Algebra – Problemi di ammissione

1. Siano a, b, c numeri reali positivi. Dimostrare che
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

2. Determinare la più grande costante k tale che
$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \geq k\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)^2$$
per ogni quintupla di numeri reali positivi a, b, c, d, e tali che $a+b=c+d+e$.

3. Sia m un intero positivo, e sia a_n la successione definita per ricorrenza da
$$a_0 = \frac{m}{2}, \qquad a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil,$$
dove $\lceil a_n \rceil$ indica il più piccolo intero maggiore od uguale di a_n.
    (a) Determinare tutti gli interi m per cui il primo intero che compare nella successione è a_{2008}.
    (b) Determinare tutti gli interi m per cui nessun numero intero compare nella successione.

Algebra – Sessioni dello stage

4. Siano a, b, c tre numeri reali positivi distinti.

   Dimostrare che
   $$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1.$$

5. Siano a, b, c numeri reali positivi.

   Dimostrare che
   $$\frac{a^3+abc}{b+c}+\frac{b^3+abc}{c+a}+\frac{c^3+abc}{a+b}\geq a^2+b^2+c^2.$$

6. Siano $a_1,\ldots,a_n$ una n-upla di numeri reali, e sia $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$.

   Dimostrare che
   $$\left(\sum_{i\in I}a_i\right)^2\leq\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\left(\sum_{k=i}^{j}a_k\right)^2.$$

   Determinare tutti i casi in cui si ha uguaglianza.

7. Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi di grado pari tale che $p(n)$ è un quadrato perfetto per infiniti valori interi di n.

   Dimostrare che $p(x)$ è il quadrato di un polinomio a coefficienti interi.

8. Determinare tutte le funzioni $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ tali che
   $$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)$$
   per ogni coppia di numeri reali positivi x e y.

Combinatoria – Problemi di ammissione

1. Hanna e Barbera sono 2 prestigiatori (questi sono i loro nomi d'arte, nella realtà si chiamano Alberto e Barbara) che hanno in mente di presentare il seguente gioco.

   Uno spettatore scrive una sequenza di n cifre (decimali) senza farle vedere a Barbera. Successivamente Hanna, sempre di nascosto da Barbera, cancella 2 cifre consecutive nel numero scritto dallo spettatore. A questo punto Barbera vede il numero con le 2 cifre occultate e, pronunciate le magiche parole, indovina le 2 cifre coperte (nel giusto ordine).

   Determinare per quali n i 2 prestigiatori possono concordare una strategia in modo che il gioco riesca sempre.

2. Sono date 100 cassette, ciascuna delle quali contiene mele e arance, in quantità e proporzioni variabili. Determinare il più piccolo intero n con questa proprietà: comunque siano ripartite le mele e le arance, è sempre possibile scegliere n cassette in modo che queste, complessivamente, contengano almeno un terzo delle mele ed almeno un terzo delle arance.

3. Consideriamo una scacchiera 19×19. Un *cavallone* è un pezzo che si sposta sulla scacchiera compiendo delle "L" del tipo "$4+1$", ottenute cioè muovendosi di 4 caselle in una direzione e quindi di una casella in una direzione perpendicolare (il cavallo standard invece compie delle L del tipo "$2+1$").

   (a) Dimostrare che un cavallone può visitare tutte le caselle della scacchiera.

   (b) Siano V la casella posta in un vertice, A una delle 2 caselle ad essa adiacenti, V' la casella posta nel vertice opposto a V. Determinare il minimo numero di mosse necessario per portare un cavallone da A a V'.

Combinatoria – Sessioni dello stage

4. Determinare il numero dei modi di colorare di bianco e nero le 16 caselle di una tabella 4×4 in modo tale che non ci siano 2 caselle nere con un lato in comune.

5. Siano dati un intero positivo n ed un grafo con $3n$ vertici. Si sa che, comunque si scelgano $2n$ vertici, esistono almeno n collegamenti tra di loro.

   Determinare, in funzione di n, il minimo numero di collegamenti presenti nel grafo.

6. Sia $A_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla di numeri reali. Per ogni $k \geq 0$, a partire dalla n-upla $A_k = (x_1, \ldots, x_n)$ costruiamo una nuova n-upla $A_{k+1} = (y_1, \ldots, y_n)$ secondo il seguente algoritmo.

   - Dividiamo $\{1, \ldots, n\}$ in due sottoinsiemi I e J disgiunti in maniera tale che l'espressione
   $$\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right|$$
   assuma il valore minimo possibile. Se c'è più di una partizione che realizza il minimo (e c'è sempre, se non altro per la possibilità di scambiare I e J), ne scegliamo una a caso. Ammettiamo come possibilità anche che I o J siano vuoti, nel qual caso la corrispondente somma la definiamo essere 0.
   - Poniamo $y_i = x_i + 1$ se $i \in I$, e $y_i = x_i - 1$ se $i \in J$.

   Dimostrare che per qualche valore di k la n-upla A_k contiene un elemento x tale che $|x| \geq n/2$.

Geometria – Problemi di ammissione

1. Sia ABC un triangolo acutangolo non isoscele. Sia XY il diametro della circonferenza circoscritta perpendicolare al lato BC, e sia M il punto d'incontro tra XY e BC. Supponiamo di aver nominato i punti in modo tale che $YM > XM$. Sia Z il simmetrico di X rispetto ad M, e sia W il punto medio di AZ.

   (a) Dimostrare che W sta sulla circonferenza di Feuerbach di ABC.

   (b) Dimostrare che MW è perpendicolare ad AY.

2. Sia ABC un triangolo con incentro I. Sia Γ una circonferenza avente centro in I, raggio maggiore del raggio della circonferenza inscritta, e non passante per nessuno dei vertici del triangolo. Sia X_1 l'intersezione tra Γ e la retta AB più vicina a B. Siano X_2 e X_3 le intersezioni tra Γ e la retta BC, con X_2 più vicino a B. Sia X_4 l'intersezione tra Γ e la retta CA più vicina a C. Sia infine K l'intersezione tra le rette X_1X_2 e X_3X_4.

   Dimostrare che AK passa per il punto medio di X_2X_3.

3. Sia O il circocentro di un triangolo ABC. La retta BO incontra il lato AC in B'. La retta CO incontra il lato AB in C'. La retta $B'C'$ incontra la circonferenza circoscritta ad ABC in P e Q.

   Dimostrare che $AP = AQ$ se e solo se $AB = AC$.

Geometria – Sessioni dello stage

4. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, sia O il centro della circonferenza su cui giacciono i suoi vertici, e sia X il punto di incontro delle diagonali. Sia Y l'ulteriore intersezione tra le circonferenze circoscritte ai triangoli ABX e CDX.

   Supponiamo che i punti O, X, Y siano distinti.

   Dimostrare che OY è perpendicolare a XY.

5. Due circonferenze ω_1 e ω_2, con centro in O_1 ed O_2 rispettivamente, sono tangenti esternamente in un punto D, e sono tangenti internamente ad una circonferenza ω nei punti E ed F, rispettivamente. Sia t la tangente comune ad ω_1 e ω_2, e sia AB il diametro di ω perpendicolare a t (abbiamo nominato i punti in modo che A, E ed O_1 stiano nello stesso semipiano delimitato da t).

   Dimostrare che le rette AO_1, BO_2, EF e t sono concorrenti.

6. Sia ABC un triangolo fissato, e siano A_1, B_1, C_1 i punti medi dei lati BC, CA, AB, rispettivamente. Sia P un punto variabile sulla circonferenza circoscritta ad ABC. Le rette PA_1, PB_1, PC_1 incontrano nuovamente la circonferenza circoscritta nei punti A_2, B_2, C_2, rispettivamente.

   Supponiaqmo che i punti A, B, C, A_2, B_2, C_2 siano tutti distinti, e che le rette AA_2, BB_2, CC_2 formino un triangolo.

   Dimostrare che l'area di questo triangolo non dipende da P.

7. Sia ABC un triangolo, G il suo baricentro, S il coniugato isogonale di G.

   Dimostrare che S è il baricentro del suo triangolo pedale (cioè del triangolo i cui vertici sono le proiezioni di S sui lati di ABC).

8. Sia ABC un triangolo. Un cerchio ex-inscritto è tangente al lato BC in N, ed è tangente ai prolungamenti dei lati AB ed AC in M e P, rispettivamente.

   Supponiamo che il punto medio di MP stia sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

   Dimostrare che N, l'incentro ed il circocentro di ABC sono allineati.

9. Due circonferenze Γ_1 e Γ_2 si intersecano in A e B. Sia PQ (con $P \in \Gamma_1$ e $Q \in \Gamma_2$) la tangente comune più vicina ad A. Sia S il punto d'intersezione tra le tangenti in P e Q alla circonferenza circoscritta a PQA. Sia T il simmetrico di B rispetto a PQ.

   Dimostrare che S, T, A sono allineati.

Teoria dei Numeri – Problemi di ammissione

1. Sia n un intero positivo tale che $(n, 2(2^{1386} - 1)) = 1$. Sia $\{a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}\}$ un sistema fondamentale di residui modulo n (cioè gli a_i non hanno fattori primi in comune con n e rappresentano tutte classi di resto diverse modulo n).

   Dimostrare che n divide
   $$a_1^{1386} + a_2^{1386} + \ldots + a_{\varphi(n)}^{1386}.$$

2. (a) Sia d un intero positivo dispari, e sia $n = 2^{2008}d + 1$. Dimostrare che $2^{n-1} + 1$ non è multiplo di n.

   (b) Determinare tutti gli interi positivi n tali che
   $$n|(2^{n-1} + 1).$$

3. (a) Determinare se esiste un insieme X, costituito da 2008 interi positivi distinti, tale che per ogni sottoinsieme non vuoto $Y \subseteq X$ la media aritmetica degli elementi di Y è una potenza perfetta (cioè si scrive nella forma a^b per una qualche scelta degli interi $a > 1$ e $b > 1$).

   (b) Determinare se è possibile fare in modo che anche le medie geometriche siano potenze perfette.

   (c) Determinare se esiste un insieme X, costituito da infiniti interi positivi distinti, tale che per ogni sottoinsieme finito non vuoto $Y \subseteq X$ la media aritmetica degli elementi di Y è una potenza perfetta.

Teoria dei Numeri – Sessioni dello stage

4. Determinare tutte le coppie di interi positivi (m, n) tali che

$$n^5 + n^4 = 7^m - 1.$$

5. Determinare tutte le terne di interi positivi (a, m, n) tali che

$$(a^m + 1) \text{ divide } (a + 1)^n.$$

6. (a) Dimostrare che la somma

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4$$

è divisibile per tutti i primi appartenenti all'intervallo $(n, (4n + 2)/3]$.

(b) Determinare una successione k_n tale che

- $k_n - n$ tende a $+\infty$;
- la somma

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^{2008}$$

è divisibile per tutti i primi appartenenti all'intervallo $(n, k_n]$.

7. Sia a_n la successione definita per ricorrenza da

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = 2a_n^2 - 1.$$

Sia p un fattore primo di un certo a_n, con $n \geq 1$.
Dimostrare che 2^{n+3} divide $p^2 - 1$.

Balkan Selection Test

1. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza Γ, e sia P un punto interno a Γ.

   Dimostrare che almeno uno tra i triangoli PAB, PBC, PCD, PDA ha raggio della circonferenza circoscritta minore del raggio di Γ.

2. Sia $\mathbb{N}^+$ l'insieme degli interi positivi. Consideriamo tutte le funzioni $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ tali che

   $$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

   per ogni scelta degli interi positivi m ed n.

   Determinare i possibili valori di $f(2008)$.

3. Sia X un insieme di 10000 interi, nessuno dei quali è divisibile per 47.

   Dimostrare che esiste un sottoinsieme Y di X, contenente 2008 elementi, tale che, comunque si scelgano a, b, c, d, e in Y, si ha che $a - b + c - d + e$ non è divisibile per 47.

4. Determinare tutte le coppie (x, y) di interi positivi tali che

   $$(7^x - 3^y) \text{ divide } (x^4 + y^2).$$

5. Sia ABC un triangolo isoscele con $AB = AC$, e sia M il punto medio del lato BC. Sia X un punto variabile appartenente al più piccolo degli archi MA della circonferenza circoscritta al triangolo ABM. Sia T un punto, appartenente al quadrante determinato dall'angolo BMA, tale che $\angle TMX = 90°$ e $TX = BX$.

   Dimostrare che $\angle MTB - \angle CTM$ non dipende dalla scelta di X.

6. Determinare tutti gli interi positivi n per i quali è possibile colorare di bianco o di nero i numeri dell'insieme $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ in modo tale che l'insieme $S \times S \times S$ contenga esattamente 189 terne ordinate (x, y, z) tali che

   - x, y, z sono dello stesso colore;
   - $x + y + z$ è divisibile per n.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Risposte

A1. ...

A2. $k = \dfrac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6} + 12}$

A3. (a) Tutti gli interi m della forma $2^{2008}d + 1$, dove d è un numero dispari.
 (b) Solo $m = 1$.

A4. ...

A5. ...

A6. Ci sono 2 casi di uguaglianza:

- n qualunque e tutti gli a_i uguali a 0;
- n dispari, a_i positivo per i dispari e negativo per i pari, e tutti i $|a_i|$ uguali.

A7. ...

A8. L'unica soluzione è $f(x) = 2x$.

C1. $n \geq 101$

C2. Il più piccolo n è 34

C3. (a) ... (b) Il minimo numero di mosse è 9

C4. 1234

C5. $3n$

C6. ...

G1. ...

G2. ...

G3. ...

G4. ...

G5. ...

G6. Detto $A_0B_0C_0$ il triangolo di cui si vuole calcolare l'area, si ha che

$$\text{Area}(A_0B_0C_0) = \frac{1}{2}\text{Area}(ABC).$$

G7. ...

G8. ...

G9. ...

N1. ...

N2. (a) ... (b) Solo $n = 1$

N3. (a) Esiste
(b) È possibile
(c) Non esiste

N4. L'unica soluzione è $(2, 2)$.

N5. Ci sono 3 famiglie infinite di terne (i parametri liberi sono sempre interi positivi qualunque): $(1, m, n)$, $(a, 1, n)$, $(2, 3, n + 1)$.

N6. (a) ... (b) Può andar bene per esempio $k_n = (2008n + 2006)/2007$.

N7. ...

BST1. ...

BST2. I valori possibili sono tutti gli interi da 1 a 2009 (estremi inclusi).

BST3. ...

BST4. L'unica soluzione è $(2, 4)$.

BST5. La differenza richiesta è uguale a metà dell'angolo in A.

BST6. Ci sono 2 soluzioni: $n = 18$ e $n = 27$.

Aiutini

A1. Moltiplicando e semplificando si arriva a

$$\sum_{\text{sym}} \frac{a}{b} \geq \sum_{\text{sym}} \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}},$$

la quale è vera per AM–GM pesata.

A2. Fissata la somma $a+b$, quando è massima $\sqrt{a}+\sqrt{b}$? Quando è minima a^2+b^2? Stessa cosa con $c+d+e$ fissata. Da qui si ottiene una catena di disuguaglianze che parte dal lhs e termina con il rhs (o viceversa).

A3. Se m è della forma $2^k d + 1$, con d numero dispari, allora il primo intero che compare nella successione è a_k. Questo fatto si dimostra facilmente per induzione (bisogna far vedere che in tal caso a_i è della forma $2^{k-i-1} d_i + 1$, con d_i dispari opportuno, per ogni $i < k$).

A4. Segnaliamo 2 approcci.

- Svolti bovinamente i conti, e posto

$$C_1 = \sum_{\text{cyc}} a^2 b, \qquad C_2 = \sum_{\text{cyc}} ab^2,$$

la disuguaglianza da dimostrare diventa

$$|C_1 - C_2| < |C_1 + C_2 - 6abc|.$$

L'argomento del valore assoluto al rhs è positivo (perché?), dunque ci si riconduce a

$$-C_1 - C_2 + 6abc < C_1 - C_2 < C_1 + C_2 - 6abc.$$

Entrambe queste disuguaglianze sono vere per AM–GM (perché le disuguaglianze sono strette?).

- Grazie al valore assoluto, il lhs risulta un'espressione non soltanto ciclica, ma anche simmetrica (perché?). Possiamo allora supporre wlog che sia $a \geq b \geq c$ e asimmetrizzare ponendo $b = c + x$, $a = c + x + y$. Svolti i conti e semplificato il semplificabile, ci riduciamo a

$$\left| 2c \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} \right) + 1 + 2\frac{x}{y} \right| > 1,$$

la quale è vera anche senza il valore assoluto.

A5. Svolti bovinamente i conti, e semplificato il semplificabile, la disuguaglianza diventa

$$\sum_{\text{sym}}(a^5 + a^2b^2c - 2a^3bc) \geq 0,$$

la quale a sua volta è equivalente a

$$\sum_{\text{cyc}} a(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) \geq 0.$$

Posto $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$ questa diventa un caso particolare della disuguaglianza di Schur. In alternativa si può riadattare direttamente una qualunque dimostrazione della disuguaglianza di Schur classica.

A6. La dimostrazione procede seguendo vari passi.

- Alcuni degli a_i sono positivi, altri negativi. Ci basta dimostrare la disuguaglianza nel caso peggiore, cioè quello in cui al lhs compare la somma di tutti i termini positivi, o di tutti i termini negativi (perché?).
- Wlog possiamo supporre che il caso peggiore sia quello in cui al lhs c'è la somma di tutti i positivi (perché?).
- Wlog basta dimostrare la disuguaglianza nel caso in cui n è dispari e gli a_i positivi sono tutti e soli quelli di indice dispari. L'idea fondamentale per ridursi a questo caso è la seguente. Supponiamo che ci siano 2 termini positivi consecutivi. Sostituiamo la n-upla iniziale con una $(n-1)$-upla ottenuta accorpando i 2 vicini e lasciando inalterati i rimanenti. In questo modo il lhs ottimale non cambia, mentre il rhs al più diminuisce. Discorso analogo se ci sono 2 termini negativi vicini o dei termini negativi all'inizio o alla fine.
- A questo punto consideriamo i soli termini del rhs che coinvolgono un numero dispari di addendi, e mostriamo che questi da soli bastano a maggiorare il lhs. Questo segue da QM–AM, avendo però cura di scegliere opportunamente i segni degli argomenti dei quadrati che compaiono al rhs. Il modo migliore per farlo è di accoppiare il termine che va da un dispari i ad un dispari j (preso con il segno positivo), con il termine che va dal pari $i+1$ al pari $j-1$ (preso con il segno negativo): in questo modo quando si va a fare la somma "tutto il tratto centrale scompare" e resta solo $a_i + a_j$.

A7. Sia $2k$ il grado di $p(x)$. I passi fondamentali della dimostrazione sono i seguenti.

- Esistono un polinomio $q(x)$ di grado k, ed un polinomio $r(x)$ di grado al più $k-1$, tali che
$$p(x) = [q(x)]^2 + r(x).$$
Per dimostrarlo si prende un generico polinomio $q(x)$ di grado k a coefficienti incogniti, e si fa vedere che è possibile scegliere tali coefficienti in modo che i termini di $[q(x)]^2$ di grado compreso tra k e $2k$ siano gli stessi di $p(x)$.
Occhio: perché il sistema risultante ha soluzione? Dove stanno i coefficienti di $q(x)$ così ottenuti?

- Dopo essersi liberati dai denominatori, si arriva ad una relazione tra polinomi a coefficienti interi del tipo

$$P(x) = [Q(x)]^2 + R(x),$$

dove $P(x)$ ha grado $2k$, $Q(x)$ ha grado k, ed $R(x)$ ha grado minore od uguale di $k-1$.

- Per valori grandi (in valore assoluto) di n si ha che $R(n)$ è molto più piccolo di $Q(n)$ (perché?). Pertanto o $R(n) = 0$, o $[Q(n)]^2 + R(n)$ è troppo vicino ad un quadrato perfetto per essere a sua volta un quadrato perfetto (perché?). Da questo si deduce (come?) che $R(x)$ è il polinomio nullo.

- Per passare dalla relazione $P(x) = [Q(x)]^2$ a quella richiesta $p(x) = [q(x)]^2$, si può usare il seguente *Lemma di Gauss* (la cui dimostrazione è un utile esercizio sui coefficienti dei polinomi): se 3 polinomi a coefficienti interi verificano $f(x) = g(x)h(x)$, allora il massimo comun divisore tra i coefficienti di $f(x)$ è uguale al prodotto tra il massimo comun divisore tra i coefficienti di $g(x)$ ed il massimo comun divisore tra i coefficienti di $h(x)$.

  Una conseguenza del Lemma di Gauss è anche la seguente: se un polinomio $f(x)$ a coefficienti interi si decompone come prodotto di 2 polinomi a coefficienti razionali, allora $f(x)$ si decompone anche come prodotto di 2 polinomi a coefficienti interi dello stesso grado.

A8. I passi fondamentali della soluzione sono i seguenti.

- Mostrare che $f(x) > x$ per ogni $x > 0$. Se così non fosse, si potrebbe infatti dare dei valori ad x e y in modo da rendere il lhs uguale ad uno dei 2 termini che compaiono al rhs, ottenendo così un assurdo (idea generale: le limitazioni sull'insieme di partenza sono seccanti, quelle sull'insieme di arrivo sono utili).

- Come conseguenza del punto precedente, possiamo considerare la funzione $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definita da $g(x) = f(x) - x$. In termini della funzione g l'equazione funzionale diventa

$$g(z + g(y)) = y + g(z).$$

  Occhio: per quali valori di x e z siamo sicuri che questa relazione vale?

- Mostrare che g è iniettiva. La dimostrazione fatta per assurdo sembra banale, ma invece occorre fare particolare attenzione alla scelta di z.

- Mostrare che

$$g(a + g(b) + g(c)) = g(a + g(b + c))$$

  e dedurne che

$$g(b + c) = g(b) + g(c).$$

  Occhio: per quali valori di a, b, c valgono queste relazioni?

- Mostrare che g è monotona e $g(g(x)) = x$ per ogni $x > 0$ (occhio sempre alle scelte che si devono fare strada facendo).

- Mostrare che l'identità è l'unica funzione che verifica le 2 proprietà di cui al punto precedente.

C1. Sia X l'insieme delle sequenze di n cifre decimali, e sia Y l'insieme delle sequenze di n cifre decimali, di cui 2 consecutive occultate. Per la riuscita del gioco deve esistere una funzione iniettiva da X a Y. Quanti elementi ha X? Quanti elementi ha Y? In questo modo si ricava che $n \geq 101$.

Per esisibire un modo di occultare nel caso $n = 101$ (perché basta farlo in questo caso?), basta occultare come prima cifra quella la cui posizione è data dalla classe modulo 100 di (con ovvio significato dei simboli)

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{101} + 10(a_2 + a_4 + \ldots + a_{100}).$$

Come è possibile ricostruire la sequenza iniziale a partire da quella occultata? Perché la ricostruibilità non segue banalmente dalla disuguaglianza $|X| \leq |Y|$?

C2. Trattandosi di un problema di min/max, la dimostrazione comprende 2 punti.

- *Mostrare che 34 cassette possono servire.* Per far questo basta esibire una particolare distribuzione iniziale per cui effettivamente servono.
- *Mostrare che 34 cassette bastano sempre*, indipendentemente dalla distribuzione iniziale. Per far questo si può ad esempio numerare le casse in modo che $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{100}$ (dove a_i indica la quantità di arance nella cassa i-esima), poi prendere la prima, suddividere le restanti in 33 gruppi (2–3–4, 5–6–7, ..., 98–99–100), ed infine prendere in ogni gruppo quella con la maggior quantità di mele. Perché questa costruzione funziona?

C3. (a) Basta mostrare che da ogni casella si possono raggiungere le caselle ad essa adiacenti. La cosa importante è però far vedere che questo si può fare senza uscire dalla scacchiera!

(b) Intanto è semplice esibire un percorso fatto da 9 mosse. Resta da dimostrare che con meno non si può. Indicando le caselle con coppie (i, j) di interi, un invariante è la parità di $i + j$. Inoltre $i + j$ cresce al più di 5 ad ogni passaggio. Per escludere che si possa fare con 7 mosse, conviene esaminare gli spostamenti nelle 2 direzioni.

C4. Indichiamo con F_n l'n-esimo numero di Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$). I passi fondamentali della dimostrazione sono tre.

- I modi di colorare una striscia $1 \times n$ senza 2 caselle nere adiacenti sono F_{n+2}. Questo è un esercizio classico. Un possibile approccio è il seguente: indicati con B_n e N_n i numeri di colorazioni che terminano con una casella bianca o nera, rispettivamente, si ha che $B_{n+1} = B_n + N_n$ e $N_{n+1} = B_n$ (perché?). Risolvendo questa ricorrenza doppia si ha la tesi.
- I modi di colorare il contorno di un quadrato $n \times n$ (costituito da $4(n-1)$ caselle) senza 2 caselle nere adiacenti sono $F_{n+1} + F_{n-1}$.

- Distinguendo 3 casi a seconda della colorazione del quadratino 2×2 centrale si ottiene la soluzione.

Esiste un approccio alternativo a questo problema, che permetterebbe di trattare tabelle $n \times 4$. L'idea è di distinguere 5 diversi tipi di colorazione, a seconda del pattern che compare nell'ultima riga, e scrivere relazioni ricorrenti per questi 5 tipi. I pattern da considerare per le righe sono i seguenti: 4 caselle bianche, 1 nera ai lati, 1 nera non ai lati, 2 bianche alternate a 2 nere, 2 nere ai lati.

C5. Vi sono almeno 2 approcci che funzionano (e tanti che non portano da nessuna parte ...).

- *Per assurdo.* Supponiamo che il grafo abbia meno di $3n$ collegamenti e mostriamo che esiste un sottoinsieme di $2n$ punti con meno di n collegamenti. Per costruire tale sottoinsieme eliminiamo *gradualmente* dei vertici dal grafo iniziale, togliendo ad ogni passaggio il vertice (o uno dei vertici) con il maggior numero di collegamenti. Nell'iterare n volte il procedimento si presentano 2 casi.
  - Caso 1: per n volte togliano un vertice con almeno 2 collegamenti. Allora abbiamo tolto in tutto almeno ... collegamenti, dunque ne sono rimasti al più ...
  - Caso 2: ad un certo punto restiamo con $2n + k$ vertici, da ciascuno dei quali parte al più un collegamento. In tal caso in totale saranno rimasti al più ... collegamenti, e pertanto dopo le restanti k eliminazioni ...
- *Sfruttando una configurazione minimale.* Scegliamo un sottoinsieme di $2n$ punti con il minimo numero di collegamenti interni, e mostriamo che da ciascuno degli n punti "esterni" partono almeno 2 collegamenti verso punti "interni". Per provare questo fatto (perché basta per concludere?) ragioniamo per assurdo, mostrando che se da un punto P esterno partono meno di 2 collegamenti si contraddice la minimalità. Anche qui conviene distinguere dei casi.
  - Se da P non partono collegamenti ...
  - Supponiamo che da P parta un collegamento verso un punto interno Q al quale arriva almeno un collegamento interno. Che succede se cambio Q con P?
  - Supponiamo che da P parta un collegamento verso un punto interno Q, privo di collegamenti interni. In tal caso deve esistere un punto R interno con almeno 2 collegamenti interni (perché?), quindi ...

C6. Ragioniamo per assurdo, supponendo quindi che tutti gli elementi rimangano in valore assoluto minori di $n/2$. Gli ingredienti fondamentali sono ora 2.

- La *ripetizione delle configurazioni.* Le n-uple possibili sono un numero finito (perché?), dunque prima o poi una si ripeterà.
- Un *"invariante" monotono*, che impedisce le ripetizioni. Questo invariante è la somma dei quadrati degli n elementi della n-upla. Per dimostrarne la monotonia serve come lemma che il minimo che si calcola ad ogni passaggio è sempre minore di $n/2$.

G1. (a) Sia N il punto medio di AB, e sia L il punto medio di AC. La tesi è equivalente alla ciclicità di $MNWL$. Quanto misura $\angle LMN$ (in funzione degli angoli di ABC)? Quanto misurano gli angoli di AWN (si ottengono per similitudine da quelli di AZB)? Quanto misurano gli angoli di AZL? Di conseguenza, quanto misura $\angle LWN$?

(b) Si ha che MW è parallelo ad AX, il quale a sua volta è perpendicolare ad AY.

In alternativa il problema si poteva risolvere con i numeri complessi. Detti a, b, c i vertici (di norma 1), con qualche semplice conto si ottiene (come?) che

$$m = (b + c)/2, \qquad x = m/|m|, \qquad z = 2m - x, \qquad w = 3g/2 - x/2.$$

Ora $3g/2$ è il centro della circonferenza di Feuerbach e $x/2$ ha norma $1/2$, che è proprio il raggio.

Per il secondo punto si ha che $w - m = (a - x)/2$, dunque WM è parallelo ad AX, che a sua volta è perpendicolare ad AY.

G2. Segnaliamo 2 possibili approcci.

- Le rette X_1X_2 e X_3X_4 sono parallele a 2 lati del triangolo i cui vertici sono i punti di contatto della circonferenza inscritta. Inoltre un'omotetia di centro A manda i lati nelle rette indicate ...
- Sia r la parallela a BC passante per A. Sia D l'intersezione tra r e X_1X_2, e sia E l'intersezione tra r e X_3X_4. I triangoli ADX_1 e AEX_4 sono isosceli. Dall'uguaglianza $AX_1 = AX_4$ (perché è vera?) segue quindi che A è il punto medio di DE, da cui la tesi per omotetia dal punto K.

Occhio in ogni caso ai problemi di configurazione: non è detto che Γ intersechi i lati!

G3. Una delle implicazioni è banale. Per l'altra, il punto fondamentale è che $BCB'C'$ è ciclico (somma degli angoli opposti uguale a 180°). Da qui è facile concludere che gli angoli in B e C sono uguali.

Un approccio alternativo si può ottenere "muovendo i punti". Partiamo da una configurazione con un triangolo isoscele con il lato BC parallelo ad un'ipotetica retta orizzontale. In questo caso chiaramente $AP = AQ$. Supponiamo ora di muovere il punto A in senso antiorario sulla circonferenza, tendendo fissi B e C. In questo modo C' "sale" e B' "scende". Di conseguenza la retta $B'C'$ ruota in senso orario, dunque P "sale" e Q "scende". In questo modo A e P si avvicinano, mentre A e Q si allontanano. Con un po' di fatica si riesce a rendere rigoroso questo discorso.

G4. Vi sono almeno 2 approcci.

- Sia P il centro radicale delle 3 circonferenze, e siano T ed U le intersezioni della retta PX con la circonferenza circoscritta al quadrilatero. A questo punto si ha che
  - X sta sulla polare di P (perché?);

– la tesi può essere riscritta nella forma $PY = (PT+PU)/2$, quindi nella forma

$$\frac{2}{PX} = \frac{1}{PU} + \frac{1}{PT}.$$

Non resta ora che dimostrare che tale proprietà vale più in generale per ogni punto X della polare.

Chiamando M il punto medio di UT, N la proiezione di X su PO, Q il punto di tangenza della tangente da P, l'identità richiesta segue dalla similitudine $PNX \sim PMO$, dal teorema di Euclide su OQP, e dalla potenza di P rispetto alla circonferenza.

- Invertire rispetto a P in modo da lasciare ferma la circonferenza circoscritta ad $ABCD$. Per dove passa la circonferenza rispetto alla quale si inverte? A cosa è ortogonale? Detto O' il trasformato di O, si ha che O' sta sulla polare di P (come si costruisce l'immagine di un punto mediante l'inversione?). La tesi è ora equivalente alla ciclicità di $OO'XY$, la quale si dimostra agevolmente sfruttando la potenza di P rispetto alle varie circonferenze.

G5. Segnaliamo 2 approcci.

- *Approccio sintetico.* Sia C l'intersezione tra AE e BF, e sia M il punto medio di CD. L'idea è di mostrare che i triangoli O_1MO_2 ed ABC vengono mandati l'uno nell'altro da un'omotetia con centro nel punto richiesto.

  I passi fondamentali della dimostrazione sono i seguenti.

  – I punti A, D, F sono allineati, e così B, D, E (omotetia: perché?).
  – Il punto C sta sulla retta t e D è l'ortocentro di ABC.
  – Il quadrilatero $CEDF$ è ciclico e la circonferenza ad esso circoscritta ha centro in M.
  – I lati del triangolo O_1MO_2 sono a due a due paralleli ai lati del triangolo ABC (sempre per questioni legate alla perpendicolarità tra un asse radicale e la retta che congiunge i centri). Pertanto esiste un'omotetia che manda un triangolo nell'altro. Tale omotetia ha centro in un punto Q dove concorrono t, AO_1, AO_2.
  – Resta da dimostrare che E, F, Q sono allineati, ma questo segue dal teorema di Pappo applicato alle terne di punti A, O, B e O_2, D, O_1. Nota bene: il teorema di Pappo mostra quindi che AO_1, BO_2 ed EF concorrono, indipendentemente dai punti precedenti. Il difficile del problema è quindi mostrare che il punto in cui concorrono sta su t.

- *"Calcolo tutto" trigonometrico.* Sia P il centro radicale di ω, ω_1, ω_2. Allora P è il centro di una circonferenza ω_3 che passa per D, E, F. Sia ora X l'intersezione tra AO_1 e la retta t. La tesi diventa che X appartiene ad EF (perché basta?), cioè che X sta sull'asse radicale di ω e ω_3. Detto O il centro di ω, dobbiamo quindi dimostrare che

$$PX^2 - PE^2 = OX^2 - OA^2.$$

Per far questo non ci resta che esprimere tutte queste lunghezze in funzione di R (il raggio di ω), r (il raggio di ω_1), ed $\alpha = \angle AOE$.

Qualche suggerimento per fare i calcoli (T indica la proiezione di P su AB, S la proiezione di O_1 su AB):

- calcolare OT e DT;
- mostrare che $PE = PD = r(1 + \cos\alpha)/\sin\alpha$;
- scrivere $PX = PE - DX$ e $OX^2 = OT^2 + (DT + DX)^2$, quindi trasformare la tesi in
$$OT^2 + DT^2 + 2(DT + PE) \cdot DX = R^2;$$
- ricavare $DX = XT - XD$, dove XT è calcolato dalla similitudine tra i triangoli AO_1S e ATX, quindi andare a sostituire nell'identità precedente.

G6. Wlog sia P sull'arco AC, e sia $A_0B_0C_0$ il triangolo di cui ci interessa l'area. I passi fondamentali della dimostrazione sono due.

- I punti A_0, B_0, C_1 sono allineati (e così via ciclicamente): questo segue dal teorema di Pascal applicato ad opportuni esagoni.
- Le rette AA_0, BB_0 e CC_0 sono parallele: questo segue (come?) dalle similitudini $C_0A_1B_0 \sim C_0B_1A$ e $C_0A_1B \sim C_0B_1A_0$.

A questo punto si deduce abbastanza facilmente che

$$\text{Area}(A_0B_0C_0) = \text{Area}(ABC_0) = \frac{1}{2}\text{Area}(ABC).$$

G7. Ci sono almeno due approcci.

- *Approccio algebrico: vettori e trilineari.* In un triangolo di lati a, b, c, se un punto K ha coordinate trilineari $[x : y : z]$, allora in termini vettoriali si ha che
$$\vec{K} = \frac{ax\vec{A} + by\vec{B} + cz\vec{C}}{ax + by + cz}$$
rispetto ad una qualche origine fissata (perché?). Ricordando che le coordinate trilineari di un coniugato isogonale sono i reciproci delle coordinate del punto di partenza, si avrà che
$$\vec{S} = \frac{a^2\vec{A} + b^2\vec{B} + c^2\vec{C}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$
Le proiezioni di S sui lati sono allora
$$\frac{(\vec{S} - \vec{C}) \cdot (\vec{B} - \vec{C})}{a^2}(\vec{B} - \vec{C}) + \vec{C}$$
e cicliche (perché?). Ponendo l'origine nel circocento (per svolgere i calcoli) e sommando si ottiene infine
$$\sum_{\text{sym}} \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}(\vec{B} - \vec{C}) + \vec{C} = 3\vec{S},$$
che è la tesi.

- *Approccio sintetico.* Chiamiamo P, Q, R le proiezioni di S su BC, CA, AB. Sia L l'intersezione di PS con QR, e sia M il punto medio di BC.

  Dalla ciclicità del quadrilatero $AQSR$, e dalla definizione di coniugato isogonale, seguono (come?) le similitudini $SRL \sim BAM$ e $SQL \sim CAM$. Le due similitudini scalano i triangoli dello stesso rapporto (perché?), dunque $QL = LR$.

G8. Ci sono almeno due approcci.

- *Approccio algebrico: trilineari.* Le seguenti coordinate trilineari esatte (di quali punti servirà averle esatte?) sono facilmente calcolabili:

$$\begin{aligned} N &= [0 : r_a(1-\cos\gamma) : r_a(1-\cos\beta)], \\ M &= [-r_a(1-\cos\gamma) : 0 : r_a(1+\cos\alpha)], \\ P &= [-r_a(1-\cos\beta) : r_a(1+\cos\alpha) : 0]. \end{aligned}$$

  Sono inoltre note le trilineari (non esatte) di incentro e circocentro (da dove arrivano?)

$$I = [1 : 1 : 1], \qquad O = [\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma].$$

  Detto X il punto medio di MP si avrà allora che

$$X = [\cos\gamma + \cos\beta - 2 : 1 + \cos\alpha : 1 + \cos\alpha].$$

  L'equazione della circonferenza circoscritta, scritta in termini di coordinate trilineari, è

$$ayz + bxz + cxy = 0$$

  (perché?), dunque X vi appartiene se e solo se

$$a(1+\cos\alpha) - (b+c)(2 - \cos\beta - \cos\gamma) = 0.$$

  Del resto N, I, O sono allineati se e solo se

$$(1 - \cos\beta - \cos\gamma + \cos\alpha)(\cos\beta - \cos\gamma) = 0.$$

  La condizione su X si riscrive in termini di lati (eliminando il denominatore sempre positivo) nella forma

$$-(c+b-a)(c^3 + b^3 - a^3 - bc^2 + ac^2 - b^2c - a^2c + ab^2 - a^2b + 2abc) = 0,$$

  mentre d'altra parte si ha che

$$(1-\cos\beta-\cos\gamma+\cos\alpha)2abc = c^3+b^3-a^3-bc^2+ac^2-b^2c-a^2c+ab^2-a^2b+2abc,$$

  da cui la tesi.

- *Approccio sintetico.* Siano I_A, I_B, I_C gli ex-centri del triangolo ABC. L'idea alla base della dimostrazione è che la simmetria centrale rispetto al punto O manda il triangolo MNP nel triangolo $I_B I I_C$. Questo mostra non solo l'allineamento di N, O, I, ma anche che O è il punto medio di IN.

  I passi fondamentali della dimostrazione sono i seguenti.

– Si ha la similitudine $MNP \sim I_B I I_C$ (lati a 2 a 2 paralleli).
– La circonferenza circoscritta ad ABC (che da ora in poi indicheremo con Γ) è la circonferenza di Feuerbach di $II_B I_C$ (che cosa rappresentano A, B, C nel triangolo $II_B I_C$?).
– Fatto generale: invertendo rispetto all'ex-cerchio di centro I_A, dove vanno a finire A, B, C? Dove va a finire Γ?
– Se X sta su Γ, allora Γ viene lasciata fissa dall'inversione (perché?), dunque MNP ed $II_B I_C$ hanno la stessa circonferenza di Feurbach e quindi sono non solo simili, ma anche congruenti.
– Sia Q l'ulteriore intersezione tra $I_B I_C$ e Γ. Che cosa rappresenta Q nel triangolo $I_B I I_C$? Detto X il punto medio di MP, che cosa rappresenta X nello stesso triangolo? Dedurne che X e Q sono diametralmente opposti in Γ.
– Consideriamo l'isometria che manda MNP in $I_B I I_C$. Si tratta di una simmetria centrale con centro in ...

G9. L'idea alla base della dimostrazione è che la retta che passerà per S, T, A è una simmediana del triangolo TPQ. I passi fondamentali sono i seguenti.

- Il quadrilatero $PTQA$ è ciclico (con un semplice angle chasing si vede che la somma degli angoli in T ed A è $180°$).
- La retta BA è mediana di BPQ (risultato classico che segue dall'essere asse radicale), la retta TA è simmediana di TPQ (ancora angle chasing nel quadrilatero ciclico trovato al passo precedente).
- Lemma generale: se TPQ è un triangolo inscritto in una circonferenza ω, allora le tangenti alla circonferenza in P e Q si incontrano in un punto S che giace sulla simmediana di TPQ uscente da T.

  Per dimostrare il lemma si può, per esempio, calcolare il rapporto tra i seni dei due angoli in cui TS divide l'angolo in T (il quale dipende, ad esempio, dal rapporto tra le aree di TSP e TSQ).

N1. Vi sono almeno 2 approcci.

- Il primo approccio si basa sul fatto che $\left\{2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{\varphi(n)}\right\}$ è ancora un sistema fondamentale di residui (perché?). A questo punto la somma delle potenze 1386-esime dei $2a_i$ è congrua modulo n a quella data nel testo, quindi ...
- Il secondo approccio sfrutta i generatori. Supponiamo intanto che $n = p^\alpha$, con p primo dispari. Allora, dato un generatore g, la somma data si può riscrivere modulo n nella forma

  $$1 + g^{1386} + g^{2\cdot 1386} + g^{3\cdot 1386} + \ldots + g^{(\varphi(n)-1)\cdot 1386} = \frac{g^{1386\cdot\varphi(n)} - 1}{g^{1386} - 1}.$$

  Ora il numeratore è divisibile per p^α (perché?), mentre il denominatore non è nemmeno divisibile per p (perché?).

Nel caso di un n generico bisogna poi ricondursi alle potenze dei primi che compaiono nella sua fattorizzazione. Che cosa diventa un sistema fondamentale di residui modulo n, quando lo si riduce a sua volta modulo la potenza di un primo che divide n?

N2. Siano a un intero positivo, e d un intero positivo dispari. Il fatto generale è che $2^{2^a d}+1$ non è mai multiplo di $2^a d+1$. È ovvio che da questo segue il punto (a). Perché segue anche il punto (b)?

Per dimostrare il fatto generale è a sua volta sufficiente (perché?) dimostrare che tutti i primi che dividono $2^{2^a d}+1$ sono congrui a 1 modulo 2^{a+1}.

A sua volta, questo segue dal seguente fatto: se p divide $2^{2^a d}+1$, allora l'ordine moltiplicativo di 2 modulo p è multiplo di 2^{a+1}.

N3. Il lemma alla base dei primi 2 punti è il seguente: comunque siano dati k interi $a_1, a_2, \ldots, a_k$, esiste un intero b tale che $ba_1, ba_2, \ldots, ba_k$ sono tutte potenze perfette.

Per la dimostrazione di questo lemma si cerca b della forma $a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{\alpha_k}$, dove gli esponenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono da scegliere opportunamente mediante il teorema cinese.

(a) Si tratta di fare in modo che tutte le medie aritmetiche siano intere, quindi applicare il lemma. Per avere tutte le medie aritmetiche intere ci sono almeno 2 strade:
- prendere tutti interi congrui tra di loro modulo 2, 3, 4, ..., 2008 (in questo modo, volendo, si riescono anche a prendere coprimi);
- partire da interi qualunque, quindi moltiplicarli per tutti i denominatori che compaiono nelle medie.

(b) Si tratta di fare in modo che tutte le medie aritmetiche e tutte le medie geometriche siano intere. Per aggiustare le geometriche basta prendere interi iniziali che siano potenze con un esponente opportuno.

(c) Più in generale, non esiste un insieme infinito di interi distinti in cui ogni sottoinsieme finito abbia la media aritmetica intera. Se infatti esistesse, i sui elementi dovrebbero essere tutti congrui tra di loro modulo qualunque m.

N4. L'equazione può essere riscritta nella forma

$$(n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = 7^m,$$

da cui

$$n^3 - n = 7^a - 1, \qquad n^2 + n = 7^b - 1$$

per opportuni a e b. Poiché $n^2 + n$ divide $n^3 - n$, ne segue che $7^b - 1$ divide $7^a - 1$.

Questa relazione implica che $a = kb$ (per dimostrarlo si scrive la divisione euclidea $a = qb + r$ e si mostra che deve essere $r = 0$). Tornando al passo precedente si ha quindi che

$$n^3 - n + 1 = (n^2 + n + 1)^k,$$

il che per $k \geq 2$ è impossibile perché ...

N5. Per prima cosa si esclude che m possa essere pari (cosa non difficile, ma che richiede qualche passaggio).

Per trattare il caso dispari, lo strumento fondamentale è il seguente lemma: se $a \geq 2$ e m è un intero dispari, allora $a^m + 1$ ha almeno un fattore primo non presente in $a+1$, tranne nel caso in cui $a = 2$ e $m = 3$.

Per dimostrare questo lemma ci si riconduce facilmente al caso in cui m è primo.

Il caso in cui m è primo segue a sua volta da questo risultato generale: posto $f_p(a) = (a^p + 1)/(a + 1)$, l'unico fattore primo che possono avere in comune $a + 1$ e $f_p(a)$ è p stesso. Inoltre, se p divide $f_p(a)$, allora $f_p(a)$ è congruo a p modulo p^2. Come si conclude a questo punto?

La dimostrazione dell'ultimo (importantissimo) fatto generale è contenuta nell'esercizio N5 del PreIMO 2005.

N6. Il lemma fondamentale è il seguente: se p è un primo, $\{a_1, \ldots, a_p\}$ sono interi che rappresentano tutte le classi modulo p, e $P(x)$ è un polinomio di grado minore od uguale di $p - 2$, allora la somma

$$\sum_{i=1}^{p} P(a_i)$$

è multipla di p.

La dimostrazione di questo risultato segue applicando a tutti i monomi che compongono $P(x)$ il seguente ulteriore lemma: se p è un primo, $\{a_1, \ldots, a_p\}$ sono interi che rappresentano tutte le classi modulo p, e k è un intero positivo (in realtà vale anche per $k = 0$ pur di assumere che $0^0 = 1$), allora

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^k \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{se } p-1 \text{ non divide } k, \\ -1 \pmod{p} & \text{se } p-1 \text{ divide } k. \end{cases}$$

La dimostrazione di questo ulteriore lemma è sostanzialmente analoga a quella del problema N1.

Tornando al problema principale, l'idea fondamentale è che, posto $n = p - k$, si ha che

$$(k-1)! \cdot \binom{p-k}{j} \equiv (-1)^j (j+1)(j+2) \ldots (j+k-1)$$

modulo p. Ne segue che, a meno dell'elemento invertibile (perché?) $(k-1)!$, il termine $\binom{p-k}{j}^4$ è, modulo p, un polinomio $P(j)$ di grado $4(k-1)$. Modulo p si ha dunque che

$$(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-k}{j}^4 \equiv (k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{p-k} P(j) \equiv (k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{p-1} P(j) \equiv 0,$$

dove la prima congruenza segue dalla definizione di $P(j)$, la seconda dal fatto che i termini aggiunti sono zero modulo p (perché?), la terza dal primo lemma pur di avere

$$4(k-1) \leq p - 2.$$

Ricavato k in funzione di p ed n, questa relazione porta esattamente all'ipotesi indicata nel testo.

Il caso con esponente 2008 è completamente analogo.

N7. Il punto di partenza è mostrare che

$$a_n = \frac{1}{2}\left(A^{2^n} + \frac{1}{A^{2^n}}\right),$$

dove $A = 2+\sqrt{3}$ è scelto in modo da rendere tale formula vera per $n = 0$. Tale formula a posteriori si giustifica banalmente per induzione. Quali ragionamenti euristici portano a congetturare una formula del genere? Segnaliamo 2 possibilità.

- La ricorrenza proposta ricorda la formula di duplicazione del coseno. Se infatti $a_0 = \cos x$, non è difficile vedere che deve essere $a_n = \cos(2^n x)$. Ora $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2 \ldots$
- L'identità algebrica
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$
sembra suggerire una formula esplicita per la ricorrenza $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Non resta ora che cambiare qualche parametro per adattarla al caso proposto.

Tornando alla soluzione del problema, quello che serve a noi è di interpretare la formula per a_n modulo p. Essendo i p che ci interessano dispari (perché?), i problemi possono nascere solo da $\sqrt{3}$. Distinguiamo allora 2 casi.

- Supponiamo (caso facile) che 3 sia un residuo quadratico modulo p. Allora la formula generale per a_n vale tranquillamente modulo p. Si ha allora che p divide a_n se e solo se p divide $A^{2^{n+1}} + 1$, dunque $A^{2^{n+2}} \equiv 1$ modulo p. Cosa possiamo allora dire di $\mathrm{ord}_p(A)$? Con ragionamenti standard (quali?) si arriva a dire che $\mathrm{ord}_p(A) = 2^{n+2}$, da cui $p \equiv 1$ modulo 2^{n+2} (perché?) e quindi $p^2 \equiv 1$ modulo 2^{n+3}.
- Supponiamo (caso meno facile) che 3 non sia un residuo quadratico modulo p. In tal caso la formula per a_n è ancora valida, ma va interpretata nel campo di numeri $\mathbb{F}_{p^2}$, costituito dagli oggetti del tipo $a + b\sqrt{3}$, in cui a e b sono classi di resto modulo p.

  È molto facile vedere che in questo ambiente si può sommare e moltiplicare come uno si aspetta e, proprio perché 3 non è un residuo quadratico modulo p, anche dividere per elementi diversi da 0.

  Un po' meno facile (anche se non molto diverso dal caso classico) è vedere che le potenze degli elementi non nulli di $\mathbb{F}_{p^2}$ si ripetono ciclicamente con un periodo, detto ancora ordine moltiplicativo, il quale è sempre un divisore di $p^2 - 1$ (una specie di piccolo teorema di Fermat).

Supponiamo ora di sapere che esiste $B \in \mathbb{F}_{p^2}$ tale che $B^2 = A$. Allora la formula per a_n diventa

$$a_n = \frac{1}{2}\left(B^{2^{n+1}} + \frac{1}{B^{2^{n+1}}}\right).$$

Ragionando come nel caso precedente avremo allora che p divide a_n se e solo se p divide $B^{2^{n+2}} + 1$, da cui segue che $\mathrm{ord}_{\mathbb{F}_{p^2}}(B) = 2^{n+3}$, e quindi 2^{n+3} divide $p^2 - 1$. Resta solo da dimostrare l'esistenza di un tale B. Poiché brutalmente dovrebbe essere $B = (\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$, l'unica cosa che dobbiamo dimostrare è che esiste un elemento $x \in \mathbb{F}_{p^2}$ tale che $x^2 = 2$. Per far questo si distinguono 2 casi.

- Se 2 è un residuo quadratico modulo p, tale elemento esiste senza nemmeno ricorrere a $\mathbb{F}_{p^2}$.
- Se 2 non è un residuo quadratico modulo p, allora x va ricercato della forma $b\sqrt{3}$. In questo caso brutalmente b dovrebbe quindi essere la radice di $2/3$, e questa esiste perché moltiplicando o dividendo 2 elementi che non sono residui quadratici si ottiene sempre un residuo quadratico. Per dimostrare quest'ultimo fatto basta pensare come sono caratterizzati i residui ed i non residui quadratici in termini del generatore.

BST1. La dimostrazione è conseguenza dei seguenti 2 punti.

- Esiste almeno un lato del quadrilatero che viene visto dal punto P sotto un angolo minore od uguale di 90°. Per dimostrare questo fatto può essere utile distinguere 2 casi a seconda che il punto P sia interno o esterno al quadrilatero.
- Sia ABC un triangolo, e sia P un punto al suo interno. Se $\angle APB \leq 90°$, allora il raggio della circonferenza circoscritta ad APB è minore del raggio della circonferenza circoscritta ad ACB. Questo secondo punto segue facilmente dal teorema dei seni (dove si usa l'ipotesi?).

Come perdere punti? Con i problemi di configurazione! Nella linea dimostrativa indicata, occorre distinguere i casi a seconda che P sia interno o no al quadrilatero. Altre dimostrazioni possono invece dipendere dalla posizione del centro del cerchio rispetto al quadrilatero, o ancora dall'essere certi triangoli acutangoli o meno (nota bene: se un triangolo non è acutangolo, non vuol dire che sia ottusangolo ...).

BST2. Si dimostra molto facilmente che f è debolmente crescente. A questo punto occorre mostrare che $f(n) \leq n+1$, e per far questo si può procedere in 2 passi.

- *Limitazione dello scostamento.* Supponiamo che $f(n) = n + k$ per un certo n ed un certo k positivi. Allora si dimostra che $f(k) = 1$, da cui (per la debole monotonia) si deduce che k (lo scostamento) non può essere troppo grande.
- *Divaricazione dello scostamento.* Supponiamo che $f(n) = n+k$ per un certo n ed un certo k positivi. Allora si dimostra per induzione che $f(hn) \geq hn+hk-(h-1)$. Se $k \geq 2$, questo produce scostamenti grandi a piacere.

Non resta a questo punto che mostrare che tutti i valori da 1 a 2009 sono ottenibili. Per far questo si possono, a seconda dei casi, usare le seguenti funzioni (che minimizzano il numero delle verifiche da fare, e che comunque vanno fatte!):

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2007, \\ k & \text{se } n \geq 2008, \end{cases} \qquad f(n) = n, \qquad f(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è dispari}, \\ n+1 & \text{se } n \text{ è pari}. \end{cases}$$

Per quali valori di k la prima funzione soddisfa la relazione funzionale?

Come perdere punti? Qualche punto si può lasciare per strada non facendo tutte le verifiche necessarie per mostrare che gli esempi funzionano. Occhio anche a errori concettuali che compromettono tutto: ad esempio per una funzione debolmente crescente si ha che

$$f(a) > f(b) \Longrightarrow a > b,$$

ma

$$f(a) \geq f(b) \not\Longrightarrow a \geq b.$$

BST3. L'idea fondamentale è di scegliere gli elementi di X che stanno in 10 classi opportune modulo 47. Ora i punti fondamentali sono i seguenti.

- Esistono 10 classi modulo 47 con la proprietà che le somme a 2 a 2 sono distinte dalle somme a 3 a 3. Due esempi semplici sono le classi da 19 a 28 (perché?), oppure le classi $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9\}$.
- Se A è un insieme di 10 classi come sopra, allora per ogni classe non nulla b si ha che $bA = \{ba : a \in A\}$ ha la stessa proprietà (perché?).
- Se A è un insieme di 10 classi come al primo punto, allora esiste almeno un valore di b per cui nell'insieme X almeno $[100000/46] = 2173$ elementi appartengono alle classi di bA. Quest'ultimo punto segue (come?) da un double counting sull'insieme

$$\{(x, b) : x \in X, x \equiv ba \text{ per un qualche } a \in A\}.$$

BST4. Con un minimo di congruenze (basta modulo 4) si vede che x e y devono essere entrambi pari. Posto $x = 2a$, $y = 2b$, si ottiene che

$$(7^a + 3^b) \text{ divide } (4a^4 + b^2).$$

L'idea è ora che il lhs sarà spesso troppo grande per dividere il rhs. Questo è vero per esempio se $a \geq 4$, qualunque sia il valore di b (le disuguaglianze necessarie vanno dimostrate per induzione!). Non resta dunque che discutere i casi $a = 1, 2, 3$ con analoghe argomentazioni.

Come perdere punti? Non trovando la/le soluzioni, non dimostrando correttamente le disuguaglianze richieste (asserendo che sono banali o facendole seguire da argomentazioni incomplete: il modo migliore per dimostrarle è per induzione o con uno studio di funzione), riducendosi ad un numero finito di casi la cui verifica è lasciata al correttore (quando magari i casi sono una decina ...).

Attenzione anche a non commettere il seguente errore logico: dimostrare per esempio che non ci sono soluzioni quando $a \geq 5$ e $b \geq 4$ (contemporaneamente) e ritenere che resti solo da considerare il caso in cui $a \leq 4$ e $b \leq 3$ (contemporaneamente)!

BST5. L'idea è di dimostrare che la differenza richiesta è sempre uguale ad $\alpha/2$ (notazione standard). A tal fine, le osservazioni fondamentali sono che, detto N il punto medio di TB, si ha che TC è parallela ad MN, ed il quadrilatero $TNMX$ è ciclico. A questo punto si ha che

$$\angle MTB = \angle MXN, \qquad \angle CTM = \angle TMN = \angle TXN = \angle NXB,$$

da cui $\angle MTB - \angle CTM = \angle MXB$.

BST6. Supponiamo di aver colorato a numeri di nero e b numeri di bianco. Il punto fondamentale è che il numero di terne del tipo richiesto è esattamente $a^2 + b^2 - ab$. A tal fine, la prima osservazione da fare è che, per via della congruenza, una terna è univocamente determinata da 2 suoi elementi. A questo punto vi sono almeno 2 modi di procedere.

- *Contare le terne eterocromatiche.* Fissati 2 elementi x e y di colore diverso, quante sono le terne ordinate (per forza eterocromatiche) che contengono x e y? In quanti modi possiamo scegliere x e y? Così facendo, quante volte abbiamo contato ogni terna?

  Occhio a prestare particolare attenzione alle terne con 2 elementi uguali (e anche a quelle con 3 elementi uguali).
- *Contare direttamente le terne monocromatiche.* Con ovvio significato dei simboli, l'insieme delle terne monocromatiche si può scrivere come l'unione delle terne $(B, B, ?)$ e delle terne $(?, N, N)$, meno le terne del tipo $(B, ?, N)$. Questi insiemi hanno rispettivamente a^2, b^2 e ab elementi.

In ogni caso ci si riconduce alla diofantea

$$a^2 + b^2 - ab = (a + b)^2 - 3ab = 189.$$

Si scopre ora facilmente che $a = 3\alpha$ e $b = 3\beta$, con $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 21$. Completando i quadrati e moltiplicando per 4, questa a sua volta si può scrivere nella forma

$$(2\alpha - \beta)^2 + 3\beta^2 = 84.$$

Ora non restano molte possibilità per β ...

Last but not least

Questi problemi sono il risultato di una selezione operata a partire da oltre 200 problemi, scelti facendo in modo da rappresentare un ampio spettro di tecniche riciclabili altrove. Solo lavorando su questi problemi prima autonomamente e poi seguendo *tutti* gli approcci suggeriti si potrà averne veramente giovamento (e dunque sarà servito a qualcosa il lavoro di tutti coloro che hanno collaborato alla loro selezione).