Algebra – Problemi di ammissione

1. Per ogni polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a coefficienti interi definiamo
$$\|p(x)\| = \max_{0\le i\le n} |a_i|.$$
   (a) Determinare se esistono due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ a coefficienti interi tali che
$$\|p(x)\| \geq 2011, \qquad \|q(x)\| \geq 2011, \qquad \|p(x)q(x)\| = 1.$$
   (b) Determinare se esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che
$$\|(x^2 - 3x + 1)p(x)\| = 1.$$

2. Sia a_n la successione definita per ricorrenza da
$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \qquad a_1 = 2.$$
Determinare il più piccolo numero reale L tale che
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < L$$
per ogni intero positivo k.

3. Determinare, per ogni intero $n \geq 2$, la più grande costante C_n tale che
$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 + C_n(a_1 - a_n)^2$$
per ogni n-upla di numeri reali positivi $a_1, \ldots, a_n$.

Algebra – Sessioni dello stage

4. Dimostrare che

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3} \sum_{\text{cyc}} a^2 \cdot \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a+b}$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali positivi.

5. Dimostrare che

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali positivi tali che $abc = 1$.

6. Siano a, b, c, d numeri reali tali che

$$a+b+c+d = 6 \qquad \text{e} \qquad a^2+b^2+c^2+d^2 = 12.$$

   (a) Dimostrare che

$$36 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3) - (a^4+b^4+c^4+d^4) \leq 48.$$

   (b) Dimostrare che la disuguaglianza di destra vale anche assumendo soltanto l'uguaglianza di destra.

7. Siano dati k punti del piano cartesiano (x_i, y_i) (con $i = 1, \ldots, k$) a 3 a 3 non allineati. Determinare, in funzione di k, il più piccolo intero positivo d con questa proprietà:

   "comunque si scelgano k numeri reali positivi $c_1, \ldots, c_k$, esiste sempre un polinomio $P(x, y)$ a coefficienti reali, di grado minore od uguale a d, tale che $P(x_i, y_i) = c_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$".

8. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Combinatoria – Problemi di ammissione

1. Ad una festa partecipano n persone. Alcune di queste persone si conoscono, altre no (la conoscenza è simmetrica). Si dice che 2 persone sono *sconosciuti di primo grado* se non si conoscono, ma esiste un altro partecipante alla festa che le conosce entrambe.

   Determinare, in funzione di n, il massimo numero di coppie di sconosciuti di primo grado che può esserci alla festa.

2. Un grafo ha n vertici ed m lati. Indichiamo i vertici con $v_1, \ldots, v_n$, ed indichiamo con d_i il grado del vertice v_i (cioè il numero di lati uscenti dal vertice stesso).

   Supponiamo per ipotesi che $1 \leq d_i \leq 2010$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Dimostrare che
   $$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 4022m - 2010n.$$

   (b) Determinare tutti i valori di n per cui esiste un grafo con n vertici che realizza l'uguaglianza.

3. Alberto ha pensato un numero intero tra 1 e 200 (estremi inclusi). Ad ogni turno Barbara può scegliere un sottoinsieme di $\{1, \ldots, 200\}$ e chiedere ad Alberto se il numero che ha scelto appartiene al sottoinsieme. Se la risposta è affermativa, Barbara paga 2 euro. Se la risposta è negativa, Barbara paga 1 euro.

   Determinare di quanti euro deve disporre Barbara per essere sicura di indovinare il numero pensato da Alberto.

Combinatoria – Sessioni dello stage

4. Sia data una tabella $n \times n$, con n intero positivo. Inizialmente le n caselle di una diagonale principale contengono la cifra 0, mentre le restanti caselle contengono la cifra 1. Ad ogni mossa si possono scambiare gli 0 con gli 1 (e viceversa) in tutte le caselle di una riga od una colonna a scelta.

   Determinare, in funzione di n, il *minimo* numero di caselle con la cifra 0 che si possono avere sulla tabella operando come indicato.

5. In una nazione ci sono 2010 aeroporti. Alcuni di questi aeroporti sono collegati con dei voli di *sola andata* (il che non esclude che tra due aeroporti possano esserci voli in entrambe le direzioni). Il sistema dei collegamenti è tale da rispettare le seguenti due condizioni:

   (a) da ogni aeroporto è possibile raggiungere ogni altro aeroporto mediante un'opportuna successione di voli,

   (b) se si cancella anche un solo volo, la condizione (a) non è più soddisfatta.

   Un giorno una compagnia aerea decide di cancellare un volo. Determinare in quanti modi, *al massimo*, è possibile aprire un nuovo volo (eventualmente anche quello appena chiuso) in modo tale che le condizioni (a) e (b) siano nuovamente entrambe soddisfatte.

6. In una cassetta ci sono 100 mele, del peso complessivo di 10 kilogrammi. Nessuna mela pesa meno di 25 grammi. Ludovico vuole tagliare le mele in vari pezzettini e distribuirli a 100 stagisti in modo che ciascuno abbia esattamente 100 grammi di mela.

   Dimostrare che Ludovico può raggiungere il suo scopo senza fare pezzettini da meno di 25 grammi.

7. Sia X un insieme con n elementi, e sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiflia di sottoinsiemi di X tale che $A \cap B \nsubseteq C$ per ogni terna A, B, C di elementi distinti di $\mathcal{F}$.

   (a) Se tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ hanno k elementi, dimostrare che

   $$|\mathcal{F}| \leq \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + 1.$$

   (b) Dimostrare che in generale si ha che

   $$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}.$$

Geometria – Problemi di ammissione

1. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze congruenti con centri O_1 e O_2, rispettivamente, che si intersecano in due punti distinti A e B. Sia P un punto sull'arco AB di Γ_2 contenuto in Γ_1. La retta AP interseca nuovamente Γ_1 in C, la retta CB interseca nuovamente Γ_2 in D, e la bisettrice dell'angolo $\angle CAD$ interseca Γ_1 e Γ_2 in E ed L, rispettivamente. Sia F il simmetrico di D rispetto al punto medio di PE.

   Dimostrare che esiste un punto X che verifica
   $$\angle XFL = \angle XDC = 30° \qquad \text{e} \qquad CX = O_1O_2.$$

2. Sia ABC un triangolo con $\angle BAC \neq 90°$. Sia O il circocentro del triangolo ABC, e sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo BOC. Supponiamo che Γ intersechi la retta AB in un punto P diverso da B, e la retta AC in un punto Q diverso da C. Sia ON diametro del cerchio Γ.

   Dimostrare che il quadrilatero $APNQ$ è un parallelogramma.

3. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze con raggi diversi che si intersecano in due punti distinti A e B. Siano MN ed ST le tangenti comuni alle due circonferenze (con M ed S appartenenti a Γ_1, e N e T appartenenti a Γ_2). Siano H_1, H_2, H_3, H_4 gli ortocentri dei triangoli AMN, AST, BMN e BST, rispettivamente.

   (a) Dimostrare che $AH_2 = BH_4$.

   (b) Dimostrare che H_1, H_2, H_3, H_4 sono i vertici di un rettangolo.

Geometria – Sessioni dello stage

4. Sia ABC un triangolo, e siano M ed N punti sul segmento BC tali che $BM = CN$.

   Sia P il punto del segmento AN tale che $\angle AMP = \angle ABC$, e sia Q il punto del segmento AM tale che $\angle ANQ = \angle ACB$. Sia X l'ulteriore intersezione tra il segmento AB e la circonferenza circoscritta al triangolo AMP, e sia Y l'ulteriore intersezione tra il segmento AC e la circonferenza circoscritta al triangolo ANQ.

   (a) Siano $S = XM \cap YN$ e $T = MP \cap NQ$. Dimostrare che A, T, S sono allineati.

   (b) Siano $E = CP \cap MX$ e $F = BQ \cap NY$. Dimostrare che E, A, F sono allineati e che la retta EF è parallela a BC.

5. Sia ABC un triangolo, sia Γ la circonferenza ad esso circoscritta, e siano M ed N punti sul segmento BC.

   Sia γ_1 la circonferenza tangente ad AM, BC (in E) e Γ, e sia γ_2 la circonferenza tangente ad AN, BC (in F) e Γ. Sia t la tangente esterna comune a γ_1 e γ_2 diversa da BC, e sia T il punto sulla retta t per cui la circonferenza circoscritta a BCT risulta tangente a t in T. Sia infine ω la circonferenza passante per T, e tangente a t ed a BC (in S).

   Dimostrare che TS è la bisettrice di ETF.

6. Sia ABC un triangolo acutangolo tale che $AB > BC$ e $AC > BC$. Siano O ed H, rispettivamente, il circocentro e l'ortocentro del triangolo ABC.

   Sia M l'ulteriore intersezione tra la retta AB e la circonferenza circoscritta al triangolo AHC, e sia N l'ulteriore intersezione tra la retta AC e la circonferenza circoscritta al triangolo AHB.

   Dimostrare che il circocentro del triangolo MNH sta sulla retta OH.

7. Sia ABC un triangolo, e sia P un suo punto interno con triangolo ceviano DEF. Sia X l'intersezione tra BC e la tangente in A alla circonferenza circoscritta ad AEF. Similmente si definiscano Y e Z. Sia infine Q il coniugato isogonale di P.

   Dimostrare che X, Y, Z stanno sulla polare di Q rispetto alla circonferenza circoscritta ad ABC.

8. Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo ABC, siano x, y, z numeri reali, e sia M un punto del piano. Dimostrare che

   $$(x+y+z)(x\,MA^2 + y\,MB^2 + z\,MC^2) \geq yz\,a^2 + xz\,b^2 + xy\,c^2.$$

   Con opportune scelte di M e x, y, z, si dimostrino le seguenti disuguaglianze:

   (a) $AM^2 + BM^2 + CM^2 \geq AG^2 + BG^2 + CG^2$,

(b) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$,

(c) $R \geq 2r$,

(d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$,

(e) $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^3+b^3+c^3+3abc)$,

(f) $\dfrac{(s-a)c}{pb} + \dfrac{(s-b)a}{pc} + \dfrac{(s-c)b}{pa} \geq 1.$

dove M è un punto generico, G è il baricentro, R è il raggio della circonferenza circoscritta, r è il raggio della circonferenza inscritta, S è l'area del triangolo, p è il semiperimetro.

9. Sia O il circocentro di un triangolo ABC. Siano P e Q punti interni al triangolo con la proprietà che il triangolo pedale $A'B'C'$ di P coincide con il triangolo ceviano di Q.

   Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli APA', BPB', CPC' passano per uno stesso punto che sta sulla retta OP.

Teoria dei Numeri – Problemi di ammissione

1. Sia a_n la successione degli interi positivi la cui rappresentazione decimale è della forma

$$a_n = 2\underbrace{010\,010\ldots010}_{n \text{ volte}}$$

   (si intende che il blocco 010 è ripetuto n volte).

   Dimostrare che esistono infiniti elementi della successione che sono multipli di a_{2011}.

2. Siano a ed n due interi positivi con la proprietà che tutti i fattori primi di a sono maggiori di n.

   Dimostrare che $n!$ divide $(a-1)(a^2-1)\cdot\ldots\cdot(a^{n-1}-1)$.

3. Sia $p > 5$ un numero primo. Determinare tutti gli interi positivi x tali che

$$\frac{5p^n + x^n}{5p + x}$$

   è intero per ogni intero positivo n.

Teoria dei Numeri – Sessioni dello stage

4. Determinare tutti gli interi positivi n di 16 cifre (che eventualmente possono iniziare con qualche cifra zero) con la seguente proprietà: la scrittura decimale dei primi 16 multipli di n si ottiene permutando le cifre di n in maniera ciclica.

5. Un primo p si dice *nice* se esistono un intero positivo k ed una sequenza di interi $(n_1, \ldots, n_k)$ tali che, per ogni $i = 1, \ldots, k$, valgono le seguenti 3 relazioni:

$$n_i \geq \frac{p+1}{2}, \qquad \frac{p^{n_i}-1}{n_{i+1}} \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{p^{n_i}-1}{n_{i+1}}, n_{i+1}\right) = 1$$

(dove si intende che $n_{k+1} = n_1$).

Dimostrare che tutti i numeri primi p sono *nice* eccetto $p = 2$.

6. Siano $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ interi positivi distinti tali che

$$(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n \,\Big|\, (n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che esiste un intero positivo k tale che $b_i = ka_i$ per $i = 1, 2, 3$.

Team(s) Selection Test

A1 Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano D, E, F i piedi delle altezze sui lati BC, CA, AB, rispettivamente. Siano P_1 e P_2 le intersezioni tra la retta EF e la circonferenza circoscritta ad ABC. La retta DF interseca la retta BP_1 in Q_1, ed interseca la retta BP_2 in Q_2.

Dimostrare che i punti P_1, P_2, Q_1, Q_2 appartengono ad una stessa circonferenza con centro in A.

A2 Determinare tutte le coppie (m, n) di interi non negativi tali che

$$m^2 + 2 \cdot 3^n = m\left(2^{n+1} - 1\right).$$

A3 Sia $x_1, x_2, \ldots$ la successione definita ponendo $x_1 = 1$ e successivamente

$$x_{2k} = -x_k, \qquad x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$$

per ogni $k \geq 1$.

Dimostrare che $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$.

B1 In un campionato militano 2^n squadre, con $n \geq 4$. Ogni squadra ha una bandiera composta da $1 \times n$ quadratini, ciascuno dei quali può essere bianco o nero. Le bandiere delle varie squadre sono tutte diverse.

Un insieme di n bandiere si dice *versatile* se è possibile disporre le n bandiere in modo da formare un quadrato $n \times n$ in cui tutte le caselle della diagonale principale hanno lo stesso colore. Più precisamente: il quadrato è costruito sovrapponendo le bandiere disposte orizzontalmente con l'asta a sinistra, e la diagonale principale è quella che va dal vertice in alto a sinistra a quello in basso a destra.

Determinare il più piccolo intero M tale che ogni insieme di M bandiere distinte contiene un sottoinsieme di n bandiere che sia versatile.

B2 Sia ABC un triangolo e sia P un punto al suo interno (non sui lati). Sia A_1 l'ulteriore intersezione tra la retta AP e la circonferenza circoscritta ad ABC, sia M_a il punto medio del lato BC, e sia A_2 il simmetrico di A_1 rispetto ad M_a. Definiamo in modo analogo i punti B_2 e C_2 (a partire da B_1, C_1, M_b, M_c).

(a) Determinare (se ne esistono) tutti i punti P per cui A_2, B_2, C_2 *non* sono 3 punti distinti.

(b) Nei casi in cui A_2, B_2, C_2 sono tre punti distinti, sia K il circocentro del triangolo $A_2B_2C_2$.

Dimostrare che, al variare di P, il punto medio del segmento PK resta fisso.

B3 Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tali che

$$f\left([f(x)]^2 y\right) = x^3 f(xy)$$

per ogni x ed y in $\mathbb{Q}^+$ (con $\mathbb{Q}^+$ si intende l'insieme dei numeri razionali positivi).

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.