Algebra – **Problemi di ammissione**

1. Siano x, y, z numeri reali positivi tali che $x + y + z = 3$.
   Dimostrare che
   $$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx).$$

2. Siano a_1, a_2, $\ldots$, a_n numeri reali *positivi* tali che
   $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1.$$
   Dimostrare che
   $$\frac{a_1}{1-a_1} \cdot \frac{a_2}{1-a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{1-a_n} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}.$$

3. Determinare il massimo valore possibile per la somma ciclica
   $$\sqrt{|a_1 - a_2|} + \sqrt{|a_2 - a_3|} + \ldots + \sqrt{|a_{2008} - a_{2009}|} + \sqrt{|a_{2009} - a_1|},$$
   dove gli a_i sono numeri reali tali che $0 \leq a_i \leq 1$ per ogni $i = 1, \ldots, 2009$.

Algebra – Sessioni dello stage

4. Dimostrare che
$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 3(x+y+z)^2$$
per ogni terna (x, y, z) di numeri reali.

5. Siano x, y, z numeri reali positivi tali che $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Dimostrare che
$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1.$$

6. Determinare la più piccola costante C tale che
$$\frac{x_1}{x_2x_3\cdots x_n+1}+\frac{x_2}{x_1x_3\cdots x_n+1}+\cdots+\frac{x_n}{x_1x_2\cdots x_{n-1}+1} \leq C$$
per ogni n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$.

7. Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che
   - $f(1) = 2000$;
   - $|f(x)| \leq x^2 + 10^6$;
   - si ha che
   $$f\left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = f\left(x+\frac{1}{y}\right)+f\left(y+\frac{1}{x}\right)$$
   per ogni coppia di numeri reali positivi x e y.

8. Determinare tutti i polinomi $P(x)$ a coefficienti interi tali che, per ogni coppia (a, b) di numeri interi positivi tali che $a+b$ è un quadrato perfetto, anche $P(a)+P(b)$ è un quadrato perfetto.

   [Se serve, si può utilizzare senza dimostrazione il seguente lemma: se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi tale che $P(n)$ è un quadrato perfetto per ogni intero n, allora $P(x) = [Q(x)]^2$ per un opportuno polinomio $Q(x)$ a coefficienti interi]

Combinatoria – Problemi di ammissione

1. Ad uno Stage Senior hanno partecipato 56 studenti. Durante lo stage si sono formate alcune *triadi*. Si sa che ogni triade contiene esattamente 3 studenti, e che 2 triadi diverse hanno al più un elemento in comune.

   Dimostrare che gli organizzatori possono invitare al Winter Camp 11 dei partecipanti facendo in modo che nessuna triade sia convocata per intero.

2. (a) Un insieme X contiene n numeri *interi* distinti. Si sa che, comunque si scelga un elemento $x \in X$, l'insieme $X \setminus \{x\}$ può essere partizionato in due sottoinsiemi in cui la somma degli elementi è la stessa (ma non è detto che i due sottoinsiemi abbiano lo stesso numero di elementi).

   Determinare per quali interi positivi n la situazione è possibile.

   (b) Studiare lo stesso problema nel caso in cui X contenga numeri *reali* distinti.

3. Sia n un intero positivo. Un gruppo di n amici decide durante le vacanze di organizzare delle partite di pallavolo 4 contro 4, con le squadre che variano di volta in volta. Al termine della vacanza risulta che ogni coppia di amici si è trovata in campo in squadre avversarie esattamente una volta.

   Determinare per quali interi positivi n la situazione è possibile.

Combinatoria – Sessioni dello stage

4. Siano k ed n due interi positivi. In ognuna delle n^2 caselle di una scacchiera $n \times n$ è scritto un intero da 0 a k, estremi inclusi. Una *mossa* consiste nello scegliere una riga o una colonna ed aggiungere 1 ai numeri presenti nelle caselle di quella riga o quella colonna. L'operazione si intende effettuata modulo $k + 1$, nel senso che aggiungendo 1 a k si ottiene 0.

   All'inizio tutte le caselle contenevano 0. Successivamente sono state effettuate alcune mosse.

   Dimostrare che è possibile ritornare alla configurazione iniziale operando al più kn mosse.

5. Ad un torneo di ping-pong ci sono n partecipanti. Ognuno incontra tutti gli altri una ed una sola volta.

   Dimostrare che alla fine del torneo si verifica esattamente una tra le seguenti due possibilità:

   (i) i partecipanti possono essere numerati da 1 ad n in modo tale che 1 ha battuto 2, 2 ha battuto 3, ..., $n - 1$ ha battuto n e n ha battuto 1;

   (ii) i partecipanti possono essere divisi in due sottoinsiemi non vuoti A e B in modo che ogni elemento di A ha battuto ogni elemento di B.

6. Sia n un intero positivo. Ad un nuovo torneo di ping-pong partecipano questa volta $2n+1$ giocatori. Anche in questo torneo ogni giocatore incontra tutti gli altri giocatori una ed una sola volta. Le partite del torneo si svolgono tutte nella stessa sala, una dopo l'altra. Tra due partite consecutive di ogni giocatore ci sono sempre almeno $n-1$ altre partire.

   Dimostrare che uno dei giocatori della prima partita del torneo gioca anche l'ultima partita del torneo.

Geometria – Problemi di ammissione

1. Sia ABC un triangolo scaleno, e sia r la bisettrice *esterna* dell'angolo in B. Siano P e Q i piedi delle perpendicolari ad r condotte per A e C, rispettivamente. Sia M l'intersezione di CP e BA, e sia N l'intersezione di AQ e BC.

   Dimostrare che MN, AC ed r concorrono.

2. Sia ABC un triangolo, e siano X, Y, Z dei punti presi sui lati AB, BC, CA, rispettivamente.

   (a) Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli AXZ, BYX, CZY passano per uno stesso punto.

   (b) Detti A' il circocentro di AXZ, B' il circocentro di BYX, C' il circocentro di CZY, dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ è simile al triangolo ABC.

   (c) Dimostrare che

   $$\text{Area}(A'B'C') \geq \frac{1}{4}\text{Area}(ABC),$$

   con uguaglianza se e solo se AA', BB', CC' concorrono.

3. Sia ABC un triangolo acutangolo. Sia E un punto del piano tale che E e B stanno in semipiani opposti rispetto ad AC. Sia D un punto interno al segmento AE.

   Si sa che

   $$\angle ADB = \angle CDE, \qquad \angle BAD = \angle ECD, \qquad \angle ACB = \angle EBA.$$

   Dimostrare che E appartiene alla retta BC.

Geometria – Sessioni dello stage

4. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in un cerchio di centro O, e ha gli angoli in B e C ottusi. Sia E l'intersezione di AB e CD. Sia P il piede della perpendicolare da E a BC, e sia R il piede della perpendicolare da E ad AD. Le rette PE ed AD si intersecano in Q, mentre le rette ER e BC si intersecano in S. Sia infine K il punto medio di QS.

   Dimostrare che E, K, O sono allineati.

5. Sia Γ la circonferenza circoscritta ad un triangolo ABC. Una circonferenza passante per A e C interseca nuovamente i lati CB ed AB in D ed E, rispettivamente. Sia G l'ulteriore intersezione tra Γ e la retta AD, e sia H l'ulteriore intersezione tra Γ e la retta CE. Le tangenti alla circonferenza in A e C intersecano DE in L ed M.

   Dimostrare che il punto di intersezione tra le rette LH ed MG appartiene a Γ.

6. Sia $A_1A_2A_3$ un triangolo scaleno con incentro I. Sia C_i la più piccola circonferenza passante per I e tangente ai lati A_iA_{i+1} e A_iA_{i+2} (con gli indici intesi modulo 3). Sia B_i l'ulteriore intersezione tra C_{i+1} e C_{i+2}.

   Dimostrare che i circocentri dei triangoli A_iB_iI sono allineati.

7. Siano P e Q due punti coniugati isogonali l'uno dell'altro rispetto ad un triangolo dato. Siano $P_1P_2P_3$ e $Q_1Q_2Q_3$ i loro triangoli pedali. Sia $X_i = P_{i+1}Q_{i+2} \cap P_{i+2}Q_{i+1}$ (con gli indici intesi modulo 3).

   Dimostrare che i punti X_1, X_2, X_3 stanno sulla retta PQ.

8. Sia ABC un triangolo con incentro I e circocentro O. Sia K l'ortocentro del triangolo formato dai punti di tangenza della circonferenza inscritta in ABC.

   Dimostrare che i punti I, O, K sono allineati.

9. Sia I l'incentro di un triangolo ABC, e siano A', B', C' le intersezioni delle bisettrici con la circonferenza circoscritta ad ABC. Siano R e r, rispettivamente, i raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta.

   Dimostrare che

   (a) $IA' \cdot IC' = R \cdot IB$;

   (b) $IA \cdot IB = 2r \cdot IC'$;

   (c) $R \cdot \text{Area}(ABC) = 2r \cdot \text{Area}(A'B'C')$.

Teoria dei Numeri – Problemi di ammissione

1. Dimostrare che non esiste nessuna coppia (a, b) di numeri interi tale che
$$a^2 = b^7 + 7.$$

2. (a) Determinare tutti i polinomi $p(x)$ a coefficienti interi tali che
$$\frac{p(a) + p(b) + p(c)}{a + b + c}$$
è un intero per ogni terna (a, b, c) di interi non negativi, non tutti simultaneamente nulli.
   (b) Stessa domanda ma considerando solo terne di interi positivi.

3. (a) Dimostrare che esistono infiniti interi positivi n per cui $n!$ non è multiplo di n^2+1.
   (b) Dimostrare che esistono infiniti interi positivi n per cui $n!$ è multiplo di $n^2 + 1$.

Teoria dei Numeri – Sessioni dello stage

4. Sia $p \geq 5$ un numero primo.

   Dimostrare che
   $$\binom{p^2}{p} - p$$
   è divisibile per p^5.

5. Sia S un insieme finito di numeri primi. Dimostrare che esiste un numero intero positivo n con le seguenti proprietà:

   - per ogni $p \in S$ esistono due interi positivi a, b tali che $n = a^p + b^p$;
   - per ogni $p \notin S$ non esistono interi positivi a, b tali che $n = a^p + b^p$.

6. Sia $p(x) = x^3 + mx$ un polinomio a coefficienti interi. Si sa che, comunque si scelgano due interi x e y, si ha che $p(x) - p(y)$ è divisibile per 107 se e solo se $x - y$ è divisibile per 107.

   Dimostrare che m è multiplo di 107.

7. Sia $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ una successione di numeri primi tale che, per ogni $n \geq 3$, p_n è il più grande primo che divide $p_{n-1} + p_{n-2} + 2000$.

   Dimostrare che questa successione è limitata.

Balkan Selection Test

1. Sia n un intero positivo. Determinare quante sono le permutazioni $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ con la seguente proprietà:
$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \text{ è multiplo di } k \text{ per ogni } k = 1, 2, \dots, n.$$

2. Determinare tutti gli interi positivi n per cui esiste un intero positivo m tale che
$$\frac{4^n - 1}{3} \text{ divide } 49m^2 + 1.$$

3. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso, e siano P e Q due punti interni ad esso. Supponiamo che i quadrilateri $ADQP$ e $BCQP$ siano ciclici. Supponiamo inoltre che esista un punto E appartenente al segmento PQ tale che
$$\angle PBE = \angle QCE, \qquad \angle PAE = \angle QDE.$$
   (a) Sia F l'ulteriore intersezione tra la retta BC e la circonferenza circoscritta al triangolo ECQ.
   Dimostrare che la retta EF è parallela a BP.
   (b) Dimostrare che il quadrilatero $ABCD$ è ciclico.

4. Sia $n \geq 3$ un intero, e siano a_1, a_2, $\ldots$, a_n numeri interi positivi distinti.
   Dimostrare che esistono due indici distinti i e j tali che $a_i + a_j$ non divide nessuno dei numeri $3a_1$, $3a_2$, $\ldots$, $3a_n$.

5. Sia $ABCD$ un trapezio con lati paralleli AB e CD. Sia E un punto sul prolungamento del segmento BC dalla parte di C, e sia F un punto sul segmento AD tali che $\angle EAD = \angle FBC$. La retta EF incontra la retta CD in I e incontra la retta AB in J. Sia K il punto medio di EF, che supponiamo non appartenere alla retta CD.
   Dimostrare che il quadrilatero $ABIK$ è ciclico se e solo se il quadrilatero $CDJK$ è ciclico.

6. Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali. Si dice che una coppia di funzioni (f, g) è una *coppia di funzioni contorte* se
   - $f : S \to S$ e $g : S \to S$;
   - f e g sono entrambe strettamente crescenti;
   - per ogni $x \in S$ si ha che
   $$f(g(g(x))) < g(f(x)).$$

   (a) Determinare se esiste una coppia di funzioni contorte con $S = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(b) Determinare se esiste una coppia di funzioni contorte con

$$S = \left\{ a - \frac{1}{b} : a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.