Algebra – Problemi di ammissione

A1. Dimostrare che per qualunque terna di reali positivi x, y, z tali che $xy + yz + zx = 3$, si ha

$$x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2\sqrt{xyz}(\sqrt{x^3+3x} + \sqrt{y^3+3y} + \sqrt{z^3+3z})$$
$$\geq 2xyz(x^2+y^2+z^2+6).$$

A2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tali che valgano tutte le condizioni seguenti, per ogni scelta di x e y:

$$\begin{aligned} i.&\quad f(x^2) + 2xf(x) = f(x)^2 \\ ii.&\quad f(x-1) = f(-x) \\ iii.&\quad 1 < x < y \Longrightarrow f(x) < f(y). \end{aligned}$$

A3. Dati due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, A e B, sia $A + B$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ i cui elementi sono somma di un elemento di A e un elemento di B:

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

- Dire se esiste una partizione di $\mathbb{Z}$ in tre insiemi non vuoti X, Y, Z, tali che $X+Y$, $Y+Z$ e $Z+X$ siano a due a due disgiunti.
- Ripetere con $\mathbb{Q}$ al posto di $\mathbb{Z}$.

Algebra – Sessioni dello stage

A4. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per ogni x e y reali si ha che

$$f(x+y^2) \geq (y+1)f(x)$$

A5. Siano a, b, c, d numeri reali positivi. Dimostrare che

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \leq 4 + \frac{(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2}{3abcd}$$

A6. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni x e y reali e per ogni $n \geq 2$ naturale si ha che

$$f(x^n + 2f(y)) = (f(x))^n + y + f(y)$$

A7. (Problema bonus!) Trovare tutti i polinomi monici e a coefficienti interi $p(x)$ con la proprietà che per ogni $n \geq 1$ naturale esiste un numero intero x tale che $p(x) = 2^n$.

A8. Per ogni quadrilatero convesso, detta A la sua area e dette $x \leq y \leq z \leq w$ le misure dei suoi lati, dimostrare che

$$A \leq \frac{3\sqrt{3}z^2}{4}$$

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Alberto e Barbara giocano al seguente gioco. Inizialmente sul tavolo ci sono $n \geq 1$ pile contenenti $p_1, \ldots, p_n$ gettoni dove i p_i sono interi positivi tutti distinti. Una mossa consiste nello scegliere una pila i e interi non negativi $a_1, \ldots, a_n$ in modo che

- $\sum_{j=1}^{n} a_j \leq p_i$,
- $a_i > 0$,
- se $p_j = 0$, anche $a_j = 0$,

quindi togliere $\sum_{j=1}^{n} a_j$ gettoni dalla pila i e aggiungere a_j gettoni alla pila j, per tutti i $j \neq i$. Inizia Alberto e vince chi toglie l'ultimo gettone. Chi ha una strategia vincente?

C2. Siano $A = \{1, \ldots, 2016\}$, $B = \{1, \ldots, 5\}$ e $P(A)$ l'insieme delle parti di A. Definiamo

$$C = \{f : P(A) \to B \text{ tali che } f(A_1 \cap A_2) = \min\{f(A_1), f(A_2)\}\}.$$

Calcolare la cardinalità di C.

C3. In una nazione ci sono 2016 città. Possiamo stilare 4 graduatorie A_1, A_2, A_3, A_4, ciascuna delle quali ordina totalmente tutte le città di questa nazione. Ciascun turista che arriverà sceglierà una graduatoria A_i e una città c e visiterà tutte le città che, secondo A_i, sono migliori di c, decidendo eventualmente se andare anche in c. Alla fine desidereremmo che, comunque vengano prese due città c e c', l'insieme dei turisti che avranno visitato c sia diverso dall'insieme di quelli che avranno visitato c'. Qual è il minimo numero k di turisti per cui esistono graduatorie e scelte dei turisti che realizzano tale situazione?

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. Alberto e Barbara si fronteggiano su una scacchiera 2017×2017. Prima Alberto sceglie k quadratini e posiziona su ciascuno un sensore al colore rosso. Poi Barbara colora alcuni dei quadratini con il rosso, in modo da formare un quadrato 1500×1500. Alberto viene quindi notificato da ciascuno dei sensori che rileva il colore. Qual è il minimo k tale che, per qualsiasi scelta di Barbara, è in grado di capire esattamente quali sono i quadratini scelti da lei?

C5. Alberto gioca un solitario su una scacchiera 2017×2017. All'inizio distribuisce n gettoni tra le varie caselle, lasciando, eventualemente, alcune caselle vuote o riponendo anche più gettoni su un solo posto. Ad ogni mossa sceglie una casella che contenga almeno tanti gettoni quante sono quelle adiacenti (con un lato in comune) e sposta un gettone su ognuna di queste. Determinare il massimo n tale che, per qualunque disposizione iniziale, Alberto può effettuare un qualsiasi numero di mosse.

C6. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e M un intero positivo. Si sa che ogni intero $n \geq M$ si scrive in modo unico come somma di un numero dispari di elementi di A. Si dimostri che

(a) esiste un intero positivo P tale che ogni $n \geq P$ si scrive in modo unico come somma di un numero pari di elementi di A;

(b) $0 \in A$.

C7. Sia n un intero positivo. Ci sono n ragazzi e n ragazze disposti su una circonferenza, in un qualche ordine. Diremo che una coppia (ragazzo, ragazza) è *buona* se uno dei due archi che li dividono contiene tante ragazze quanti ragazzi (eventualmente nessun ragazzo e nessuna ragazza). Si osserva che Alberto fa parte di esattamente 2017 coppie buone. Dimostrare che esiste una ragazza che fa parte di esattamente 2017 coppie buone.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB > AC$. Siano O il suo circocentro e sia D il punto medio di BC. La circonferenza di diametro AD interseca nuovamente AB e AC in E e in F, rispettivamente. Sia infine M il punto medio di EF.

Dimostrare che MD è parallela ad AO.

G2. Sia $ABCD$ un quadrilatero con $AB \parallel CD$ e tale che gli angoli $\angle CDB$ e $\angle CAD$ siano uguali. Sia E l'intersezione delle diagonali AC e BD e sia O il circocentro del triangolo ABE. Sia inoltre M il punto medio di AD.

Dimostrare che CM e DO sono perpendicolari.

G3. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia X un punto interno ad esso tale che:

- il punto X appartenga all'asse di BC;
- detta B_1 l'ulteriore intersezione di BX con AC e C_1 l'ulteriore intersezione CX con AB, si abbia $CB_1 = BC_1$;
- il quadrilatero BCB_1C_1 non sia un trapezio.

(a) Dimostrare che AC_1XB_1 è ciclico.

(b) Dimostrare che gli assi di BB_1 e CC_1 si intersecano su BC.

Geometria – Sessioni dello stage

G4. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e siano I, J gli incentri dei triangoli ABC e ADC rispettivamente. Supponiamo che B, I, J, D siano conciclici.
La circonferenza di diametro AC incontra il segmento IB in X e il prolungamento di JD oltre D in Y.

a) Mostrare il seguente ***Lemma***:
Sia $ABCD$ un quadrilatero e siano I, J gli incentri dei triangoli ABC e ADC rispettivamente. Mostrare che $ABCD$ ammette una circonferenza inscritta se e solo se IJ è perpendicolare ad AC.

b) Dato un punto P sulla circonferenza di diametro AC, sia P' il suo coniugato isogonale rispetto al triangolo ABC. Qual è il luogo di P' al variare di P?

c) Mostrare che X, Y sono simmetrici rispetto alla retta AC.

G5. Sia I l'incentro di un triangolo non equilatero ABC e I_A l'excentro relativo al vertice A. Sia ${I_A}'$ il simmetrico di I_A rispetto a BC e sia l_A la retta simmetrica di $A{I_A}'$ rispetto ad AI. Definiamo analogamente i punti $I_B, {I_B}'$ e la retta l_B, e sia P l'intersezione di l_A e l_B.

a) Mostrare il seguente ***Lemma***:
Siano P_1, P_2 punti inversi rispetto ad una circonferenza ω e consideriamo un'arbitraria inversione ϕ rispetto ad una circonferenza Γ centrata in O.
Mostrare che $\phi(P_1), \phi(P_2)$ sono inversi rispetto a $\phi(\omega)$. Cosa succede se P_1 è il centro di ω? E se ω passa per il punto O?

b) Mostrare che P e I sono inversi rispetto alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

c) Una delle due tangenti condotte da P alla circonferenza inscritta di ABC incontra la circonferenza circoscritta di ABC in due punti X, Y. Dimostrare che $\angle XIY = 120°$.

G6. Sia ABC un triangolo e H il suo ortocentro. Sia M un punto sul lato AB tale che $\angle MHB = \angle ABC$. Analogamente prendiamo N su AC tale che $\angle NHC = \angle ACB$. Sia D il punto per cui $ABDC$ è un parallelogrammo.
Mostrare che la circonferenza passante per le riflessioni di H rispetto a MN, ND, MD è tangente alla circonferenza circoscritta di ABC.

G7. Sia ABC un triangolo di circocentro O e sia r la bisettrice esterna da A. La retta passante per B perpendicolare a BC interseca r in B_1. Analogamente la retta passante per C perpendicolare a BC interseca r in C_1.

(a) Dimostrare che AO, BC_1 e CB_1 concorrono.

(b) Detto P il punto di concorrenza di tali rette, dimostrare che la circonferenza Γ di centro P passante per A è tangente a BC.

G8. Un pentagono $AMNPQ$ è inscritto in un triangolo ABC in modo che $M \in AB$, $Q \in AC$ e $N, P \in BC$. Inoltre i lati del pentagono soddisfano le uguaglianze $AM = AQ = NP$ e $MN = QP$.

Sia S l'intersezione di MN e PQ e l la bisettrice dell'angolo $\angle MSQ$.

Detti O e I rispettivamente il circocentro e l'incentro del triangolo ABC, dimostrare che OI è parallelo a l.

G9. Sia ABC un triangolo con incentro I la cui circonferenza inscritta ω è tangente a BC, CA e AB rispettivamente in D, E e F. Sia K il piede dell'altezza uscente da D nel triangolo DEF. Supponiamo che la circonferenza circoscritta a AIB incontri ω in due punti distinti C_1 e C_2, e che la circonferenza circoscritta a AIC incontri ω in due punti distinti B_1 e B_2. Dimostrare che l'asse radicale delle circonferenze circoscritte a BB_1B_2 e CC_1C_2 passa per il punto medio di DK.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Sia k un intero positivo, e, per ogni intero positivo n, denotiamo con $s(n)$ la somma delle cifre decimali di n. Sia A_k l'insieme dei numeri n che hanno esattamente k cifre decimali e tali che $s(n) < s(2n)$. Sia B_k l'insieme dei numeri n che hanno esattamente k cifre decimali e tali che $s(n) > s(2n)$. Dimostrare che A_k e B_k hanno lo stesso numero di elementi.

N2. Determinare tutte le coppie di numeri primi (p, q) che soddisfano l'equazione

$$p^3 - q^3 = pq^3 - 1.$$

N3. Sia n un intero positivo maggiore di 1. Dimostrare che esiste un intero m maggiore di n^n tale che

$$\frac{n^m - m^n}{n + m}$$

è un intero positivo.

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Siano $m \geq n$ interi positivi tali che

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2 + 4}$$

sia un intero. Dimostrare che k è un quadrato perfetto.

N5. Sia P l'insieme di tutti i numeri primi, e sia M un sottoinsieme non vuoto di P con la seguente proprietà:

per ogni sottoinsieme non vuoto $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ di M, tutti i fattori primi di $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ appartengono ad M.

Dimostrare che $M = P$.

N6. Sia p un numero primo maggiore di 2, e siano $a_1, a_2, \cdots, a_p$ dei numeri interi. Dimostrare che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

(a) esiste un polinomio $f(x)$, a coefficienti interi e di grado minore o uguale a $\frac{p-1}{2}$, tale che $f(i) \equiv a_i \pmod{p}$ per ogni intero positivo $i \leq p$;

(b) per ogni intero positivo $d \leq \frac{p-1}{2}$ vale la congruenza

$$\sum_{i=1}^{p} (a_{i+d} - a_i)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

(Nell'espressione precedente gli indici sono considerati modulo p, ossia $a_{p+n} = a_n$.)

N7. Sia M_0 un insieme finito e non vuoto di interi positivi. Alberto costruisce induttivamente una sequenza di insiemi M_n come segue. Per ogni $n = 1, 2, \ldots$ sceglie (a suo piacere) un elemento $b_n \in M_{n-1}$, e definisce

$$M_n := \{b_n m + 1 \mid m \in M_{n-1}\}.$$

Dimostrare che c'è un indice n per cui l'insieme M_n ha la proprietà che se $a, b \in M_n$ con $a \neq b$ allora $a \nmid b$ (ovvero nessun elemento di M_n divide un altro elemento di M_n) .

Girls Selection Test

GST1. Siano C_1 e C_2 due circonferenze tangenti esternamente in S tali che il raggio di C_2 è il triplo del raggio di C_1. Consideriamo una retta tangente a C_1 in $P \neq S$ e a C_2 in $Q \neq S$. Sia T un punto in C_2 tale che QT è diametro di C_2. Infine la bisettrice dell'angolo $\angle SQT$ incontra ST in R.

Dimostrare che $QR = RT$.

GST2. Determinare tutti gli interi positivi n per cui il numero

$$1^{\phi(n)} + 2^{\phi(n)} + \ldots + n^{\phi(n)}$$

è coprimo con n.

(Si intende che ϕ è la funzione ϕ di Eulero.)

GST3. Sia f una funzione dai numeri interi positivi a valori nei numeri interi positivi, tale che $(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$ per ogni intero positivo n.

(a) Dimostrare che se $f(f(n)) = f(n)$, allora $f(n) = n$.

(b) Dimostrare che $f(n) = n$ per ogni intero positivo n.

GST4. Sia S un insieme di n punti sul piano a tre a tre non allineati e sia P un altro punto sul piano, distinto dai precedenti e non allineato con nessuna coppia di punti in S. Chiamiamo k il numero di triangoli con vertici in S che contengono P al loro interno.

(a) Dimostrare che se $n = 5$, allora k può essere sia pari che dispari.

(b) Dimostrare che se n è pari, allora anche k è sempre pari.

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

A1. Alberto e Barbara hanno scelto due interi positivi n e k, con $n > k$. Successivamente, Alberto pensa una stringa binaria di n cifre, e scrive tutte le stringhe che differiscono da quella pensata in esattamente k posizioni (ad esempio, se $n = 3$, $k = 1$ e la stringa pensata è 101, Alberto scrive 001, 111 e 100).

Barbara, viste le stringhe scritte da Alberto, prova ad indovinare la stringa pensata inizialmente.

Determinare il minimo numero di tentativi che deve fare Barbara per essere sicura di indovinare la stringa pensata da Alberto.

A2. Per ogni intero positivo k, indichiamo con $S(k)$ la somma delle cifre della rappresentazione decimale di k.

Determinare tutti i polinomi $P(x)$ a coefficienti interi tali che, per ogni intero $n \geq 2017$, il numero $P(n)$ è positivo e soddisfa

$$S(P(n)) = P(S(n)).$$

A3. Sia $ABCD$ un quadrilatero circoscritto, e sia M un punto sul lato AB. Siano ω_1, ω_2, ω_3 le circonferenze inscritte in ADM, DMC, MCB, e siano I_1, I_2, I_3 i loro rispettivi centri.

(a) Dimostrare che ω_1, ω_2, ω_3 hanno una tangente comune.

(b) Dimostrare che il quadrilatero $MI_1I_2I_3$ è ciclico.

B1. Sia ABC un triangolo con $AB < AC < BC$, sia K il piede dell'altezza uscente da A, e siano D, E, F i punti medi dei lati BC, CA, AB, rispettivamente. Siano ω_1 ed ω_2 le semicirconferenze di diametro AB ed AC, rispettivamente, esterne rispetto al triangolo ABC.

La retta KE interseca ω_2 in P, la retta DE interseca ω_2 in Q, la retta KF interseca ω_1 in R, la retta DF interseca ω_1 in S. La retta PQ interseca la retta RS in T.

(a) Dimostrare che le rette PR e QS si intersecano in A.

(b) Dimostrare che le rette QS e DT si intersecano sulla circonferenza circoscritta ad ABC.

B2. Per ogni intero positivo n, indichiamo con $d(n)$ il numero dei divisori positivi di n, e con $d_1(n)$ il numero dei divisori positivi di n che sono congrui ad 1 modulo 3.

Determinare, al variare di n, l'insieme dei valori *interi* assunti dalla frazione

$$\frac{d(10n)}{d_1(10n)}.$$

B3. Determinare la più piccola costante reale M con questa proprietà: per ogni quintupla $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di numeri reali positivi, non necessariamente distinti, esistono sempre quattro indici (distinti) a, b, c, d tali che

$$\left|\frac{x_a}{x_b} - \frac{x_c}{x_d}\right| \leq M.$$

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.