto $\angle OAC$ e OBC di determinano per differenza, a anche $\angle ODC$ si calcola.

7. Il minimo valore di n con la proprietà richiesta è 193.

   Dopo aver osservato che $2016 = 32 \cdot 7 \cdot 9$, il problema si riduce (come?) al sistema di congruenze (che fine ha fatto il 9?)

$$\begin{cases} n^3 \equiv 1 & \pmod{32}, \\ n^3 \equiv 1 & \pmod{7}, \\ n^3 \equiv 1 & \pmod{3}. \end{cases}$$

   Il sistema si riduce (perché?) a

$$\begin{cases} n \equiv 1 & \pmod{32}, \\ n \equiv 1, 2, 4 & \pmod{7}, \\ n \equiv 1 & \pmod{3}. \end{cases}$$

   Limitandosi alle congruenze modulo 32 e 3, deduciamo che $n \equiv 1$ modulo 96 (e perché?). Ora osserviamo che 1 è troppo piccolo, 97 non va bene modulo 7, mentre 193 va bene.

8. Il massimo valore possibile del parametro a è 85.

   Scriviamo l'equazione nella forma

$$a = \frac{x^3 - 2}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 + \frac{6}{x - 2}.$$

   Le coppie (a, x) di interi che soddisfano questa relazione sono un numero finito, e si trovano imponendo che $x - 2$ sia un divisore di 6. Il valore massimo di a si trova quando $x = 8$, e viene 85.

9. L'equazione funzionale proposta non ha soluzioni. Di questo ci sono varie dimostrazioni. Ne segnaliamo alcune. Nel seguito, indichiamo con $P(x, y)$ l'espressione contenuta nell'equazione (tecnicamente si tratta di un "predicato").

   - Poniamo $a = x + f(x) + f(y)$.
     - Applicando f al testo deduciamo che $f(f(a)) = a$.
     - Calcoliamo $P(a, 0)$ e $P(f(a), 0)$, e osserviamo che i lhs sono uguali. Dall'uguaglianza dei rhs deduciamo che $f(a) = a$ e quindi

$$x + f(x) + f(y) = a = f(a) = f(x + f(x) + f(y)) = y + f(x) + f(y),$$

       da cui l'assurdo $x = y$ (e perché sarebbe assurdo?).
   - Poniamo $d = f(0)$.
     - Calcolando $P(0, y)$ deduciamo che $f(d + f(y)) = y + d + f(y)$.
     - Calcolando $P(x, d + f(y))$, grazie alla relazione precedente deduciamo che

$$f(x + f(x) + y + d + f(y)) = d + f(y) + f(x) + y + d + f(y).$$

     - Osserviamo ora che, nell'espressione precedente, il lhs è simmetrico in x e y, dunque anche il rhs deve essere simmetrico. Imponendo questa simmetria (cosa vuol dire di preciso?), troviamo la relazione $y + f(y) = x + f(x)$, da cui si deduce (come?) che f deve essere affine (cioè?). Da qui si conclude (cosa?) per bovina sostituzione.
   - Come nella soluzione precedente poniamo $d = f(0)$.
     - Se sapessimo che $d = 0$ e che f è iniettiva, allora concluderemmo facilmente (davvero?) calcolando $P(x, 0)$ e semplificando una f (cosa vuol dire?).
     - Per dimostrare l'iniettività basta confrontare $P(7, y_1)$ e $P(7, y_2)$ (davvero? e perché usare quel 7?).
     - Per determinare d, calcoliamo $f(6d)$ in due modi diversi. Per questo basta sviluppare nell'ordine $P(0, 0)$, $P(0, 2d)$, $P(0, 3d)$, $P(2d, 2d)$.
   - Come nella soluzione precedente dimostriamo che f è iniettiva (questo facciamolo comunque, che qualche punto potrebbe valerlo!).
     - Calcolando $P(x, -f(x))$ e $P(-f(x), x)$ (qual è la ragione "morale" di queste due scelte?) si deduce che

$$f(x + f(x) + f(-f(x))) = f(-f(x)) \qquad \text{e} \qquad f(f(-f(x))) = x + f(-f(x)) + f(x).$$

– Semplificando f dalla prima uguaglianza (ma si fanno queste cose?), e confrontando le due espressioni, deduciamo che

$$f(f(-f(x))) = -f(x).$$

– Calcolando $P(x, f(-f(x)))$ (altra sostituzione molto naturale!) deduciamo che $f(x) = f(-f(x))$ e quindi $f(x) = -x$ (e dagliela con queste semplificazioni!). Da qui è bovina sostituzione.

10. La soluzione segue (come?) da alcune osservazioni.

- Il massimo numero di caramelle posseduto da qualche stagista è non crescente durante il processo.
- Il minimo numero di caramelle posseduto da qualche stagista è non decrescente durante il processo.
- Se il minimo è lo stesso in due turni consecutivi, e non siamo già nella situazione costante, allora il numero di stagisti che ha il numero minimo di caramelle decresce strettamente da una volta all'altra (perché? non vale un risultato analogo per il massimo?). Ne segue che il minimo cresce strettamente dopo un certo numero di passaggi.

E come ci conclude a questo punto?

11. Segnaliamo due soluzioni.

- Per proprietà standard degli angoli opposti nei quadrilateri ciclici, la tesi è equivalente a dimostrare che $\angle FMA = \angle FNC$. Se ora sapessimo che FAD è simile a FCB (occhio all'ordine dei vertici!), l'uguaglianza di angoli precedenti seguirebbe guardando opportunamente le mediane (gulp: come può venire in mente tutto questo?). Per dimostrare la similitudine
  – gli angoli in F si spostano in E,
  – da ovvie ciclicità segue che $\angle FAD = \angle FEB = \angle FCB$.
- Sfruttando i molti angoli retti in figura, dimostriamo (va fatto!) nell'ordine che
  – $ABCD$ è ciclico,
  – le rette AD, BC ed EF concorrono in un certo punto G,
  – i punti A, F, B sono allineati,
  – E è l'ortocentro di ABG,
  – detto L il punto medio di AB, la circonferenza di diametro GL passa per i punti M, F, N,
  – come nell'altra soluzione, la ciclicità di $GMFN$ è equivalente alla tesi.

12. L'unica soluzione è $(a, b) = (1, 1)$ con $p = 5$.

Per dimostrarlo, riscriviamo l'equazione nella forma

$$(3^a + 2)(3^a - 1) = 2p^b,$$

e osserviamo che i due fattori al lhs sono coprimi perché la loro differenza è 3, che non divide nessuno dei due essendo a positivo (e allora?). Siccome i fattori sono entrambi maggiori di 1, ne segue che uno è 2 e l'altro è p^b. Ora non è così difficile (davvero?) stabilire chi è il 2, ed il gioco è fatto.