Algebra – Problemi di ammissione

A1. Siano a, b e c reali positivi tali che $a+b+c = ab+bc+ca$. Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza e dire quando si ha l'uguaglianza.

$$\frac{1}{a^2+b+1} + \frac{1}{b^2+c+1} + \frac{1}{c^2+a+1} \leq 1.$$

A2. Determinare tutte le funzioni surgettive da $(0,\infty)$ in s tali che per ogni $x > 0$ si abbia,

$$xf(x) + f(x)f(f(x)) = 2xf(f(x)).$$

A3. Determinare A e B tali che per ogni scelta di x, y e z reali positivi si abbia,

$$A \leq \frac{4x+y}{x+4y} + \frac{4y+z}{y+4z} + \frac{4z+x}{z+4x} \leq B.$$

Dire se per entrambe le disuguaglianze possa valere l'uguaglianza.

Algebra – Sessioni dello stage

A4. Dimostrare che per tutte le terne positive a, b, c che soddisfano $abc = 1$, si ha,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(a+1) + ab(ab+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

A5. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(x + f(y)) + yf(x).$$

A6. Dimostrare che per ogni scelta di a, b, c, d non negativi si ha

$$(ab)^{\frac{1}{3}} + (cd)^{\frac{1}{3}} \leq [(a + c + b)(a + c + d)]^{\frac{1}{3}}.$$

A7. Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano $a_1, \ldots, a_{n-1}$ numeri reali qualunque. Siano $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ e $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ due $(n+1)$-uple tali che

- $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$,
- $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$,
- $v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$.

Dimostrare che $u_n = v_n$.

A8. Dimostrare che, per ogni intero positivo n, il polinomio

$$p(x) = (x^2 - 8x + 25)(x^2 - 16x + 100) \cdot \ldots \cdot (x^2 - 8nx + 25n^2) + 1$$

è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

A9. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + y) + y \leq f(f(f(x)))$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. In una scacchiera $n \times n$ sono poste k tessere a forma di L (coprenti cioè ciascuna tre caselle non allineate di cui una ha un lato in comune con ciascuna delle altre due), in modo che non siano mai sovrapposte e che per ogni coppia di righe a, b e ogni coppia di colonne s, t almeno una tra le quattro caselle agli incroci $((a, s), (a, t), (b, s), (b, t))$ *non* sia coperta da una tessera. Quali valori può assumere k?

C2. Sono dati 17 insiemi di 5 elementi, $A_1, \ldots, A_{17}$ tali che per ogni coppia di insiemi distinti l'intersezione ha esattamente 2 elementi. Dimostrare che tutti gli insiemi si intersecano negli stessi 2 elementi.

C3. Il reticolo di strade tra n città gode di queste proprietà: due città o sono collegate da una strada, o non sono collegate affatto (se non eventualmente passando da altre città); inoltre, comunque si scelgano $n - 2$ città, il numero totale M di strade tra di esse è lo stesso. Trovare quali sono i possibili valori per il numero totale di strade N.

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. In ogni casella di una scacchiera 2014×2014 è seduta una persona che è o un cavaliere o un furfante.
Come è noto i cavalieri affermano sempre il vero, mentre i furfanti mentono sempre.
Ogni persona viene interrogata e dichiara la seguente frase: "I furfanti presenti nella mia riga sono tanti quanti i furfanti presenti nella mia colonna".
Determinare il minimo numero possibile di cavalieri presenti nella scacchiera.

C5. Sono date $2n$ pedine in fila. Una mossa consiste nello scambiare 2 pedine adiacenti. L'obiettivo è dare una successione di K mosse che permetta ad ogni pedina di trovarsi almeno una volta a capo e almeno una volta a coda della fila. Quanto vale K al minimo, per raggiungere l'obiettivo?

C6. Determinare il massimo intero r tale che comunque siano dati 5 sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_5$ di $\{1, \ldots, 1000\}$ ciascuno contenente 500 elementi, esistano necessariamente due indici i, j distinti tali che $|A_i \cap A_j| \geq r$.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. In un triangolo $\triangle ABC$, sia M il punto medio di AC, e D un punto su BC tale che $DB = DM$. Sappiamo che $2BC^2 = AC(AC + AB)$.

Dimostrare che i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle DMC$ sono simili.

G2. Sia ABC un triangolo rettangolo in C; scegliamo un punto P sull'arco AC della circonferenza circoscritta che non contiene B. La retta perpendicolare a CP e passante per C incontra AP e BP in K e L rispettivamente. Dimostrare che il rapporto tra le aree di BKL e ACP non dipende da P.

G3. Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia γ una circonferenza con corda BC. Tale circonferenza interseca i segmenti AC e AB di nuovo in Y e Z, rispettivamente. Definiamo P come il punto di intersezione dei segmenti BY e CZ. Definiamo inoltre E e F come i punti di intersezione di BY e CZ con Γ, rispettivamente. La bisettrice interna dell'angolo $\angle BEF$ interseca la retta FY nel punto K. Dimostrare che se $BF = BY$, allora $\angle FPK = \frac{1}{2}\angle BCE$.

Geometria – Sessioni dello stage

G4. I quadrati $CAKL$ e $CBMN$ sono costruiti sui lati di un triangolo acutangolo ABC, all'esterno del triangolo. La retta CN interseca il segmento AK in X; la retta CL interseca il segmento BM in Y. Il punto P, interno al triangolo ABC, è una intersezione delle circonferenze circoscritte ai triangoli KXN e LYM. Il punto S è il punto medio di AB. Il punto Q è l'intersezione delle rette KL e MN.

(a) Dimostrare che P, C e Q sono allineati.

(b) Dimostrare che $\angle ACS = \angle BCP$.

G5. Sia ABC un triangolo, e sia D un punto sul lato BC. Il circocerchio di ABD interseca AC in F (diverso da A), e il circocerchio di ACD interseca AB in E (diverso da A).

Dimostrare che, al variare di D, il circocerchio di AEF passa sempre per un punto fisso diverso da A, e che tale punto si trova sulla mediana di ABC uscente da A.

G6. Sia ABC un triangolo con incentro I. Sia ω il suo incerchio. Sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo BIC. Le circonferenze ω e Γ si intersecano nei punti X e Y. Siano Z e Z' i due centri di similitudine delle circonferenze ω e Γ.

(a) Dimostrare che $XZYZ'$ è ciclico.

(b) Dimostrare che la sua circonferenza circoscritta a $XZYZ'$ è tangente al circocerchio di ABC.

G7. Sia ABC un triangolo con circocerchio Γ. Siano M, N i punti medi degli archi AB, AC che non contengono C, B. Siano M', N' i punti di tangenza dell'incerchio di ABC con AB, AC. Supponiamo che X, Y siano i piedi delle perpendicolari da A a MM', NN'. Sia infine I l'incentro di ABC.

Dimostrare che il quadrilatero $AXIY$ è ciclico se e solo se $b + c = 2a$.

G8. Sia ABC un triangolo, H il suo ortocentro e K il suo punto di Lemoine. Indichiamo inoltre con K' il punto di Lemoine del triangolo ortico di ABC.

Dimostrare che H, K e K' sono allineati.

(NOTA: si ricorda che il triangolo ortico di XYZ è il triangolo che ha come vertici i piedi delle altezze di XYZ, e che il punto di Lemoine di XYZ è il punto di concorrenza delle simmediane di XYZ.)

G9. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso con $AB = DE$, $BC = EF$ e $CD = FA$. Supponiamo inoltre che $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$.

Dimostrare che le diagonali AD, BE e CF sono concorrenti.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Determinare tutte le quadruple di interi non negativi (a, b, c, d) tali che

$$11^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 2^d = 1.$$

N2. Siano m ed n interi positivi tali che $(2m + 1, 2n + 1) = 1$.

Dimostrare che

$$(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) \in \{1, 5\}.$$

N3. Determinare tutte le coppie (p, n), dove p è un numero primo ed n un intero positivo, tali che

$$p^5 + 4p + 1 = n^2.$$

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Determinare tutti gli interi positivi k tali che il prodotto dei primi k numeri primi dispari è della forma $a^b + 1$ con $a \geq 1$ e $b \geq 2$.

N5. Siano a, b due interi relativamente primi, e definiamo le successioni di interi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ mediante la formula
$$(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}.$$
Determinare l'insieme dei numeri primi p per i quali esiste un intero positivo $n \leq p$ tale che $p|b_n$.

N6. Determinare tutte le coppie di interi positivi (m, n) tali che $m^6 = n^{n+1} + n - 1$.

N7. Determinare tutti gli interi positivi n per i quali ogni coefficiente del polinomio
$$P_n(x) = (x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$
è divisibile per 7.

Girls Selection Test

GST1. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, 2014$ poniamo

$$S_k = \sum_{i=k}^{2014} \frac{1}{i} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2014}.$$

Calcolare

$$S_1 + \sum_{k=1}^{2014} S_k^2 = S_1 + S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_{2014}^2.$$

GST2.

(a) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, …, A_n, …, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i$.

(b) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, …, A_n, …, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i^2$.

GST3. Due circonferenze Γ_a e Γ_b, di raggio diverso, si intersecano in due punti M ed N. Una retta t è tangente a Γ_a nel punto A e a Γ_b nel punto B. La perpendicolare a t passante per A interseca MN in C. La perpendicolare a t passante per B interseca MN in D.

(a) Dimostrare che il quadrilatero $ACBD$ è un parallelogrammo.

(b) Sia E l'ulteriore intersezione tra CA e Γ_a, sia F l'ulteriore intersezione tra CB e Γ_b, sia X l'ulteriore intersezione tra DA e Γ_a, e sia Y l'ulteriore intersezione tra DB e Γ_b.

Dimostrare che i punti E, F, X, Y sono allineati.

GST4. Determinare tutte le terne (p, n, a) in cui p è un numero primo, n ed a sono interi positivi e

$$(2p)^n + 1 = a^3.$$

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

A1. Sia $\mathbb{Z}_{>0}$ l'insieme degli interi positivi.

Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tali che

$$[m^2 + f(n)] \quad \text{divide} \quad [mf(m) + n]$$

per ogni coppia di interi positivi m ed n.

A2. Sia ABC un triangolo, e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano M il punto medio di AB, N il punto medio di AC, T il punto medio dell'arco BC di ω che non contiene A. La circonferenza circoscritta al triangolo AMT interseca l'asse di AC in un punto X interno al triangolo ABC. La circonferenza circoscritta al triangolo ANT interseca l'asse di AB in un punto Y interno al triangolo ABC. Le rette MN e XY si intersecano in K.

Dimostrare che $KA = KT$.

A3. Sia S un insieme di 2000 numeri reali distinti.

Dimostrare che esistono due coppie distinte $(a, b) \in S^2$ e $(c, d) \in S^2$ tali che $a > b$, $c > d$, e

$$\left| \frac{a-b}{c-d} - 1 \right| < \frac{1}{100000}.$$

Nota. Le due coppie possono anche avere un elemento in comune, nel senso che per esempio può accadere che $a = c$ (ma in tal caso necessariamente si deve avere che $b \neq d$).

B1. Per ogni intero positivo n, determinare il più piccolo intero positivo $k(n)$ con questa proprietà.

> Per ogni intero positivo d e per ogni d-upla di numeri reali $(a_1, \ldots, a_d) \in [0, 1]^d$ tali $a_1 + \ldots + a_d = n$, è possibile suddividere i d elementi in $k(n)$ gruppi in maniera tale che la somma dei numeri appartenenti ad ogni gruppo sia sempre minore od uguale ad 1.

Nota. Quando si suddividono i d numeri si intende che ogni numero va a finire in uno ed un solo gruppo. Eventuali numeri ripetuti nella d-upla possono finire in gruppi diversi. Alcuni gruppi possono anche rimanere vuoti, ed in tal caso la loro somma si intende nulla.

B2.

(a) Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che

$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^2.$$

(b) Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che

$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^3.$$

B3. Sia ABC un triangolo scaleno acutangolo con $CB < CA$, sia D il piede dell'altezza uscente da C, e sia E un punto sull'altezza CD. La circonferenza di diametro CE interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in K (oltre che in C), il lato CA in L, e il lato CB in M. Sia N l'intersezione tra le rette KE e AB.

Dimostrare che il quadrilatero $DNML$ è ciclico.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.