Algebra – Problemi di ammissione

A1. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x)f(y) \leq f(xy) \qquad \text{e} \qquad f(x) + f(y) \leq f(x+y),$$

per ogni coppia di reali x, y.

A2. Determinare tutte le coppie di interi a, b per cui esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che

$$(x^2 + ax + b)p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

con $|c_i| = 1$ per $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

A3. Trovare il più grande reale positivo a tale che per ogni terna di reali positivi x, y, x con $xyz = 1$, vale la disuguaglianza,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x}{(x+1)(y+a)} \geq \frac{3}{2(1+a)}.$$

Algebra – Sessioni dello stage

A4. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tali che per ogni x e y reali positivi si ha che

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y)$$

A5. Trovare la migliore costante K tale che per ogni quaterna di numeri non negativi (a, b, c, d) che soddisfano $a + b + c + d = 4$ si ha che

$$\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4} \geq K$$

A6. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}^2 \to [0, 1]$ tale che per ogni x e y interi si ha che

$$f(x, y) = \frac{f(x-1, y) + f(x, y-1)}{2}$$

A7. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che per ogni x e y reali positivi si ha che

$$f(x+y) \geq f(x) + y \text{e} f(f(x)) \leq x$$

A8. Sia $a_1, a_2, \cdots$ una sequenza di interi non negativi tali che per ogni m e n vale

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{in} \leq m$$

Dimostra che esistono dei numeri k e d tali che

$$\sum_{i=1}^{2k} a_{id} = k - 2014$$

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Il dipartimento di matematica consta di diecimila stanze quadrate, grandi uguali, disposte a formare un quadrato, i cui lati, lunghi quanto cento stanze, sono allineati coi punti cardinali. Alcuni dei muri fra le stanze hanno una porta che si può attraversare, ma dal dipartimento non c'è uscita. Per ogni coppia di stanze esiste un percorso che le congiunge. Alcuni stagisti si sono persi nel dipartimento; mediante un walkie-talkie, L può dire loro di spostarsi nella stanza accanto in una delle quattro direzioni cardinali. Ad ogni istruzione di L, ciascuno stagista si muove nella direzione indicata se vi è una porta che lo permetta, altrimenti rimane fermo. L conosce la mappa del dipartimento, ma non può in nessun momento conoscere la posizione degli stagisti, a meno che essi non siano tutti insieme. Dimostrare che egli può portare tutti gli stagisti in una stessa stanza (e così poi andare a recuperarli).

C2. Sia $n \geq 2$ un intero. Trovare il minimo m intero tale che, comunque dati n punti nel piano a tre a tre non allineati, esistono m rette non passanti per alcuno dei punti tali che, presi comunque due punti $X \neq Y$, almeno una retta interseca il segmento XY.

C3. Alberto e Barbara giocano al seguente gioco. A turno, cominciando da Alberto, colorano una casella di una scacchiera 2017×2017. Una casella non può essere colorata se ce ne sono già due colorate sulla sua riga o colonna (e non si può in ogni caso colorare una casella due volte). Perde chi non può più muovere. Determinare quale dei due giocatori ha una strategia vincente.

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. Siano $k \leq n$ due interi positivi. $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di $\{1, \ldots, n\}$ ciascuno di cardinalità k con la seguente proprietà: comunque scelti $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$, il sottoinsieme ottenuto prendendo i k interi più piccoli di $S_1 \cup S_2$ coincide con uno dei due insiemi di partenza. Determinare la massima cardinalità di $\mathcal{F}$.

C5. Sia n un intero positivo. Sul piano sono disegnate n rette a due a due non parallele. Dimostrare che è possibile scrivere un numero intero positivo su ciascuna delle regioni in cui il piano viene diviso in modo che, per ogni retta, la somma dei numeri scritti su uno dei due semipiani che individua sia uguale a quella relativa all'altro semipiano.

C6. Un mago e un assistente preparano il seguente trucco con un mazzo di carte le quali da un lato sono tutte identicamente nere, mentre dall'altro sono colorate con uno di 2017 colori possibili (diversi dal nero), per ciascuno dei quali ce ne sono un milione. Il mago esce. L'assistente fa scegliere n carte ad uno spettatore e gliele lascia mettere in fila nell'ordine che lui preferisce, rivolte in modo da mostrare il lato colorato. L'assistente quindi volta esattamente $n - 1$ carte in modo che solo una rimanga dal lato colorato. Il mago entra, indica una carta coperta e ne indovina il colore. Determinare il più piccolo valore di n per cui questo trucco può funzionare.

C7. Sia $S = \{1, \ldots, 2017\}$, e siano $A_i \subseteq S$ di cardinalità 3 tali che A_i e A_j condividono al più un elemento se $i \neq j$. Mostrare che è possibile colorare gli elementi di S di rosso e blu in modo tale che almeno 64 elementi siano blu e ogni A_i contenga almeno un elemento rosso.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno, sia Γ la sua circonferenza circoscritta e sia N il centro della sua circonferenza di Feuerbach.

Dimostrare che le rette tangenti a Γ in B e in C concorrono con AN se e solo se $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$.

G2. Due circonferenze ω_1 e ω_2 di centri O_1 e O_2 sono tangenti esternamente in un punto D ed entrambe sono tangenti internamente in due punti E e F ad una terza circonferenza ω. Sia t la tangente comune a ω_1 e ω_2 in D e AB il diametro di ω perpendicolare a t, in modo che A, E e O_1 giacciano dalla stessa parte rispetto a t.

Mostrare che le rette AO_1, BO_2, EF e t sono concorrenti.

G3. Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che $\angle BAD + 2\angle BCD = 180°$. Sia E l'intersezione di BD con la bisettrice interna dell'angolo $\angle BAD$. L'asse di AE interseca CB e CD in X e Y rispettivamente.

Mostrare che $ACXY$ è ciclico.

Geometria – Sessioni dello stage

G4. Sia ABC un triangolo e siano Γ la sua circonferenza circoscritta, O il suo circocentro e H il suo ortocentro. Si assuma che $AB \neq AC$ e $\angle A \neq 90°$. Siano M e N rispettivamente i punti medi dei lati AB e AC, e siano E e F rispettivamente i piedi delle altezze condotte da B e C. Sia P l'intersezione della retta MN con la tangente condotta a Γ da A. Sia Q l'intersezione, diversa da A di Γ e della circonferenza circoscritta ad AEF. Sia R l'intersezione delle rette AQ e EF.

Mostrare che $PR \perp OH$.

G5. Siano Γ e γ due circonferenze tangenti internamente in un punto P e si assuma che γ sia quella interna. Sia AB una corda di Γ tangente a γ in C. Sia Q l'ulteriore intersezione di PC con Γ, e siano QR e QS due corde di Γ tangenti a γ. Siano I, X e Y rispettivamente gli incentri dei triangoli APB, ARB e ASB.

Dimostrare che $\angle PXI + \angle PYI = \frac{\pi}{2}$.

G6. Sia $ABCD$ un quadrilatero circoscrivibile e sia I il centro della sua circonferenza inscritta. Siano I_A, I_B, I_C e I_D gli incentri dei triangoli BCD, CDA, DAB e ABC rispettivamente. Siano ω_A, ω_B, ω_C e ω_D le circonferenze circoscritte ai triangoli AI_BI_D, BI_AI_C, CI_BI_D e DI_AI_C rispettivamente. Le tangenti comuni esterne a ω_A ed ω_C si incontrano in X e quelle esterne comuni a ω_B e ω_D in Y.

Mostrare che $\angle XIY = \frac{\pi}{2}$

G7. Sia ABC un triangolo scaleno e acutangolo di ortocentro H e circocentro O. Siano P e Q rispettivamente le intersezioni della retta AO con le rette BH e CH.

Mostrare che il circocentro del triangolo PQH giace sulla mediana del triangolo ABC condotta da A.

G8. Sia ABC un triangolo con incentro I. Siano P, Q due punti tali che $\angle ABP = \angle QBC$ e $\angle ACP = \angle QCB$.

Mostrare che esiste un punto X sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC tale che i triangoli XPI e XIQ siano direttamente simili.

G9. La circonferenza ω è tangente ai lati AB e AC di un triangolo ABC rispettivamente in D ed E in modo che $D \neq B$, $E \neq C$ e $BD + CE < BC$. I punti F e G giacciono su BC in modo che $BF = BD$ e $CG = CE$. Sia K il punto d'intersezione di DG e EF. Il punto L giace sull'arco minore DE di ω in modo che la tangente condotta da L a ω sia parallela a BC.

Mostrare che l'incentro del triangolo ABC giace sulla retta KL.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Determinare tutte le terne (p, a, m), dove p è un numero primo ed a e m sono interi positivi, che soddisfano le seguenti condizioni:

(a) $a \leq 5p^2$;

(b) $(p-1)! + a = p^m$.

N2. Sia n un intero positivo. Sia A_n l'insieme dei numeri primi p per i quali esistono interi positivi a, b tali che entrambe le seguenti condizioni siano verificate:

(a) $\frac{a+b}{p}$ e $\frac{a^n+b^n}{p^2}$ sono interi;

(b) $\frac{a+b}{p}$ e $\frac{a^n+b^n}{p^2}$ sono coprimi con p.

Se A_n è un insieme finito, denotiamo con $f(n)$ il numero di elementi di A_n.

Dimostrare che:

(a) A_n è un insieme finito se e solo se $n \neq 2$.

(b) Se m, k sono interi positivi dispari, con massimo comune divisore uguale a d, allora

$$f(d) \leq f(k) + f(m) - f(km) \leq 2f(d).$$

N3. Sia a un intero positivo tale che, per ogni intero positivo n, il numero $n^2a - 1$ ha un divisore maggiore di 1 e congruo a 1 modulo n.

Dimostrare che a è un quadrato perfetto.

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Per ogni intero $C > 1$, determinare se esiste una successione di numeri interi a due a due distinti $a_1, a_2, \ldots$ tale che

$$a_{k+1}^k \mid C^k a_1 \cdots a_k \qquad \forall k \geq 1.$$

N5. Per ogni intero positivo n sia $A_n = \{n, n+1, \ldots, n+15\}$. Per quali valori di n possiamo partizionare A_n in due sottoinsiemi B_n e C_n in modo che il prodotto degli elementi di B_n sia uguale al prodotto degli elementi di C_n?

N6. (a) Dimostrare che esistono infinite terne (a, b, p), dove p è un numero primo, a, b sono interi e $0 < a \leq b < p$, tali che $p^3 \mid (a+b)^p - a^p - b^p$.

(b) Dimostrare inoltre che esistono infinite terne (a, b, p), dove p è un numero primo, a, b sono interi e $0 < a \leq b < p$, tali che $p^5 \mid (a+b)^p - a^p - b^p$.

Team(s) Selection Test

Primo giorno

A1. Sia $ABCDE$ un pentagono convesso in cui valgono le seguenti relazioni

$$AB = BC = CD, \qquad \angle EAB = \angle BCD, \qquad \angle EDC = \angle CBA.$$

Dimostrare che la retta AC, la retta BD, e la retta per E perpendicolare a BC sono concorrenti.

A2. Sia r un numero reale. Ludo ha un foglietto su cui sono scritti 10 numeri reali distinti, a partire dai quali scrive le seguenti tre linee di numeri sulla lavagna.

- Nella prima linea, Ludo scrive tutti i numeri della forma $a - b$, dove a e b sono numeri (non necessariamente distinti) del foglietto.
- Nella seconda linea, Ludo scrive tutti i numeri della forma rpq, dove p e q sono numeri (non necessariamente distinti) della prima linea.
- Nella terza linea, Ludo scrive tutti i numeri della forma $x^2 + y^2 - z^2 - w^2$, dove x, y, z, w sono numeri (non necessariamente distinti) ancora della prima linea.

Determinare i valori di r per cui accade che, qualunque siano i 10 numeri scritti sul foglietto, ogni numero della seconda riga appare anche nella terza riga.

A3. Sia n un intero positivo. Definiamo *camaleonte* una qualunque parola di $3n$ lettere in cui ciascuna delle lettere `A`, `B`, `C` compare esattamente n volte. Definiamo *scambio* l'operazione che scambia tra di loro due lettere consecutive di un camaleonte.

Dimostrare che, per ogni camaleonte X, esiste un camaleonte Y che non può essere trasformato in X con meno di $3n^2/2$ scambi.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

Secondo giorno

B1. Siano k ed M interi positivi, con $M \geq 2$. Sia $(a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla di interi positivi tali che
$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = k \qquad \text{e} \qquad a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = M.$$
Dimostrare che il polinomio
$$p(x) = M(x+1)^k - (x+a_1) \cdot \ldots \cdot (x+a_n)$$
non ha radici reali positive.

B2. Sia ABC un triangolo acutangolo. Sia E un punto variabile sul lato AC, e sia F un punto variabile sul lato AB tale che
$$BC^2 = BA \cdot BF + CE \cdot CA.$$
Dimostrare che, al variare di E ed F, le circonferenze circoscritte al triangolo AEF hanno un punto fisso in comune oltre ad A.

B3. Determinare tutti i numeri interi $n \geq 2$ con questa proprietà: comunque si scelgano n numeri interi $a_1, \ldots, a_n$, con somma non divisibile per n, esiste un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che nessuno dei numeri
$$a_i, \qquad a_i + a_{i+1}, \qquad a_i + a_{i+1} + a_{i+2}, \qquad \ldots, \qquad a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1}$$
è divisibile per n (gli indici sono intesi modulo n).

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.