Algebra – Problemi di ammissione

A1. Siano a, b e c reali positivi tali che $a^3+b^3+c^3=a^4+b^4+c^4$. Dimostrare che vale:

$$\frac{a}{a^2+b^4+c^4}+\frac{b}{a^4+b^2+c^4}+\frac{c}{a^4+b^4+c^2}\geq 1$$

A2. Determinare tutte le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali che

$$f(x-f(y))=f(-x)+(f(y)-2x)f(-y)$$

per ogni $x,y\in\mathbb{R}$.

A3. Dato il polinomio $p(x)=x^2+4x-4$, consideriamo la successione definita per ricorrenza, $a(1)=1$ e

$$a(n)=\sum_{k=1}^{n-1}p(n-k)a(k), \qquad n\geq 2$$

Si determini il più piccolo $\alpha\in\mathbb{R}$ tale che $a(n)\leq 2015\alpha^n$ per ogni $n\geq 1$.

Algebra – Sessioni dello stage

A4. Trovare tutte le funzioni f dai razionali positivi ai reali positivi tali che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x, y > 0$, si abbia

$$f(xy) = f(x+y)\big(f(x) + f(y)\big)$$

A5. Siano a, b, c reali positivi tali che $ab + bc + ca = 1$. Dimostrare che

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a} + 6\sqrt{3}b} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{b} + 6\sqrt{3}c} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{c} + 6\sqrt{3}a} \leq \frac{1}{abc}$$

e dire quando vale l'uguaglianza.

A6. Siano a, b, c reali positivi. Dimostrare che

$$1 \leq (1-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2 + \frac{2\sqrt{2}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

A7. Consideriamo l'insieme $\mathcal{S}$ dei polinomi $P(x)$ a coefficienti reali tali che

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y^2 - P(x)| \leq 2|x|\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - P(y)| \leq 2|y|\}.$$

Determinare i possibili valori di $P(0)$ al variare di $P(x)$ in $\mathcal{S}$.

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Alberto e Barbara giocano al seguente gioco, muovendo alternativamente: ad ogni mossa Alberto evidenzia 2 numeri naturali a scelta, che non fossero già stati evidenziati precedentemente; ad ogni mossa Barbara elimina un blocco di numeri naturali consecutivi e tutti evidenziati. L'obiettivo di Alberto è evidenziare 10 naturali consecutivi. Esiste una strategia vincente per Alberto?

C2. Sia n un intero positivo. Un triangolo equilatero di lato n è tassellato in triangolini equilateri di lato 1. In ogni vertice dei triangolini è posta una moneta con la testa rivolta verso l'alto. Una mossa consiste nel capovolgere le 3 monete ai vertici di un triangolino. Determinare i valori di n per i quali è possibile ottenere, con una opportuna sequenza di mosse, la configuarazione in cui le monete hanno la croce rivolta verso l'alto.

C3. Sia n un intero positivo. Dato un grafo su n vertici, sia a il minimo naturale per cui esiste una partizione dei vertici del grafo in a *cricche*; sia b il minimo naturale per cui esiste una partizione dei vertici del grafo in b *anticricche*. Determinare, al variare del grafo scelto tra tutti quelli con n vertici, il massimo valore possibile per $a + b$.

N.B.: In un grafo, una *cricca* è un sottoinsieme di vertici a 2 a 2 collegati; una *anticricca* è un sottoinsieme di vertici a 2 a 2 non collegati.

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. Sia $\mathbb{Z}^2$ l'insieme dei punti a coordinate intere nel piano: diciamo che 2 sottoinsiemi $S, S' \subseteq \mathbb{Z}^2$ hanno *la stessa forma* se esiste una traslazione τ del piano tale che $\tau(S) = S'$. Ora, ad ogni punto di $\mathbb{Z}^2$ viene associato un numero reale e diciamo che un insieme finito $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ ha *somma positiva* se la somma dei numeri associati ai punti di S è positiva.

Dati S_1, S_2 due sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Z}^2$ tali che tutti gli insiemi di punti della stessa forma di S_1 hanno somma positiva, dimostrare che esistono infiniti insiemi di punti della stessa forma di S_2 che hanno somma positiva.

C5. Sia $n > 1$ un intero positivo. In un mazzo di n carte, comunque prese 2 carte A e B, una tra A e B è *preferibile* all'altra. Alberto e Barbara giocano con questo mazzo al seguente gioco: inizialmente il mazzo viene diviso in 2 mazzetti, uno assegnato ad Alberto e uno a Barbara; quindi, ad ogni mossa entrambi i giocatori mostrano la carta in cima al proprio mazzetto: chi ha mostrato la carta *preferibile* ottiene anche quella dell'altro e la posiziona, insieme alla propria, in fondo al suo mazzetto. Quando un giocatore ripone le 2 carte vinte nel suo mazzetto, può decidere in che ordine posizionarle (in modo che l'ultima possa essere sia quella appena presa, sia quella già posseduta). Il gioco termina quando un giocatore ha esaurito tutte le carte del proprio mazzetto. Dimostrare che, qualsiasi sia la suddivisione iniziale del mazzo, Alberto e Barbara possono mettersi d'accordo su una strategia che permetta loro di terminare il gioco in un numero finito di mosse.

C6. Sia $X = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ una n-upla di numeri interi positivi distinti; definiamo $X^* = (a_1+a_2, a_1+a_3, \ldots, a_1+a_n, a_2+a_3, \ldots, a_{n-1}+a_n)$ la N-upla di tutte le possibili somme di coppie distinte di elementi in X. Siano A una n-upla e B una m-upla ($n, m > 1$) di interi positivi distinti tali che A^* coincida con B^* a meno dell'ordine; dimostrare che se $A \neq B$ (comunque li si riordinino) allora $n = m = 2^k$ per un opportuno intero positivo k, e che se $m = n = 2^k$ è effettivamente possibile che sia $A^* = B^*$, ma $A \neq B$.

C7. Ad uno stage partecipano $2n$ stagisti e $2n$ stagiste, tra cui gli onnipresenti Alberto e Barbara.

(a) Al ballo iniziale Alberto balla con tutte le ragazze e Barbara balla con tutti i ragazzi. Inoltre, per ogni coppia di stagiste, esistono esattamente n stagisti che hanno ballato con una ed una sola di esse.

Dimostrare che ogni ragazzo, ad eccezione di Alberto, ha ballato con esattamente n ragazze e ogni ragazza, ad eccezione di Barbara, ha ballato con esattamente n ragazzi.

(b) Al ballo finale è ancora vero che, per ogni coppia di stagiste, esistono esattamente n stagisti che hanno ballato con una ed una sola di esse (ma ora non sappiamo più nulla di Alberto e Barbara).

Dimostrare che, per ogni coppia di stagisti (ragazzi), esistono esattamente n stagiste che hanno ballato con esattamente uno di essi.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. Sia ABC un triangolo e siano A_1, B_1 e C_1 i piedi delle sue bisettrici.

Dimostrare che $AA_1B_1C_1$ e' un quadrilatero ciclico se e solo se vale la relazione

$$\frac{BC}{AB+AC} = \frac{AB}{AC+BC} + \frac{AC}{AB+BC}$$

G2. Sia ABC un triangolo isoscele con $AB = AC$ e siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze per B, C; indichiamo con D, E le intersezioni di Γ_1 con AB e AC e con F e G le intersezioni di Γ_2 con DC e AC.

Siano infine P e Q i simmetrici di F e G rispetto ai punti medi di DC e EC rispettivamente; dimostrare che D, E, P, Q sono conciclici.

G3. Sia ABC un triangolo con $AB < AC$ e incentro I; la circonferenza inscritta tocca i lati BC, CA e AB in D, E ed F rispettivamente. La bisettrice AI interseca le rette DE e DF in X e Y rispettivamente; l'altezza da A incontra BC in Z.

Dimostrare che D è l'incentro di XYZ.

Geometria – Sessioni dello stage

G4. Sia ABC un triangolo con circocentro O e ortocentro H. Siano ω_1 e ω_2 le circonferenze circoscritte ai triangoli BOC e BHC rispettivamente. Supponiamo che la circonferenza di diametro AO intersechi ω_1 nuovamente in un punto M, e che la retta AM intersechi ω_1 nuovamente in un punto X. Similmente, supponiamo che la circonferenza di diametro AH intersechi ω_2 nuovamente in un punto N, e che la retta AN intersechi ω_2 nuovamente in un punto Y.

Dimostrare che le rette MN e XY sono parallele.

G5. Sia ABC un triangolo scaleno con incentro I e siano D, E, F i punti di tangenza della circonferenza inscritta con i lati BC, CA, AB rispettivamente. Indichiamo con M il punto medio di BC. Sia Q un punto sulla circonferenza inscirtta tale che $\angle AQD = 90°$ e sia P il punto interno al triangolo sulla retta AI tale che $MD = MP$.

Dimostrare che uno degli angoli $\angle PQE$, $\angle PQF$ è retto.

G6. Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno con ortocentro H. Siano H_A, H_B e H_C i piedi delle altezze sui lati BC, AC e AB, rispettivamente. Sia S_A il simmetrico di H_A rispetto a H_BH_C. Definiamo S_B in modo analogo. Definiamo inoltre P come il punto di intersezione delle rette AS_A e BS_B.

- Dimostrare che P si trova sulla retta di Eulero di ABC.
- Dimostrare che H e P sono inversi rispetto alla circonferenza circoscritta di ABC.

G7. Sia ABC un triangolo, siano I il suo incentro, ω la sua circonferenza inscritta e Γ la sua circonferenza circoscritta; denotiamo con M, N, P i punti medi dei lati BC, CA, AB e con E, F i punti di tangenza di ω con CA e AB rispettivamente. Siano U, V le intersezioni della retta EF con le rette MN e MP e sia X il punto medio dell'arco BAC di Γ.

(a) Dimostrare che I giace sulla retta CV.

(b) Dimostrare che XI biseca il segmento UV.

G8. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia X un punto sull'arco minore BC della circonferenza circoscritta ad ABC. Siano P e Q le proiezioni di X sulle rette CA e CB, rispettivamente. Sia R l'intersezione tra la retta PQ e la perpendicolare da B ad AC. Sia ℓ la retta per P parallela a XR.

Dimostrare che, al variare di X sull'arco minore BC, la retta ℓ passa per un punto fisso.

G9. Sia ABC un triangolo, e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia ω_a la circonferenza tangente ai lati AB e AC e tangente internamente a Γ. Sia M_a il punto di tangenza tra Γ e ω_a, e sia r_a la tangente comune alle due circonferenze in M_a. Definiamo ora A_1

come il punto di intersezione tra la retta parallela a r_a passante per A e la retta BC. I punti B_1 e C_1 sono definiti in modo analogo.

Dimostrare che A_1, B_1 e C_1 sono allineati.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Determinare tutte le terne di interi positivi (m, n, k) tali che

$$5^m + n^2 = 3^k.$$

N2. Determinare tutti i numeri primi p tali che $p! + p$ è un quadrato perfetto.

N3. Sia $\mathbb{N}_+$ l'insieme dei numeri naturali positivi e sia k un intero positivo. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ tali che

$$f(x) + f(y) \mid x^k + y^k \qquad \forall x, y \in \mathbb{N}_+.$$

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Determinare le soluzioni (p, n) dell'equazione diofantea

$$2p^2 - 3p - 1 = n^3,$$

dove p è un numero primo ed n un intero positivo.

N5. Determinare il più grande intero positivo n con la seguente proprietà: "per ogni intero k con $1 < k < n$ e $(k, n) = 1$, k è un numero primo."

N6. Sia p un numero primo maggiore di 5, e supponiamo che esista un intero k tale che $p | k^2 + 5$. Dimostrare che esistono degli interi positivi m, n tali che $p^2 = m^2 + 5n^2$.

N7. Dimostrare che $(2^n - 1)(3^n - 1)$ non è mai un quadrato perfetto.

N8. Sia $\mathbb{N}_+$ l'insieme dei numeri interi positivi, e sia $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ la funzione definita ponendo $f(1) = 1$ e poi ricorsivamente

$$f(2n) = f(n) \qquad \text{e} \qquad f(2n+1) = f(n) + f(n+1)$$

per ogni intero positivo n.

Dimostrare che per ogni intero positivo n l'insieme

$$\{m \in \mathbb{N}_+ : f(2m - 1) = n\}$$

ha esattamente $\phi(n)$ elementi (cioè la funzione ϕ di Eulero calcolata in n).

Girls Selection Test

GST1. Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri reali per cui esiste almeno una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non identicamente nulla, tale che

$$af(yz + f(x)) + bf(zx + f(y)) + cf(xy + f(z)) = 0$$

per ogni terna di numeri reali x, y, e z.

GST2. Nel cerchio delimitato da una circonferenza di raggio unitario sono dati n segmenti, la somma delle cui lunghezze è maggiore o uguale di $2\sqrt{n}$.

Dimostrare che esiste una circonferenza, con lo stesso centro di quella iniziale, che interseca almeno due degli n segmenti.

GST3. Sia ABC un triangolo isoscele, con $AB = AC$. Sia M un punto sul lato BC, e sia N un punto sul lato AC tale che $\angle BAM = \angle MNC$. Sia P il punto di intersezione delle rette MN ed AB.

Dimostrare che le bisettrici degli angoli $\angle BAM$ e $\angle BPM$ e la retta BC sono concorrenti.

GST4. Per ogni intero positivo n, definiamo $f(n)$ come il numero dei divisori positivi di n che sono congrui ad 1 modulo 6, e definiamo $g(n)$ come il numero dei divisori positivi di n che sono congrui a -1 modulo 6.

Determinare tutti gli interi positivi n per cui $f(n)$ e $g(n)$ hanno parità diversa.

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

A1. Dimostrare che nel piano esistono infiniti triangoli scaleni acutangoli, a due a due non congruenti, con i lati e le altezze di lunghezza razionale e perimetro unitario.

A2. Per ogni n-upla di numeri reali $(x_1, \ldots, x_n)$ definiamo il suo *peso* come

$$\text{Peso}(x_1, \ldots, x_n) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_1 + \ldots + x_i|.$$

Data ora una n-upla $(y_1, \ldots, y_n)$ di numeri reali, Dvorny e Goblin vogliono permutarla in modo da ottenere una n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ con il peso minore possibile.

Dvorny, che è diligente, calcola con pazienza il peso di tutte le possibili permutazioni della n-upla data, riuscendo così a stabilire con certezza il peso minimo possibile, che indica con D.

Goblin ha invece un atteggiamento più sbrigativo e procede in modo *greedy*, scegliendo gli elementi x_i uno per volta. Prima sceglie un elemento x_1 tra gli n elementi dati in modo che $|x_1|$ sia il più piccolo possibile. Poi tra i rimanenti sceglie un elemento x_2 in modo che $|x_1 + x_2|$ sia il minimo possibile, e così via. In poche parole, all'i-esimo passaggio Goblin sceglie un elemento x_i tra quelli non ancora utilizzati in modo tale che $|x_1 + \ldots + x_i|$ sia il minimo possibile. Se in qualche momento Goblin ha più opzioni equivalenti a disposizione, sceglie a caso una di esse. Così facendo, alla fine si ritrova una n-upla di peso G.

Determinare la più piccola costante k con questa proprietà: qualunque sia l'intero positivo n, qualunque sia la n-upla $(y_1, \ldots, y_n)$ di partenza, e in qualunque modo proceda Goblin quando il suo algoritmo gli impone una scelta casuale, alla fine si avrà comunque che $G \leq kD$.

A3. Siano (A, B, D) e (a, b, d) due terne di numeri reali positivi tali che

$$(A - a)(B - b)(D - d) = ABD - abd.$$

Dimostrare che

$$(A + a)(B + b)(D + d) \geq 8ABD.$$

B1. Sia m un intero positivo. Sono dati 2^m cartoncini, su ciascuno dei quali è inizialmente scritto il numero 1. Ad ogni passaggio scegliamo due cartoncini: detti a e b i numeri scritti su di essi, li cancelliamo entrambi e scriviamo al loro posto (su entrambi i cartoncini) il numero $a + b$. Ripetiamo il procedimento $m2^{m-1}$ volte, scegliendo ogni volta a caso i cartoncini su cui operare.

Dimostrare che alla fine la somma dei numeri scritti su tutti i cartoncini è almeno 4^m.

B2. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Sia M un punto del segmento CD, e sia N il punto del segmento BA tale che

$$\frac{CM}{CD} = \frac{BN}{BA}.$$

Sia Q il secondo punto di intersezione tra le circonferenze circoscritte ai triangoli AMD e BMC.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo NQB è tangente alla retta BC.

B3. (a) Determinare tutte le coppie (x, y) di interi positivi tali che $x^2 + y$ e $x + y^2$ sono entrambi potenze di 3.

(b) Determinare tutte le terne (p, x, y) in cui p è un numero primo maggiore di 3 e (x, y) sono interi positivi tali che $x^{p-1} + y$ e $x + y^{p-1}$ sono entrambi potenze di p.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.