Algebra

1. Dimostrare che
$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$
per ogni terna di numeri reali positivi a, b, c tali che $a+b+c=1$.

2. Sia $n \geq 3$, e siano $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ numeri reali positivi tali che
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1.$$
Dimostare che
$$a_1(b_1+a_2)+a_2(b_2+a_3)+\ldots+a_{n-1}(b_{n-1}+a_n)+a_n(b_n+a_1)<1.$$

3. Dimostrare che, comunque si scelgano numeri reali x_1,...,x_n, si ha che
$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2}<\sqrt{n}.$$

Combinatoria

1. Sia $M = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$ tale che:

   - gli a_{ij} sono numeri reali ≥ 0;
   - in ogni riga e in ogni colonna c'è almeno un coefficiente > 0;
   - se $a_{ij} > 0$, allora la somma dei coefficienti della i-esima riga è uguale alla somma dei coefficienti della j-esima colonna.

   Dimostrare che $m = n$.

2. Ad una tavola rotonda sono seduti n stagisti. Maria, che è la capitana del gruppo, ha n medaglie e vuole distribuirle secondo la regola seguente: ad ogni turno sceglie uno stagista (eventualmente anche se stessa) che ha almeno due medaglie e gli dice di darne una a ciascuno dei suoi vicini.

   Determinare per quali valori di n è possibile arrivare alla situazione in cui ogni stagista ha una medaglia.

3. Sia $S = \{1, 2, \ldots, 15\}$. Determinare il più piccolo intero positivo n per cui esistono sottoinsiemi A_1, A_2, $\ldots$, A_n di S tali che

   - $|A_i| = 7$ per ogni $i = 1, \ldots, n$;
   - $|A_i \cap A_j| \leq 3$ per ogni $1 \leq i < j \leq n$;
   - ogni terna di elementi di S è contenuta in qualcuno degli A_i.

Geometria 1

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza e siano M, N, P, Q su AB, BC, CD, DA i punti di tangenza. Siano E, F le ulteriori intersezioni di BP e BQ con la circonferenza.

   Dimostrare che MN, EF, AC e PQ concorrono.

2. Dimostrare che i centri di similitudine dei cerchi inscritto e circoscritto sono i coniugati isogonali dei punti di Gergonne e Nagel.

3. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso circoscritto ad una circonferenza di centro I, di modo che I non stia su AC. Le diagonali AC, BD si intersecano in E. La perpendicolare a BD per E interseca IA e IC in P, Q rispettivamente.

   Dimostrare che $PE = EQ$.

Geometria 2

4. Sia ABC un triangolo e P un punto del piano. Dimostrare che

$$BC \cdot PC \cdot PB + AC \cdot PA \cdot PC + AB \cdot PA \cdot PB \geq AB \cdot BC \cdot AC$$

e determinare i casi in cui si ha uguaglianza.

5. Sia ABC un triangolo di raggio circoscritto R, baricentro G e circocentro O. Mostrare che

$$GA + GB + GC + 3\frac{OG^2}{R} \geq 3R$$

e discutere i casi di uguaglianza.

6. Sia ABC un triangolo, e sia M_1 il punto medio di BC. Tracciamo per M_1 la perpendicolare alla bisettrice di $B\widehat{A}C$. Similmente tracciamo per M_2, punto medio di AC, la perpendicolare alla bisettrice di $A\widehat{B}C$ e per M_3, punto medio di AB, la perpendicolare alla bisettrice di $B\widehat{C}A$. Queste tre rette formano un triangolo XYZ.

   Dimostrare che il circocentro di XYZ è il punto medio tra incentro e ortocentro di ABC.

Teoria dei Numeri

1. Un numero intero positivo n si dice k-regolare se:

   (a) n è divisibile per almeno k numeri primi distinti;

   (b) esistono k divisori distinti di n, $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ tali che $1+d_2+\cdots+d_k = n$.

   Dimostrare che esitono numeri k-regolari per ogni $k \geq 6$.

2. Sia p un numero primo tale che p^2 divide $2^{p-1} - 1$ e sia n un numero naturale.

   Dimostrare che $(p-1)(p! + 2^n)$ ha almeno 3 divisori primi distinti.

3. Sia n un intero positivo. Dimostrare che esiste un intero positivo m tale che $2^m + m$ è divisibile per n.

Miscellanea

1. Sia dato un insieme X di 2007 punti nel piano, a tre a tre non allineati. Dimostrare che per ogni $P \in X$ il numero dei triangoli T i cui vertici appartengono a X e tali che P è interno a T è pari.

2. Dimostrare che, per ogni intero positivo n, il numero

$$\binom{2n+1}{0}2^{2n} + \binom{2n+1}{2}2^{2n-2} \cdot 3 + \binom{2n+1}{4}2^{2n-4} \cdot 3^2 + \ldots + \binom{2n+1}{2n}3^n$$

   è la somma dei quadrati di due interi consecutivi.

3. Sia $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio tale che:

   - k è pari;
   - i coefficienti $a_0, \ldots, a_k$ sono tutti interi dispari;
   - $f(x)$ divide $(x+1)^n - 1$.

   Dimostrare che n è divisibile per $k+1$.

Balkan Selection Test

1. In una gara matematica, ognuno dei 20 partecipanti ha risolto almeno uno dei problemi proposti.

   Dimostrare che è sempre possibile scegliere un sottoinsieme S non vuoto dei problemi proposti (eventualmente anche tutti) in modo tale che il numero di partecipanti che hanno risolto tutti i problemi di S sia pari.

2. Per ogni intero positivo n poniamo

   $$a_n = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]\right),$$

   dove le parentesi quadre indicano la parte intera.

   (a) Dimostrare che esistono infiniti valori di n per cui $a_{n+1} > a_n$.

   (b) Dimostrare che esistono infiniti valori di n per cui $a_{n+1} < a_n$.

3. Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo.

   Dimostrare che

   $$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3.$$

4. Sia $ABCDE$ un pentagono convesso tale che

   $$B\widehat{A}C = C\widehat{A}D = D\widehat{A}E, \qquad A\widehat{B}C = A\widehat{C}D = A\widehat{D}E.$$

   Sia P il punto di incontro delle diagonali BD e CE.

   Dimostrare che la retta AP passa per il punto medio di CD.

5. Sia data una successione di numeri reali $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tali che

   $$a_{n+1} = [a_n] \cdot \{a_n\}$$

   per ogni $n \in \mathbb{N}$ (si ricorda che, dato un numero reale α, la sua parte intera $[\alpha]$ è definita come il più grande intero minore od uguale ad α, e $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ indica la sua parte frazionaria).

   Dimostrare che $a_{i+2} = a_i$ per ogni intero i sufficientemente grande.

6. È data una fila di n lampadine ($n \geq 2$). Ogni lampadina può essere accesa o spenta. Ogni secondo viene modificato simultaneamente lo stato di tutte le lampadine secondo la seguente regola:

- se una data lampadina e le sue vicine sono nello stesso stato, quella data lampadina viene spenta (si intende che le 2 lampadine ai lati della fila hanno una sola vicina ciascuna, mentre tutte le altre lampadine hanno 2 vicine);
- in ogni altro caso la lampadina viene accesa.

All'inizio tutte le lampadine sono spente tranne quella più a sinistra che è accesa.

(a) Dimostrare che esistono infiniti valori di n per cui ad un certo punto le lampadine saranno tutte spente.

(b) Determinare se esistono valori di n dispari per cui ad un certo punto le lampadine saranno tutte spente.

(c) Determinare se per $n = 1040$ ad un certo punto le lampadine saranno tutte spente.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Risposte

A1. ...

A2. ...

A3. ...

C1. ...

C2. Si può se e solo se n è dispari.

C3. 15

G1. ...

G2. ...

G3. ...

G4. Consideriamo il triangolo ABC. Si ha uguaglianza se e solo se P coincide con uno dei 3 vertici oppure è l'ortocentro del triangolo.

G5. Si ha uguaglianza se e solo se il triangolo è equilatero.

G6. ...

N1. ...

N2. ...

N3. ...

M1. ...

M2. ...

M3. ...

BST1. ...

BST2. ...

BST3. ...

BST4. ...

BST5. ...

BST6. (a) ... (b) Non esistono (c) Le lampadine non saranno mai tutte spente.

Aiutini

A1. Vi sono almeno 2 approcci.

- Riscrivere la disuguaglianza nella forma
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{a(a+c)} \geq \frac{3}{2},$$
quindi applicando Chebycheff su 2 terne opportune ridursi a dimostrare che
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{c(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$
la quale è la Nesbit nelle variabili $1/a$, $1/b$, $1/c$.
- Omogenizzare e sviluppare bovinamente i conti. Si arriva a
$$3abc(a+b)(b+c)(c+a)+2abc\sum_{\text{cyc}} a(a+b)(a+c) \leq 2(b^2c+c^2a+a^2b)(a+b)(b+c)(c+a),$$
che con un po' di pazienza si riscrive come
$$\sum_{\text{sym}}(a^4bc+5a^3b^2c+2a^2b^2c^2) \leq \sum_{\text{sym}}(a^4bc+4a^3b^2c+a^2b^2c^2+a^3b^3)+2\sum_{\text{cyc}} a^4b^2.$$

A2. Fissati gli a_i, per quali valori dei b_i il LHS è massimo? Si giunge così alla disuguaglianza
$$\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}+a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1 < 1.$$
Per fare questa si possono portare i prodotti al RHS e fare il quadrato (perchè si può?), quindi riportare i prodotti (ora doppi prodotti...) al LHS. Nota: funziona anche se ci sono tutti i prodotti misti e non solo quelli ciclici.

A3. Vi sono almeno 3 approcci.

- Indicati con $a_1, \ldots, a_n$ i vari addendi al primo membro, applicando Cauchy-Schwarz ci si riduce a dimostrare che la somma degli a_i^2 è minore di 1. Posto ora $y_i = x_i^2$ si ritrova una disuguaglianza del PreIMO 2007.
- Per ogni $a > 0$ poniamo
$$f_n(a) = \sup\left\{\frac{x_1}{a+x_1^2}+\frac{x_2}{a+x_1^2+x_2^2}+\ldots+\frac{x_n}{a+x_1^2+\ldots+x_n^2}\right\},$$
dove il sup si intende esteso a tutte le possibili n-uple $(x_1,\ldots,x_n)$.
Si dimostra allora che $f_n(a) = a^{-1/2}f_n(1)$ e quindi
$$LHS \leq \frac{x_1}{1+x_1^2}+f_{n-1}(1+x_1^2) = \frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{f_n(1)}{\sqrt{1+x_1^2}},$$
da cui non è difficile concludere per induzione.

- Indichiamo con $y_1, \ldots, y_n$ i vari denominatori. Usando ora le disuguaglianze
$$\frac{1}{y_1} \le \frac{1}{\sqrt{y_1}}, \qquad \frac{1}{y_i} \le \frac{1}{\sqrt{y_i y_{i-1}}}$$
ci si riduce a dimostrare che
$$\sqrt{1-\frac{1}{y_1}} + \sqrt{\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{y_{n-1}}-\frac{1}{y_n}} < \sqrt{n}.$$
Ora basta applicare Cauchy-Schwarz e quasi tutto telescopizza.

C1. Due colonne che hanno un elemento non nullo nella stessa posizione hanno la stessa somma. Consideriamo il grafo in cui i vertici sono le colonne e 2 vertici sono uniti se e solo se le rispettive colonne hanno un elemento non nullo nella stessa posizione. Cosa accade se il grafo è connesso? Come sono fatte 2 colonne che stanno in componenti connesse diverse?

C2. Se n è dispari si costruisce una distribuzione per induzione.

Se n è pari numeriamo gli stagisti con $0, 1, 2, \ldots, n-1$ a partire da Maria e procedendo in uno dei 2 versi. Moltiplichiamo il numero di ogni partecipante per il numero di medaglie che possiede, poi sommiamo su tutti i partecipanti. Come varia questa quantità?

Limitatamente al caso in cui $n \equiv 2$ modulo 4, un altro invariante, comunque sufficiente a concludere, è la somma del numero di medaglie possedute dai ragazzi "uno sì e uno no".

C3. Se $n \le 14$ c'è un elemento che sta in al più 6 insiemi. Quante sono le terne in S che contengono questo elemento? Quante sono le terne in ogni sottoinsieme che contengono questo elemento?

Per mostrare che 15 sottoinsiemi bastano si può pensare ai piani nello spazio proiettivo 3-dimensionale su $\mathbb{Z}_2$.

G1. Approccio proiettivo: applicare una proiettività che mandi il punto B all'infinito e la circonferenza in un'altra circonferenza (perché esiste?). Così si dimostra che QP, MN ed FE concorrono.

Sia ora S l'intersezione tra MN e PQ, T l'intersezione tra MQ ed NP, X l'intersezione tra MP ed NQ. Allora $\mathrm{Pol}(T) = SX$ per un fatto generale. Inoltre $\mathrm{Pol}(C) = NP$, $\mathrm{Pol}(A) = MQ$, dunque $\mathrm{Pol}(AC) = T$ e quindi $\mathrm{Pol}(T) = AC$. Ma noi già sappiamo che $\mathrm{Pol}(T)$ passa per S.

In questo modo si dimostra tra l'altro che A, X, C, S sono allineati, così come T, B, X, D. Inoltre X è anche il punto di incontro di AC e BD.

Un'altra possibilità istruttiva da esplorare è la seguente: indicata con Y l'intersezione tra AB e CD e con Z l'intersezione tra BC e DA, applicare la proiettività che manda A, Y, Z, C, rispettivamente, in $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,1)$. Dove va a finire il quadrilatero $ABCD$? E il cerchio? Cosa serve ora per concludere?

G2. Intanto serve un lemma sulle omotetie: se P è un centro di similitudine di Γ_1 e Γ_2, e Q è un centro di similitudine di Γ_2 e Γ_3, allora un centro di similitudine di Γ_1 e Γ_3 sta sulla retta PQ.

Sia ora ABC il triangolo. Indichiamo ora con Γ_i la circonferenza inscritta e con Γ_c quella circoscritta. Applichiamo l'inversione con centro in A e raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$. Dove vanno a finire i punti B e C? Dove va a finire il lato BC? Detta Γ_3 l'immagine di Γ_i, qual è un centro di similitudine di Γ_i e Γ_3? E dove sta un centro di similitudine di Γ_c e Γ_3? Grazie al lemma questo basta per sistemare il Gergonne.

Per il Nagel occorre usare come Γ_3 l'immagine della circonferenza ex-inscritta tangente esternamente il lato BC.

Un approccio alternativo si basa sull'uso delle coordinate trilineari. I punti di Nagel e Gergonne hanno trilineari $(a/(b+c-a), \ldots, \ldots)$ e $(1/(a(b+c-a)), \ldots, \ldots)$, ovvero $(1/(1-\cos\alpha), \ldots, \ldots)$ e $(1/(1+\cos\alpha), \ldots, \ldots)$.

Il circocentro O e l'incentro I hanno trilineari esatte $(R\cos\alpha, R\cos\beta, R\cos\gamma)$ e (r, r, r), dunque i centri di similitudine $(rO+RI)/(R+r)$ e $(RI-rO)/(R-r)$ hanno trilineari $(1+\cos\alpha, \ldots, \ldots)$ e $(1-\cos\alpha, \ldots, \ldots)$ e sono dunque i coniugati isogonali di Nagel e Gergonne.

Comprendere questi calcoli equivale ad imparare ad usare le coordinate trilineari!

G3. Il primo problema è fare la figura, in quanto le diagonali risultano sempre "quasi perpendicolari": se non riesce, consiglio di farla con un quadrilatero non circoscritto. Applicando Menelao nel triangolo PQI, rispetto ad una opportuna retta, si dimostra che la tesi è equivalente a $PA \cdot IC = AI \cdot CQ$. Siano ora A', C', I' le proiezioni di A, C ed I su BD (occhio alla configurazione: I' deve essere esterno al segmento $A'C'$). Con qualche calcolo la tesi risulta equivalente alla similitudine tra i triangoli $AA'I'$ e $CC'I'$, la quale a sua volta si riconduce all'uguaglianza tra gli angoli $B\widehat{I'}A$ e $B\widehat{I'}C$.

Questa si può dimostrare con un conto di numeri complessi. Prendendo la circonferenza con raggio 1 e centro nell'origine, ed indicando con k, l, m, n i punti di tangenza, i vertici del quadrilatero sono espressioni del tipo $a = 2kn/(k+n)$, $b = 2lk/(l+k)$ e cicliche, mentre I' risulta (fare il calcolo di I' in maniera efficiente è di per sé un esercizio molto istruttivo)

$$i' = \frac{\overline{d}b - \overline{b}d}{2(\overline{d} - \overline{b})} = \frac{mn - kl}{m + n - k - l}.$$

Si tratta infine di dimostrare che

$$\frac{(b - i')^2}{(a - i')(c - i')}$$

è un numero reale. Per far questo può essere utile scrivere i numeratori di $b - i'$, $a - i'$, $c - i'$, rispettivamente, come

$$2kl(m+n) - (k+l)(kl+mn),$$
$$(k-n)(kl+mn-2kn),$$
$$(l-m)(kl+mn-2ml).$$

Cosa succede quando si vanno a fare i coniugati?

G4. Usare i numeri complessi con origine in P. A questo punto la disuguaglianza data è esattamente la disuguaglianza triangolare. I casi non banali di uguaglianza si traducono nell'avere che certi rapporti sono numeri reali positivi, cioè con argomento uguale a zero. Questo a sua volta si traduce in una relazione tra gli angoli del triangolo e gli angoli con vertici in P.

G5. Riscrivere la disuguaglianza nella forma

$$GA \cdot OA + GB \cdot OB + GC \cdot OC + 3OG^2 \geq 3R^2,$$

quindi passare ai vettori (con centro in O) e minorare i prodotti delle norme con i prodotti scalari: si arriva così ad un'identità algebrica.

G6. Usiamo i vettori con centro nel circocentro di ABC. Sia $X'Y'Z'$ il triangolo i cui lati stanno sulle perpendicolari alle bisettrici di ABC passanti per i vertici di ABC. Allora l'omotetia con centro nel baricentro di ABC e fattore $-1/2$ manda $X'Y'Z'$ in XYZ. L'ortocentro di $X'Y'Z'$ è l'incentro di ABC. Dunque non è difficile calcolare, in funzione dell'incentro di ABC, l'ortocentro di XYZ e dunque, sfruttando il Feurerbah, anche il suo circocentro.

N1. Se n è k-regolare, allora $n(n+1)$ è $(k+1)$-regolare. Ora basta cercare una base per l'induzione.

N2. I due fattori del prodotto sono pari e non hanno fattori primi dispari in comune, dunque basta escludere che siano potenze di 2.

Se $p = 2^k + 1$, allora k è a sua volta una potenza di 2, e pertanto $2^{p-1} - 1$ si scompone come prodotto di fattori coprimi uno dei quali è p.

Se $p!$ è differenza di due potenze di 2, allora esiste un numero del tipo $2^a - 1$ che è divisibile per p ma non per p^2: ne segue che l'ordine di 2 modulo p è minore dell'ordine di 2 modulo p^2. In tal caso, per un fatto generale, l'ordine modulo p^2 è uguale all'ordine modulo p moltiplicato per p, il che contraddice l'ipotesi (l'ordine modulo p^2 sarebbe troppo grande).

N3. Supponiamo che n divida $2^m + m$, e sia q un primo maggiore od uguale dei primi che compaiono nella fattorizzazione di n. Poniamo $h = m + \phi(nq)k$. Allora, scegliendo opportunamente k, possiamo fare in modo che nq divida $2^h + h$. Nella scelta di k occorre distinguere il caso in cui q divide n oppure no.

M1. Segnaliamo 2 approcci.

- Dato un punto P in X, applicare il double counting sull'insieme delle coppie (T, Q), in cui T è un triangolo che contiene P e Q è un quadrilatero, 3 vertici del quale costituiscono il triangolo. Si arriva così alla relazione

$$(\text{numero triangoli}) \cdot 2003 = 2 \cdot (\text{numero quadrilateri}).$$

- Consideriamo 2006 punti. Tracciando tutte le rette passanti per 2 qualunque di tali punti si suddivide il piano in un numero finito di regioni convesse (oltre alla regione non limitata esterna). La tesi equivale a dimostrare che ciascuna di tali regioni appartiene ad un numero pari di triangoli. Consideriamo 2 regioni con un lato in comune. Da cosa dipende la differenza tra il numero di triangoli che contiene la prima regione ed il numero di triangoli che contiene la seconda? Come si può concludere a questo punto?

M2. Intanto la somma è uguale a

$$\frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{3})^{2n+1}+(2-\sqrt{3})^{2n+1}\right].$$

Ora la tesi è equivalente a dimostrare che

$$(2+\sqrt{3})^{2n+1}=k^2+1+h\sqrt{3}.$$

A questo (che tra l'altro è un esercizio dell'edizione del 1987 dell'IberoAmerican) si arriva osservando che $(\sqrt{3}\pm 1)^2=4\pm 2\sqrt{3}$, da cui

$$\begin{aligned}\frac{(2+\sqrt{3})^{2n+1}+(2-\sqrt{3})^{2n+1}}{2} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}\right]^2+1\\ &= \left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]^2+1.\end{aligned}$$

Non resta ora che mostrare che il termine tra le parentesi quadre è un intero, ricorrendo al fatto che si tratta del termine generale di una ricorrenza lineare del secondo ordine.

M3. La dimostrazione si può fare in vari step considerando i polinomi modulo 2 (nel senso che i coefficienti sono classi di resto modulo 2). Dall'ipotesi segue che $x^k+\ldots+x+1$ divide $(x+1)^n-1$. Sfruttando i polinomi reciproci (che si ottengono "invertendo i coefficienti") si dimostra che $x^k+\ldots+x+1$ divide anche $(x+1)^n-x^n$.

Da questo si deduce che $x^k+\ldots+x+1$ divide x^n-1 e quindi anche che $x^{k+1}-1$ divide x^n-1 (in questo passaggio serve che k sia pari: perché?). A questo punto la tesi segue con una divisione di polinomi.

BST1. Indichiamo con A_i l'insieme degli studenti che hanno risolto l'i-esimo problema. L'unione degli A_i ha 20 elementi. Calcolandone il numero di elementi mediante il principio di inclusione-esclusione otteniamo una formula con un numero dispari di addendi, uno dei quali dovrà quindi per forza essere pari.

BST2. Indicata con S_n la somma tra parentesi tonde, è facile verificare che

$$a_{n+1}>a_n \iff 1+d(n+1)>S_n,$$

dove $d(n+1)$ indica il numero dei divisori di $n+1$. Basta ora scegliere, nei due casi, $n+1=2^k$ oppure $n+1=$ numero primo sufficientemente grande per avere tale disuguaglianza vera o falsa.

BST3. Indicare i 3 denominatori con x, y, z, ricavare a, b, c da sostituire nei numeratori, quindi applicare AM–QM per maggiorare la somma di 3 radici: in questo modo sarà sufficiente dimostrare che

$$\sqrt{\sum_{\text{cyc}} \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - \frac{yz}{x^2}\right)} \leq 3\sqrt{2}.$$

Fatti i conti e semplificato il semplificabile, quello che resta è Schur nelle variabili xy, yz, zx.

BST4. Sia F l'intersezione tra AD ed EC, e sia G l'intersezione tra AC e BD. Applicando il teorema di Ceva nel triangolo ADC la tesi è equivalente a dimostrare che $AF : FD = AG : GC$, cosa che segue facilmente dalla similitudine tra i quadrilateri $ABCD$ e $ACDE$.

BST5. Se la successione parte positiva, la sua parte intera decresce strettamente ad ogni passaggio, quindi da un certo punto in poi la successione è costantemente zero.

Se la successione parte negativa, la sua parte intera è debolmente crescente e rimane sempre negativa, dunque è costante da un certo punto in poi. Pertanto da un certo punto in poi la successione verifica una ricorrenza lineare del primo ordine, di cui sappiamo calcolare il termine generale. Ora ci sono 2 casi: o la successione è finita nel punto fisso di tale ricorrenza (dunque è costante da lì in poi), oppure l'unico modo di avere parte intera costante è che questa sia -1. A quel punto si verifica che è periodica di periodo 2.

BST6. Il caso delle potenze di 2 si fa per induzione: infatti ad un certo punto ci saranno solo le 2 lampadine centrali accese e da quel momento in poi la situazione è simmetrica rispetto al centro.

Nel caso $1040 = 2^{10} + 2^4$ ad un certo punto saranno accese tutte e sole le prime 1024, poi la 1024-esima e la 1025-esima. A quel punto le configurazioni proseguono simmetricamente (rispetto al punto medio tra la 1024-esima e la 1025-esima) fino a quando saranno accese tutte e sole le ultime 32 lampadine. Tuttavia ad un certo punto erano state accese tutte e sole le prime 32, e quindi d'ora in poi tutto si ripeterà.

Nel caso dispari si può dimostrare per induzione che i blocchi di accese o spente consecutive sono sempre di lunghezza pari, tranne un blocco di lunghezza dispari di lampadine spente che sta alternativamente all'estremo destro o sinistro.

Last but not least

Questi problemi sono il risultato di una selezione operata a partire da oltre 200 problemi, scelti facendo in modo da rappresentare un ampio spettro di tecniche riciclabili altrove. Solo lavorando su questi problemi prima autonomamente e poi seguendo *tutti* gli approcci suggeriti si potrà averne veramente giovamento (e dunque sarà servito a qualcosa il lavoro di tutti coloro che hanno collaborato alla loro selezione).