Algebra – Problemi di ammissione

A1. Consideriamo il polinomio $g(x) = x^2 - x + 1$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con la proprietà che $f(f(x)) = g(g(x))$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si determinino tutti i valori possibili per $f(0)$.

A2. Sia $n \geq 1$ e sia $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Per ogni sottoinsieme H di A composto da n elementi si ordinino gli elementi di H e del suo complementare,

$$h_1 < h_2 < \cdots < h_n, \qquad k_1 < k_2 < \cdots < k_n$$

con $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ e $A = H \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Si dimostri che vale

$$|h_1 - k_n| + |h_2 - k_{n-1}| + \cdots + |h_n - k_1| = n^2$$

A3. Dire se esiste una successione di interi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a due a due primi fra loro e tale che per ogni $n \geq 2$ il polinomio $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sia irriducibile su $\mathbb{Z}[x]$.

Algebra – Sessioni dello stage

A4. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che esista almeno un polinomio

$$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

a coefficienti reali che soddisfi entrambe le seguenti condizioni:

- Per $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$ si ha $2015 \leq a_i \leq 2016$.
- Esiste un reale ξ per cui $p(\xi) = 0$.

A5. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste una funzione $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ non costante tale che

$$a + f(x + y - xy) + f(x)f(y) \leq f(x) + f(y)$$

per ogni $x, y \in (0, 1]$.

A6. Determinare la massima costante K tale che la seguente disuguaglianza valga per tutte le terne di reali positivi a, b, c per i quali $a + b + c = abc$

$$abc\left(\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a^3 + b^3}}{ab + 1}\right) \geq K \sum_{cyc} \frac{a}{a^2 + 1}.$$

A7. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che

$$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2000$$

per ogni coppia di interi m ed n.

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Ci sono n bambini di età diverse che devono spartirsi $2n$ cioccolatini. Fanno così: il più grande propone una divisione, su cui si vota; se almeno il 50% (incluso il proponente) è favorevole, la divisione viene attuata; altrimenti, lui viene escluso (con 0 cioccolatini) e il successivo in ordine di età ripete la procedura con i bambini restanti. Se tutti vogliono più cioccolatini possibile e, se si trovano a dover scegliere tra due possibilità che gli porterebbero lo stesso numero di cioccolatini, votano in modo da eliminare più bambini possibile, come avverrà la divisione?

C2. Max ha 2015 contenitori di compiti, numerati da 1 a 2015, e infiniti compiti. A ogni passo sceglie un n tra 1 e 2015 e aggiunge n compiti a tutti i contenitori tranne che all'n-esimo. Il suo intento è far sì che dopo un certo numero finito (e positivo) di passi tutti i contenitori contengano lo stesso numero di compiti. Può riuscirci se all'inizio

(a) tutti i contenitori sono vuoti?

(b) Per ogni i da 1 a 2015 l'i-esimo contenitore contiene i compiti?

(c) Per ogni i da 1 a 2015 l'i-esimo contenitore contiene $2016 - i$ compiti?

C3. Dei 16 partecipanti a una festa alcuni si stringono la mano, e risulta che per ogni coppia di partecipanti ce ne sono (almeno) altri due che la stringono a entrambi. Dimostrare che certamente esiste un partecipante che ha stretto la mano ad altri 6; ce n'è anche sicuramente uno che l'ha stretta ad altri 7?

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. In un gruppo di $n \geq 4$ persone ognuno conosce almeno una (altra) persona, ma mai più di $n-2$. Dimostrare che si possono far sedere in cerchio 4 membri del gruppo in modo che ciascuno conosca esattamente uno dei suoi vicini.

C5. 110 squadre giocano un torneo di pallavolo all'italiana (sola andata). Alla fine si osserva che in ogni sottoinsieme di 55 squadre ce n'è almeno una che ha perso con al più 4 delle altre 54 squadre. Dimostrare che allora esiste una squadra che ha perso con al più 4 delle altre 109 squadre.

C6. Siano a, b due interi positivi tali che $a \leq b \leq 2a$. Il piano è diviso in quadratini di lato uno da una griglia con lati paralleli agli assi. Chiamiamo *equilibrata* una colorazione dei quadratini del piano che usa i colori bianco e nero se, comunque si scelga un rettangolo di dimensioni a e b (e con i lati lungo quelli della griglia), questo contenga almeno un quadratino nero. Determinare il massimo numero reale α tale che, per ogni intero positivo N e per ogni colorazione *equilibrata*, esiste un quadrato $N \times N$ che contiene almeno αN^2 quadratini neri.

C7. Sia n un intero positivo. Alberto ha pensato 2^n numeri reali $(k_1, \ldots, k_{2^n})$. Barbara vuole scoprire se i numeri pensati da Alberto sono tutti distinti oppure no. Per far questo, Barbara può solo porre domande in cui si chiede se $k_i < k_j$ per opportuni indici i e j, alle quali Alberto risponderà sempre in maniera veritiera. Ovviamente Barbara, nel decidere cosa chiedere, può tenere conto delle risposte già avute precedentemente.

(a) Dimostrare che esiste una costante C, indipendente da n, tale che Barbara può raggiungere il suo obiettivo con al più $Cn2^{n-1}$ domande.

(b) Dimostrare che Barbara non può essere sicura di raggiungere il suo obiettivo con $n2^{n-1}$ domande.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. Siano date Ω, una circonferenza di centro O, e r una retta ad essa esterna. Su Ω si prendano P, Q e S tre punti distinti e sia H la proiezione di O su r. Siano, in ordine,

- $T = PQ \cap r$
- T' il simmetrico di T rispetto ad H
- S' la seconda intersezione di $T'S$ con Ω
- $R = QS \cap r$
- R' il simmetrico di R rispetto ad H.

Mostrare che R', S' e P sono allineati

G2. Sia ABC un triangolo con incentro I e incerchio ω. Sia ω_A la circonferenza tangente esternamente a ω e tangente ai lati AB e AC nei punti A_1 e A_2 rispettivamente. Sia r_A la retta A_1A_2. Si definiscano r_B e r_C in maniera analoga. Le rette r_A, r_B e r_C individuano il triangolo XYZ. Dimostrare che l'incentro di XYZ, il circocentro di XYZ e I sono allineati.

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo, O il suo circocentro, Γ la circonferenza circoscritta. Sia D un punto su BC tale che $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Sia E il secondo punto di intersezione di AD e Γ. Se M, N e P sono rispettivamente i punti medi dei segmenti BE, OD e AC dimostrare che sono allineati M, N e P

Geometria – Sessioni dello stage

G4. Sia ΔABC un triangolo. Siano P_1 e P_2 punti su AC tali che P_1 stia tra P_2 e A e che $AP_1 = CP_2$. Similmente, siano Q_1 e Q_2 punti su AB tali che Q_1 stia tra Q_2 e A e che $AQ_1 = BQ_2$. Sia $R = P_1Q_2 \cap Q_1P_2$, e sia S l'intersezione distinta da R dei cerchi circoscritti a ΔRP_1P_2 e ΔRQ_2Q_1. Sia infine M il punto medio di BC.

Dimostrare che $\angle P_2RM = \angle SRQ_2$

G5. Sia l una retta contenente, nell'ordine, i punti A, B, C, D. Siano C_1, C_2, C_3, C_4, quattro archi circolari sullo stesso lato di l tali che C_1 e C_2 passino per A e B, e C_3 e C_4 passino per C e D. Supponiamo che C_1 sia tangente a C_3 e che C_2 sia tangente a C_4.

Dimostrare che la tangente comune esterna di C_1 e C_4 e la tangente comune esterna di C_2 e C_3 si intersecano su l.

G6. Sia ABC un triangolo inscritto in un cerchio Γ. Chiamiamo ω_B, ω_C i suoi excerchi relativi ai vertici B e C, rispettivamente. Sia M il punto medio dell'arco $\widehat{BAC}$ di Γ e sia H il piede dell'altezza relativa al vertice A. Consideriamo il cerchio tangente a ω_B, ω_C e internamente a Γ in un punto P dell'arco BC non contenente A.

Dimostrare che P. H ed M sono allineati.

G7. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Sia E il punto di intersezione delle rette AB e CD; sia F il punto di intersezione delle rette BC e AD. Siano H_1, H_2, H_3 e H_4 gli ortocentri dei triangoli EBC, EAD, FCD e FAB (nell'ordine).

Dimostrare che $H_1H_3 = H_2H4$.

G8. Sia $A_1A_2A_3$ un triangolo. Sia C_1 un cerchio interno ad esso e tangente ai segmenti A_1A_2 e A_1A_3. Definiamo inoltre $M_1 \in A_1A_2$ come il piede della ceviana uscente da A_3 e tangente a C_1. Ora definiamo ricorsivamente i cerchi C_i e i punti M_i in modo tale che C_i sia l'incerchio del triangolo $M_{i-1}A_iA_{i+1}$ e che $M_i \in A_iA_{i+1}$ sia il piede della ceviana uscente da A_{i-1} e tangente a C_i (Nota: gli indici degli A_i sono da intendersi modulo 3).

Dimostrare che i cerchi C_1 e C_7 coincidono.

G9. Sia ABC un triangolo e siano D, E, F i piedi delle sue bisettrici interne. Siano I, O rispettivamente il suo incentro e il suo circocentro.

Dimostrare che il centro del cerchio dei nove punti di DEF giace su OI.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Sia p un primo dispari. Consideriamo l'insieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y} > 0\}$$

Determinare $\min_{(x,y)\in S}(\sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y})$.

N2. Dimostrare che esistono infiniti interi positivi *composti* n tali che n divida $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

N3. Siano $a_1, a_2, a_3, \ldots$ interi positivi *distinti* e sia c un numero reale nell'intervallo $(0, 3/2)$. Dimostrare che esistono infiniti indici k tali che $\mathrm{mcm}(a_k, a_{k+1}) > ck$.

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Sia p un numero primo e sia $f(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale:

(a) $f(0) = 0$;

(b) $f(1) = 1$;

(c) $p \mid (f(n))^2 - f(n)$ per ogni intero positivo n.

Determinare il minimo grado possibile di f.

N5. Sia ϕ la funzione di Eulero. Dimostrare che esiste un intero positivo M per il quale l'equazione $\phi(x) = M$ ammette almeno 2016 soluzioni intere positive x.

N6. Sia p un numero primo e sia x un intero positivo non multiplo di p. Diciamo che x è *libero da* p se, per ogni scelta di interi non negativi i, j, k, si ha $p \nmid (x^i + x^j - x^k)$. Dimostrare che, per ogni intero positivo N, esistono un primo p e un intero positivo x coprimo con p tali che:

(a) x è libero da p;

(b) $ord_p(x) > N$.

N7. Per ogni intero $n \geq 2$, indichiamo con $P(n)$ il più grande fattore primo di n.

(a) Dimostrare che esistono infinite terne (a, b, c) di interi positivi distinti tali che

$$P(a^2 + 1) = P(b^2 + 1) = P(c^2 + 1).$$

(b) Dimostrare che esistono infiniti interi positivi n tali che

$$P(n^4 + n^2 + 1) = P\left((n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1\right).$$

Team(s) Selection Test

A1. Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H. Sia G il punto per cui il quadrilatero $ABGH$ risulta un parallelogrammo. Sia I il punto della retta GH per cui la retta AC biseca il segmento HI. Sia J l'ulteriore intersezione tra la retta AC e la circonferenza circoscritta al triangolo GCI.

Dimostrare che $IJ = AH$.

A2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che

$$f(f(x) + xf(y)) = x + f(x)y$$

per ogni coppia di numeri razionali x e y.

A3. Siano m ed n interi positivi con $m > n$. Supponiamo che il numero

$$x_k = \frac{m+k}{n+k}$$

sia intero per ogni $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

Dimostrare che $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$ ha almeno un fattore primo dispari.

B1. Dato un intero positivo M, definiamo per ricorrenza una successione a_n ponendo

$$a_0 = \frac{2M+1}{2}, \qquad a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

dove $\lfloor a_k \rfloor$ indica la parte intera di a_k.

Determinare per quali M la successione contiene almeno un numero intero.

B2. Dato un qualunque sottoinsieme finito A dei numeri interi positivi, definiamo *partizione aritmetica* di A ogni scrittura di A come unione disgiunta di due sottoinsiemi non vuoti A_1 e A_2 tali che il minimo comun multiplo degli elementi di A_1 coincide con il massimo comun divisore degli elementi di A_2.

(a) Determinare il minimo valore di n per cui esiste un insieme di n elementi che ammette esattamente 2015 partizioni aritmetiche.

(b) Determinare il minimo valore di n per cui esiste un insieme di n elementi che ammette esattamente 2016 partizioni aritmetiche.

B3. Sia ABC un triangolo rettangolo in C, e sia H il piede dell'altezza uscente da C. Sia D un punto interno al triangolo CBH tale che il punto medio di AD appartenga al segmento CH. Sia P il punto di intersezione delle rette BD e CH, sia ω la circonferenza di diametro BD, sia T l'ulteriore interesezione tra ω e la retta AD, e sia Q l'ulteriore interesezione tra ω e la retta CT.

Dimostrare che la retta PQ è tangente ad ω.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.