Algebra – Problemi di ammissione

A1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

A2. Dimostrare che

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali maggiori di -1.

A3. Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali positivi tali che

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Dimostrare che

$$\max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq 4 \min\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Algebra – Sessioni dello stage

A4. Dimostrare che

$$\frac{1}{x+y^{20}+z^{12}}+\frac{1}{y+z^{20}+x^{12}}+\frac{1}{z+x^{20}+y^{12}}\leq 1$$

per ogni terna (x, y, z) di numeri reali positivi tali che $xyz = 1$.

A5. Dimostrare che

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali non negativi.

A6. Dimostrare che

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)\left(1+\sqrt[4]{abcd}\right)^4\geq 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

per ogni quaterna (a, b, c, d) di numeri reali positivi.

A7. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(y)+f(x))=2f(x)+xy$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

A8. Sia x un numero reale positivo, e siano a e b due numeri interi relativamente primi.

(a) Dimostrare che, se $x^a + x^{-a}$ e $x^b + x^{-b}$ sono entrambi razionali, allora $x^n + x^{-n}$ è razionale per ogni n intero.

(b) Dimostrare che, se $x^a + x^{-a}$ e $x^b + x^{-b}$ sono entrambi interi, allora $x^n + x^{-n}$ è intero per ogni n intero.

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Siano dati k punti distinti su una circonferenza. Chiamiamo *intervallo* un qualunque arco che abbia come estremi due di tali punti. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di intervalli con la proprietà che ogni membro della famiglia *è contenuto* come "sottointervallo" in al più un altro membro della famiglia. Sia M il numero dei membri *massimali* di $\mathcal{F}$, cioè quelli che non sono sottointervalli di nessun altro membro di $\mathcal{F}$, e sia N il numero dei membri di $\mathcal{F}$ che non sono massimali.

Dimostrare che
$$M + \frac{N}{2} \leq k.$$

C2. Sul tavolo circolare del Consiglio dei Ministri sono stati disposti 28 vasi. Due persone sedute intorno al tavolo si possono vedere se e solo se la corda che li congiunge non contiene alcun vaso.

Dimostrare che, comunque si facciano sedere 12 ministri intorno al tavolo, ce ne saranno sempre 2 che si possono vedere.

C3. Ad un tavolo circolare (tanto per cambiare) siedono $2n$ persone. Vengono distribuiti m biscotti e le persone possono passarseli a due condizioni:

- si può passare un biscotto solo ad un vicino,
- per passare un biscotto bisogna mangiarne uno.

Determinare il minimo valore di m per cui vale la seguente proprietà: qualunque sia la distribuzione iniziale dei biscotti, e comunque si scelga una persona A, esiste una successione di mosse che porta A ad avere almeno un biscotto.

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. Ad un tavolo circolare siedono 42 tra cavalieri e gonzi; i cavalieri dicono sempre la verità, mentre i gonzi rispondono a caso. Ad ognuno viene posta la domanda: "Il tuo vicino a destra è cavaliere o gonzo?".

Determinare il massimo intero G per cui vale la seguente proprietà: se i gonzi non sono più di G, e si conoscono le risposte date da tutti i 42 presenti, allora è possibile additare con certezza almeno un cavaliere.

C5. Su una lavagna sono scritti inizialmente i numeri da 1 a 20. Una "mossa" consiste nello scegliere due dei numeri sulla lavagna, a e b, con $b - a \geq 2$, cancellarli e scrivere al loro posto $a + 1$ e $b - 1$.

Determinare quante mosse si possono fare al massimo.

C6. Una scacchiera 2010×2010 è tassellata utilizzando i classici trimini ad L, ottenuti rimuovendo una casella ad un quadrato 2×2.

Dimostrare che è possibile mettere un pallino in un quadretto di ciascun trimino in modo che tutte le righe e tutte le colonne abbiano lo stesso numero di pallini.

C7. (a) Sia r un intero positivo, e siano $a_1, \ldots, a_r$ numeri interi maggiori o uguali a 2 la cui somma fa 2010.

Dimostrare che l'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, 2010\}$ può essere partizionato in r parti $A_1, \ldots, A_r$ tali che $|A_i| = a_i$ per ogni $i = 1, \ldots, r$, e la somma degli elementi di ciascuna parte è divisibile per 2011.

(b) Determinare se vale il risultato analogo quando la somma degli a_i fa 2011, l'insieme da partizionare è $\{1, 2, 3, \ldots, 2011\}$, e la somma degli elementi di ciascuna parte deve essere divisibile per 2012.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. Sia D il piede della bisettrice dell'angolo $\angle A$ nel triangolo $\triangle ABC$. La retta che congiunge gli incentri dei triangoli $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$ incontra nuovamente AB e AC nei punti M ed N, rispettivamente.

Dimostrare che BN e CM si incontrano sulla bisettrice AD.

G2. Sia AC un diametro di una circonferenza, e sia BD una corda della stessa circonferenza perpendicolare ad AC. Sia E l'intersezione tra AC e BD, e supponiamo che E sia più vicino ad A che a C. Sia F un punto sul prolungamento di AD dalla parte di A, e sia G un punto sul prolungamento di AB dalla parte di A, tali che DG è parallelo a BF. Sia H il piede della perpendicolare condotta da C alla retta FG.

Dimostrare che i punti B, E, F, H giacciono su un'unica circonferenza.

G3. Sia P un punto interno al triangolo acutangolo $\triangle ABC$. I cerchi con centro nei punti medi dei lati e passanti per P si intersecano nuovamente a coppie nei punti D, E, ed F.

Dimostrare che P è l'incentro del triangolo $\triangle DEF$ se e solo se P è il circocentro del triangolo $\triangle ABC$.

Geometria – Sessioni dello stage

G4. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo. Le bisettrici interna ed esterna di $\angle ABC$ incontrano la retta AC in B_1 e B_2 rispettivamente. Similmente, le bisettrici interna ed esterna di $\angle ACB$ incontrano la retta AB in C_1 e C_2 rispettivamente.

Supponiamo che le circonferenze con diametri B_1B_2 e C_1C_2 si intersechino all'interno del triangolo $\triangle ABC$ nel punto P.

Dimostrare che $\angle BPC = 60° + \angle BAC$.

G5. Sia $\triangle ABC$ un triangolo, I il suo incentro, I_a l'excentro relativo al vertice A, e D il piede della bisettrice esterna uscente da A. Il segmento perpendicolare a DI_a passante per I interseca il cerchio circoscritto ad $\triangle ABC$ nel punto A'. Similmente si definiscono i punti B' e C'.

Dimostrare che AA', BB', e CC' sono concorrenti.

G6. Sia ABC un triangolo con incentro I e sia Γ il suo cerchio circoscritto. Le rette AI e BI intersecano nuovamente Γ in D ed E rispettivamente. La corda DE interseca AC nel punto F e BC nel punto G. Sia P l'intersezione della retta parallela ad AD passante per F e della retta parallela a BE e passante per G. Supponiamo che le tangenti a Γ per A e per B si intersechino nel punto K.

Dimostrare che le tre rette AE, BD, e KP sono parallele oppure concorrenti.

G7. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso circoscritto ad una circonferenza ω con centro O. Supponiamo che la circonferenza circoscritta al triangolo ACE abbia centro O. Sia J il piede della perpendicolare da B a CD. Supponiamo che la perpendicolare da B a DF intersechi la retta EO nel punto K. Sia L il piede della perpendicolare da K a DE.

Dimostrare che $DJ = DL$.

G8. Sia I l'incentro del triangolo $\triangle ABC$. Una retta per I interseca AB, AC in M, N rispettivamente.

Dimostrare che

$$\frac{BM \cdot CN}{AM \cdot AN} \leq \frac{BC^2}{4\,AB \cdot AC}\ .$$

G9. Siano Γ e ω due circonferenze. Sia $\mathcal{T}$ l'insieme dei triangoli $\triangle ABC$ che hanno Γ come circonferenza circoscritta e ω come circonferenza inscritta. Sia X su ω o al suo interno; fissato $ABC \in \mathcal{T}$, siano D, E, ed F le proiezioni di X su BC, CA, AB.

Dimostrare che la somma $XD + XE + XF$ non dipende da $ABC \in \mathcal{T}$.

G10. Sia ABC un triangolo acutangolo con circonferenza circoscritta ω. Sia t una tangente di ω e siano poi t_a, t_b, t_c le rette ottenute riflettendo t nei lati BC, CA e AB. Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo determinato da t_a, t_b, t_c è tangente ad ω.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri interi tali che

$$2^a + 3^b = 5^c.$$

N2. Determinare tutti gli interi positivi k per cui esiste un intero positivo M che soddisfa le seguenti due proprietà:

- M è multiplo di k;
- dividendo M per $2, 3, \ldots, 2012$ si ottengono resti $r_2, r_3, \ldots, r_{2012}$ tutti distinti.

N3. Determinare tutte le quintuple (a, n, p, q, r) di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1).$$

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Per ogni intero positivo a, indichiamo con $P(a)$ il più grande divisore primo di $a^2 + 1$. Dimostrare che esistono infinite terne di interi positivi distinti (a, b, c) tali che

$$P(a) = P(b) = P(c).$$

N5. (a) Si provi che un numero di Fibonacci non può mai essere della forma $7^m + 117$.
   (b) Si provi che un numero di Fibonacci non può mai essere della forma $9^m + 18$.

N6. Dati due interi positivi m ed n, dimostrare che esistono infinite coppie (a, b) di interi positivi relativamente primi tali che

$$(a + b) | (am^a + bn^b).$$

Girls Selection Test

GST1. Consideriamo l'equazione funzionale

$$f(f(x)-y)=f(y)-f(f(x)).$$

(a) Dimostrare che esistono funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che la soddisfano per ogni x e y in $\mathbb{Z}$ e tali che $f(2011)=2012$.

(b) Dimostrare che tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che la soddisfano per ogni x e y in $\mathbb{Z}$ sono limitate.

(c) Sia S l'insieme degli interi positivi. Determinare tutte le funzioni $f : S \to S$ che la soddisfano per ogni coppia $(x,y) \in S^2$ tale che $f(x)-y \in S$.

GST2. Sia A un insieme costituito da 101 numeri interi (distinti) maggiori o uguali a 0 e minori di 5050.

Dimostrare che esistono quattro elementi distinti a, b, c, d in A tali che

$$5050 \mid (a-b+c-d).$$

GST3. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, e sia P il punto di intersezione delle diagonali. Sia K un punto sulla bisettrice di $\angle APD$ tale che $AP = PK$, e sia L un punto sulla bisettrice di $\angle BPC$ tale che $BP = PL$ (le bisettrici sono intese come semirette). Sia M l'intersezione delle rette AK e BL, e sia N l'intersezione delle rette KD ed LC.

Dimostrare che le rette KL ed MN sono perpendicolari.

GST4. Determinare tutte le terne di interi positivi (x,y,z) tali che

$$3^x + 7^y = 4^z.$$

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

A1. Sia ABC un triangolo acutangolo. Una circonferenza ω con centro in un punto L del lato BC è tangente al lato AB in B' ed è tangente al lato AC in C'. Supponiamo che il circocentro O del triangolo ABC stia sul più corto degli archi $B'C'$ di ω.

Dimostrare che ω e la circonferenza circoscritta ad ABC si incontrano in due punti distinti.

A2. Per ogni intero positivo k, indichiamo con $D(k)$ il più grande divisore dispari di k.

Determinare tutti gli interi positivi a per cui esiste un intero positivo n tale che tutte le differenze

$$D(n+a)-D(n), \quad D(n+a+1)-D(n+1), \quad \ldots, \quad D(n+2a-1)-D(n+a-1)$$

sono divisibili per 4.

A3. Determinare tutte le coppie (f, g) di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

B1. Determinare tutte le 2012-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012})$ di interi positivi con la seguente proprietà: per ogni intero positivo n, esiste un intero a tale che

$$x_1^n + 2x_2^n + \ldots + 2012x_{2012}^n = a^{n+1} + 1.$$

B2. Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno, e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Siano A_0 il punto medio di BC, B_0 il punto medio di AC, C_0 il punto medio di AB, D il piede dell'altezza uscente da A, D_0 la proiezione di A_0 sulla retta B_0C_0, G il baricentro di ABC. Sia ω la circonferenza passante per B_0 e C_0, e tangente a Γ in un punto P diverso da A.

(a) Dimostrare che la retta B_0C_0 e le tangenti a Γ nei punti A e P sono concorrenti.

(b) Dimostrare che i punti D_0, G, D, P sono allineati.

B3. Un gruppo di 1000 studenti è disposto lungo una circonferenza.

Dimostrare che esiste un intero k, con $100 \leq k \leq 300$, per cui esiste un gruppo di $2k$ studenti disposti consecutivamente lungo la circonferenza, di cui la prima metà contiene lo stesso numero di ragazze della seconda metà.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

G10. **Reverse engineering** Se le due circonferenze sono tangenti, allora sono omotetiche. Quindi esiste un triangolo DEF inscritto in ω con i lati paralleli a t_a, t_b, t_c. Chi sono D, E, F? Come si costruiscono a partire da A, B, C, T? Ora basta tornare indietro.

La disperazione Tutto con i numeri complessi sulla circonferenza unitaria. Non difficile calcolare le tre rette t_a, t_b e t_c con i loro punti di intersezione A', B', C'; poi, usando il fatto che

$$\frac{a'-b'}{a'-c'} = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$$

si pu impostare l'equazione di un punto K tale che $|k| = 1$ e conciclico con A', B', C'. Quante radici deve avere questa equazione?

Il lemma ovvio Intanto, lemma: Sia DEF un triangolo con circonferenza circoscritta Γ, siano R, S su DE e DF; allora esiste un arco di circonferenza da R a S di angolo θ tangente a Γ nel semipiano opposto ad D se e solo se esiste un arco da E a F tangente a RS di angolo $\theta + \widehat{EDF}$.

E dopo il lemma, l'osservazione: se A', B', C' sono i vertici del nuovo triangolo, allora AA', BB', CC' concorrono. Dove?

Fatti sparsi Le riflessioni di T nei lati sono allineate in una retta che passa ... dove? Dalle riflessioni di T e dai vertici si possono ricostruire A', B', C'? Come? Non c' ora un punto su troppi cerchi?

Alternativamente, un'inversione nel punto misterioso P_M per cui passa la retta suddetta...

Riflessioni Dall'hint precedente, riflettendo P_M nei lati, e collegando le riflessioni con quelle di T nei lati, si hanno tre rette concorrenti... vero? Che sia un punto utile, quello di concorrenza?

N1.

N2.

N3.

N4.

N5.

N6.

GST1.

GST2.

GST3.

GST4.

TST1.