Algebra – Problemi di ammissione

A1. Determinare tutti i polinomi $p(x)$ per i quali esiste una costante reale a tale che valga l'identità seguente

$$p(x + x^2 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)\, p(ax).$$

A2. Sia f una funzione da $\mathbb{Z}$ in sé tale che per ogni coppia di interi x, y si abbia

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x))$$

Dimostrare che f è limitata.

A3. Dato $n \geq 4$, siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali tali che

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \qquad \text{e} \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n^2$$

Dimostrare che $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 2$.

Algebra – Sessioni dello stage

A4. I numeri reali positivi x, y e z soddisfano $xyz+xy+yz+zx = x+y+z+1$. Dimostrare che
$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+y^2}{1+y}}+\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z}}\right) \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{5/8}.$$

A5. Dimostrare che se a, b e c sono le lunghezze dei lati di un triangolo acutangolo e R è il raggio della circonferenza circoscritta, allora
$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3} \geq \sqrt{3}R$$

A6. Per ogni intero $n \geq 3$, si determini l'insieme dei valori assunti dall'espressione
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}$$
al variare delle n-uple di reali $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 1$ che soddisfano $|x_k - x_{k+1}| \leq 1$ per ogni $1 \leq k \leq n-1$. Si determini anche quando vengono assunti i valori estremali.

A7. Determinare tutti gli α reali tali che esiste una e una sola funzione dai reali in sé che soddisfi
$$f(x^2+y+f(y)) = f(x)^2 + \alpha y$$
per ogni x e y.

A8. Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti reali di grado $n \geq 2$. Supponiamo che per qualche k intero positivo, $(x-1)^{k+1}$ divida $p(x)$. Dimostrare che la somma dei valori assoluti dei coefficienti di $p(x)$ è strettamente maggiore di $2+\dfrac{2k^2}{n}$.

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Sia $n \geq 3$ un intero; n pedine con una faccia nera ed una bianca sono disposte in cerchio e numerate il senso orario. Inizialmente, una mostra la faccia nera e tutte le altre quella bianca. Una mossa consiste nello scegliere un numero k tale che la pedina al posto k mostri la faccia nera, voltare la pedina al posto $k+1$ e spostare quella al posto k nel posto $k+2$ retrocedendo di un posto le pedine ai posti $k+2$ e $k+1$ (senza voltarle).

Dimostrare che per qualunque sottoinsieme $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ con un numero finito di mosse si può fare in modo che le pedine nere siano esattamente quelle di posto appartenente a S.

C2. Ci sono k scatole numerate da 1 a k, ciascuna contenente n_i palle ($i = 1, \ldots, k$) e viene fissato un numero naturale $h \geq 2$. È lecito

(a) togliere da tutte le scatole uno stesso numero di palle, oppure

(b) scegliere una scatola e moltiplicare per h il numero di palle in essa contenute.

Determinare, a seconda del valore di h e degli n_i, quando è possibile vuotare tutte le scatole usando solo mosse di questi due tipi.

C3. Le diagonali e i lati di un n-agono sono colorati usando (al più) n colori. Per quali n è possibile, colorando opportunamente, che per ogni insieme di tre colori esista un qualche triangolo colorato con quei tre colori?

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. Nel piano $m+1$ rette orizzontali separate da strisce larghe 2 incontrano $m+1$ rette verticali separate anch'esse da strisce larghe 2, formando tanti quadratini 2×2. Su ogni punto medio di ogni lato di ogni quadratino c'è un automa orientato in uno dei due possibili versi della retta su cui è. Ogni secondo ogni automa fa un passo lungo 1 in avanti nella sua direzione; se questo lo porta a scontrarsi *frontalmente* con un altro automa ad un incrocio, ruota di un angolo retto verso destra, altrimenti attende di fare il passo successivo rimanendo orientato nella direzione e nel verso in cui si trova.

Dimostrare che tutti gli automi prima o poi escono dal quadrato $2m \times 2m$ costituito dai quadratini e calcolare il tempo massimo trascorso il quale saranno necessariamente usciti tutti.

C5. Sono dati n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ciascuno di n elementi, non necessariamente disgiunti. Dimostrare che è possibile enumerare i loro elementi con due indici i e j in modo che, per ogni i, $A_i = \{a_{i,j} \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$ e che anche gli insiemi B_j definiti (al variare di j da 1 a n) come $B_j = \{a_{i,j} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ abbiano n elementi ciascuno.

C6. Si fissa un naturale $k > 0$ e Barbara piazza il suo segnaposto nel punto $(0, 0)$ del piano. Poi, a turno,

a) Alberto sceglie un punto a coordinate intere non negative diverso da quello dove si trova il segnaposto di Barbara e ci piazza una pietra,
b) Barbara muove il suo segnaposto lungo un percorso costituito da al più k passi, ciascuno di lunghezza 1 verso destra o verso l'alto, che non deve toccare i punti dove si trovano le pietre di Alberto.

Alberto vince se ad un certo punto Barbara non può più muovere il suo segnaposto, Barbara vince se questo non accade mai.

Per quali valori di k Alberto possiede una strategia vincente?

C7. Coloriamo n vertici di un $2n$-agono di rosso e gli altri di blu. Scriviamo poi la lista delle distanze tra punti rossi ordinata monotona non decrescente e analogamente facciamo con la lista delle distanze tra punti blu.

Dimostrare che le due liste sono uguali.

C8. In una scacchiera 2013×2013 le caselle sono colorate di bianco o di nero. Consideriamo il numero T di terne di caselle (C_1, C_2, C_3) con queste proprietà:

(a) C_1 e C_2 stanno nella stessa riga;
(b) C_2 e C_3 stanno nella stessa colonna;
(c) C_1 e C_3 sono bianche, mentre C_2 è nera.

Determinare il massimo valore possibile di T.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso. Siano $P = AB \cap CD$, $Q = CD \cap EF$, $R = EF \cap AB$, $S = BC \cap DE$, $T = DE \cap FA$, $U = FA \cap BC$.

Dimostrare che

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{QR}{EF} = \frac{RP}{AB} \quad \text{se e solo se} \quad \frac{ST}{DE} = \frac{TU}{FA} = \frac{US}{BC}.$$

G2. Sia ABC un triangolo acutangolo. Sia D un punto arbitrario sul segmento AB. Siano M e N i piedi delle perpendicolari da D a BC e AC, rispettivamente. Siano H_1 e H_2 gli ortocentri dei triangoli MNC e MND, rispettivamente.

Dimostrare che l'area del quadrilatero AH_1BH_2 non dipende dalla posizione di D su AB.

G3. Sia ABC un triangolo, A', B', C' i punti di tangenza della circonferenza inscritta su BC, CA, AB; tracciamo AA' che interseca la circonferenza inscritta nuovamente in Q e il segmento $B'C'$ in L. Chiamiamo M il punto medio di $B'C'$, T l'intersezione di BC e $B'C'$, P la proiezione di L su AT. Dimostrare che $A'MQP$ ciclico.

Geometria – Sessioni dello stage

G4. I punti A_1, B_1, C_1 appartengono rispettivamente ai lati BC, CA e AB del triangolo ABC. Supponiamo di sapere che

$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1 \,.$$

Siano O_A, O_B e O_C i circocentri dei triangoli AB_1C_1, A_1BC_1 e A_1B_1C. Dimostrare che l'incentro di $O_AO_BO_C$ coincide con l'incentro di ABC.

G5. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia D su BC il piede dell'altezza da A. Indichiamo poi con M il punto medio di BC e con H l'ortocentro. Sia E il punto di intersezione della circonferenza circoscritta Γ con la semiretta per H uscente da M e sia F il punto di intersezione (diverso da E) di ED con Γ. Dimostrare che $BF/CF = AB/AC$.

G6. Sia ABC un triangolo con circonferenza circoscritta ω, incentro I e A-excentro I_A. Siano D ed E i punti di tangenza di BC con circonferenza inscritta ed exinscritta opposta ad A, rispettivamente, e sia M il punto medio dell'arco BC che non contiene A. Si consideri la circonferenza tangente all'arco BAC e al segmento BC in D e si chiami T il punto di tangenza tra essa e ω. Se TI interseca nuovamente omega in S, dimostrare che SI_A e ME si intersecano in un punto di ω.

G7. Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno, con ortocentro H e baricentro G, tale che $[HAB]^{-1} + [HAC]^{-1} = 2[HBC]^{-1}$ ($[XYZ]$ indica l'area del triangolo XYZ). Si dimostri che $A\widehat{G}H$ è retto.

G8. La circonferenza exinscritta ω_A opposta al vertice A nel triangolo ABC tocca il lato BC in M. I punti D, E appartengono rispettivamente ai lati AB, AC di modo che DE sia parallelo a BC. La circonferenza ω_1 inscritta nel triangolo ADE tocca il lato DE in N. Detti O e O_1 i centri di ω_A e ω rispettivamente, posto $F = BO_1 \cap DO$ e $G = CO_1 \cap EO$, si dimostri che il punto medio di FG appartiene a MN.

G9. Sia ABC un triangolo con circocentro O e incentro I. I punti D, E e F si trovano, rispettivamente, sui lati BC, AC e AB e sono tali che $BD + BF = CA$ e $CD + CE = AB$. Le circonferenze circoscritte ai triangoli BFD e CDE si si intersecano nuovamente in P. Dimostrare che $OP = OI$.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Sia n un intero maggiore di 1 avente esattamente k divisori primi distinti. Mostrare che esiste un intero a con $1 < a < \frac{n}{k} + 1$ tale che $n | a^2 - a$.

N2. Sia $p > 2$ un primo congruo a 2 modulo 3 e sia $\pi(x) = x^3$ considerata come permutazione di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dimostrare che π è una permutazione pari se e solo se $p \equiv 3 \pmod 4$.

N3. Sia $\tau(n)$ il numero di divisori di n. Diciamo che un intero positivo n è *buono* se per ogni intero positivo $m < n$ si ha $\tau(m) < \tau(n)$. Dimostrare che per ogni k intero positivo esistono al più una quantità finita di numeri buoni non divisibili per k.

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Dimostrare che

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}$$

con a, b, c interi positivi non mai un intero.

N5. Sia $p \equiv 3 \pmod 4$. Dimostrare che

$$\prod_{1 \le x < y \le \frac{p-1}{2}} \left(x^2+y^2\right) \equiv (-1)^{\lfloor \frac{p+1}{8} \rfloor}$$

N6. Sia n un intero positivo. Dimostrare che esistono infinite terne (x, y, z) di interi positivi che soddisfano

$$nx^2 + y^3 = z^4, \quad (x, y) = (y, z) = (z, x) = 1.$$

Girls Selection Test

GST1. Siano a, b e c numeri reali tali che $0 < a < b < c$.

Dimostrare che

$$a^{20}b^{12} + b^{20}c^{12} + c^{20}a^{12} < b^{20}a^{12} + a^{20}c^{12} + c^{20}b^{12}.$$

GST2. Sia $n \geq 3$ un numero intero. Un gruppo di n stagisti, le cui altezze sono tutte l'una diversa dall'altra, è disposto lungo una circonferenza. In tale disposizione, uno stagista si ritiene *alto* se la sua altezza è maggiore di quella dei suoi due vicini. Analogamente, uno stagista si ritiene *mediano* se i suoi due vicini sono l'uno più alto e l'altro più basso di lui.

(a) Determinare, in funzione di n, quali sono i valori di k per cui esiste una disposizione in cui esattamente k stagisti si ritengono alti.

(b) Determinare, in funzione di n, quali sono i valori di k per cui esiste una disposizione in cui esattamente k stagisti si ritengono mediani.

GST3. Sia $ABCDE$ un pentagono ciclico (non intrecciato) in cui $AB = BC$ e $CD = DE$. Sia P l'intersezione tra AD e BE, sia Q l'intersezione tra BD e CA, e sia R l'intersezione tra BD e CE.

(a) Dimostrare che il triangolo PQR è isoscele.

(b) Dimostrare che la retta CP è perpendicolare alla retta BD.

GST4. Determinare tutte le terne di interi positivi (x, n, p) tali che p è un numero primo e

$$x^3 + 3x + 14 = 2p^n.$$

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

A1. Degli interi positivi, non necessariamente distinti, sono stati scritti in una fila. Ad ogni passaggio Alberto sceglie (se esistono) due interi x e y scritti in posizioni adiacenti, con x a sinistra di y e $x > y$. Poi rimpiazza la coppia (x, y) con $(y + 1, x)$ o $(x - 1, x)$ a sua scelta.

Dimostrare che Alberto può effettuare solo un numero finito di queste operazioni.

A2. Determinare tutte le terne (x, y, z) di interi positivi tali che $x \leq y \leq z$ e

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2).$$

A3. Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano D, E, F i piedi delle altezze uscenti da A, B, C, rispettivamente. Sia I l'incentro di ABC, e siano I_1, I_2, I_3 gli incentri di AEF, BFD, CDE, rispettivamente. Sia O_1 il circocentro di ACI_1 e sia O_2 il circocentro di BCI_2.

(a) Dimostrare che I è l'ortocentro di $I_1I_2I_3$.

(b) Dimostrare che la retta I_1I_2 è parallela alla retta O_1O_2.

B1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z)$$

per ogni terna di numeri razionali x, y, e z.

B2. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e sia E il punto di intersezione delle diagonali AC e BD. Le rette AD e BC si intersecano nel punto F, con A compreso tra D ed F, e B compreso tra C ed F. Sia G il punto tale che $CEDG$ è un parallelogrammo, e sia H il simmetrico di E rispetto alla retta AD.

Dimostrare che i punti D, H, F, G stanno su una stessa circonferenza.

B3. Per ogni coppia di sottoinsiemi X ed Y di un qualunque insieme numerico poniamo

$$X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}.$$

(a) Determinare se è possibile partizionare $\mathbb{Z}$ come unione di tre sottoinsiemi non vuoti A, B, C, a due a due disgiunti, tali che $A + B$, $B + C$, $C + A$ sono a loro volta a due a due disgiunti.

(b) Determinare se è possibile partizionare $\mathbb{Q}$ come unione di tre sottoinsiemi non vuoti A, B, C, a due a due disgiunti, tali che $A + B$, $B + C$, $C + A$ sono a loro volta a due a due disgiunti.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.