Algebra – Problemi di ammissione

A1. Dimostrare che per ogni a, b, c reale positivo si ha che

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{1+a^2b} \geq \frac{abc(a+b+c)}{abc+1}.$$

A2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tali che:

- $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$;
- $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $f(xy) = f(x)f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$;
- $f(x+y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$.

A3. Sia $p(x)$ un polinomio non costante a coefficienti reali. Definiamo la successione di polinomi $q_n(x)$ per ogni n intero positivo come

$$q_n(x) = (x+1)^n p(x) + x^n p(x+1).$$

Dimostrare che ci sono solo un numero finito di interi positivi n tali che tutte le radici di $q_n(x)$ siano reali.

Algebra – Sessioni dello stage

A4. Due funzioni $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sono tali che

$$f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che se f è limitata allora g è periodica.

A5. Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali p tali che valga la relazione

$$p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2 = p(a + b + c)^2$$

per tutti gli a, b, c reali tali che $ab + bc + ca = 1$.

A6. Trovare tutte le terne (a, b, c) di reali non negativi che soddisfano contemporaneamente

- $a + b + c = 3$;
- $a + b > 0$, $b + c > 0$, $c + a > 0$;
- la seguente disuguaglianza

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}} \geq \frac{ab}{\sqrt{b+c}} + \frac{bc}{\sqrt{c+a}} + \frac{ca}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A7. Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

per ogni coppia di numeri reali positivi x e y.

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. Attorno a un tavolo circolare siedono $n \geq 3$ bambine, ciascuna con alcune mele (anche nessuna). Se la maestra si accorge che una bambina ha più mele della somma delle sue due vicine, gliene toglie una e ne dà una ciascuno alle sue due vicine (la maestra ha un cesto infinito di mele da cui attingere). Dimostrare che il processo in ogni caso terminerà dopo un numero finito di passi.

C2. Si scrive inizialmente una parola con n lettere diverse. Poi ad ogni passaggio si scrive una nuova parola di n lettere, invertendo la più lunga sottoparola iniziale che non produca una parola già scritta. Dimostrare che si scriveranno $n!$ parole.

C3. Sia n un numero naturale e Q l'insieme dei punti del piano a coordinate intere comprese tra 1 e n (estremi inclusi). Un sottoinsieme di Q è detto *nonromboidale* se non contiene 4 punti non allineati che formino un parallelogramma. Quanti punti può contenere al massimo un sottoinsieme nonromboidale di Q?

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. Nel piano ci sono N caselle segnate. A ogni turno è consentito di segnare una nuova casella se nella sua riga e nella sua colonna ci sono almeno k caselle segnate (in totale). Se tutte le caselle possono venire segnate prima o poi, quale è il minimo valore di N?

C5. Su una scacchiera $n \times n$ alcune caselle sono segnate. In particolare, un angolo è segnato con una L e quello opposto con una R, mentre altre caselle sono segnate con una * in modo che ogni cammino fatto a mosse di cavallo tra L e R contiene almeno una casella con la *. Per quali n ci sono certamente due caselle con la * lungo una diagonale, adiacenti o al più con una casella vuota in mezzo?

C6. Dati $n \geq 7$ giocatori di tennis, si ha che nella loro carriera per ogni coppia di giocatori ce n'è uno che li ha battuti entrambi almeno una volta (ma non è detto che tutti i giocatori abbiano giocato tra loro e possono essersi vicendevolmente battuti almeno una volta). Dimostrare che se $2(2^{(2^k)} - 1) \geq n$ esiste un ciclo di giocatori $A_1, \ldots, A_l$ in cui ciascuno ha battuto almeno una volta il successivo e A_l ha battuto A_1, con $2 \leq l \leq 2k$.

C7. Sia n un intero positivo. Ci sono $n + 1$ scatole disposte in fila, e numerate da 0 ad n da sinistra verso destra. Inizialmente, n pietre sono disposte nella scatola 0, mentre le restanti scatole sono vuote. Ad ogni mossa, Sisifo sceglie una scatola non vuota (diciamo con k pietre al suo interno), poi sceglie una delle pietre in essa contenute e la sposta verso destra di al massimo k posizioni. Sisifo prosegue in questo modo fino a quando tutte le pietre si trovano nella scatola numero n.

Dimostrare che Sisifo, per raggiungere il suo scopo, ha bisogno di almeno

$$\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$$

mosse.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. I punti D ed E giacciono sui segmenti AB e AC di un triangolo ABC in modo che $DE \parallel BC$. Siano O_1 e O_2 rispettivamente i circocentri dei triangoli ABE e ACD. La retta O_1O_2 incontra AC in P e AB in Q. Sia O il circocentro del triangolo APQ e M l'intersezione di AO con BC.

Mostrare che M è il punto medio di BC.

G2. Sia H l'ortocentro di un triangolo ABC. Siano M e N rispettivamente i punti medi di AB e AC. Assumiamo che H giaccia all'interno del quadrilatero $BMNC$ e che le circonferenze circoscritte ai triangoli BMH e CNH siano tangenti a vicenda. La retta per H e parallela a BC interseca le circonferenze circoscritte ai triangoli BMH e CNH rispettivamente in K e L. Sia F l'intersezione di MK e NL e sia J l'incentro del triangolo MHN.

Mostrare che $FJ = FA$.

G3. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza ω e sia P l'intersezione di AC e BD. I punti E e F giacciono rispettivamente su AB e CD in modo che $\angle APE = \angle DPF$. Sia ω_1 la circonferenza tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo PEF in P e tangente a ω in un punto X. Sia ω_2, analogamente, la circonferenza tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo PEF in P e tangente a ω in un punto Y.

Mostrare che

$$\frac{EX}{EY} = \frac{FX}{FY}$$

Geometria – Sessioni dello stage

G4. Sia ABC un triangolo e D un punto variabile su BC. Siano E ed F due punti su AB e AC rispettivamente in modo tale che $BE = CD$ e $CF = BD$. Le circonferenze circoscritte ai triangoli BDE e CDF si incontrano, oltre che in D, in un punto P.

Mostrare che esiste un punto Q tale che la lunghezza di QP è costante.

G5. Dato ABC un triangolo e T un suo punto interno, siano A_1, B_1 e C_1 i simmetrici di T rispetto a BC, CA e AB rispettivamente. Detta ω la circonferenza circoscritta al triangolo $A_1B_1C_1$, le rette A_1T, B_1T e C_1T intersecano rispettivamente ω di nuovo in A_2, B_2 e C_2.

Mostrare che AA_2, BB_2 e CC_2 concorrono su ω.

G6. Sia ABC un triangolo, I il suo incentro e ω la sua circonferenza circoscritta. Una retta l interseca AI, BI e CI rispettivamente in D, E e F.

Mostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo determinato dagli assi dei segmenti AD, BE e CF è tangente a ω.

G7. Sia ABC un triangolo con ortocentro H e sia M il punto medio di BC. Siano P e Q due punti distinti, entrambi diversi da A, sulla circonferenza di diametro AH e tali che M, P e Q sono allineati.

Mostrare che l'ortocentro del triangolo APQ giace sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

G8. Sia ABC un triangolo e siano M e N i punti medi di AB e AC rispettivamente. Sia X un punto tale che AX è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC e inoltre sia ω_B la circonferenza passante per M e B tangente a MX e ω_C la circonferenza passante per N e C e tangente a NX.

Mostrare che ω_B e ω_C si intersecano su BC.

G9. Sia ABC un triangolo con circonferenza circoscritta ω e H il piede dell'altezza condotta da A a BC. Siano P e Q i punti di ω tali che $PA = PH$ e $QA = QH$. La tangente a ω condotta da P interseca AC e AB rispettivamente in E_1 e F_1 e la tangente a ω condotta da Q interseca AC e AB rispettivamente in E_2 e F_2.

Mostrare che la retta che congiunge i centri delle circonferenze circoscritte ad AE_1F_1 e AE_2F_2 è parallela alla tangente condotta da A ad ω.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Determinare tutti gli interi positivi n per cui

$$\frac{n^{3n-2} - 3n + 1}{3n-2} \in \mathbb{Z}\,.$$

N2. Sia $p > 5$ un numero primo e sia $S = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$.
Dimostrare che S contiene due elementi a, b con $1 < a < b$ tali che $a \mid b$.

N3. Determinare tutti i numeri primi p per i quali esistono interi m, n tali che

$$p = m^2 + n^2 \quad \text{e} \quad p \mid m^3 + n^3 - 4\,.$$

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Sia x un numero razionale fissato. Dimostrare che esiste una sequenza $x_0, x_1, x_2, \ldots$ di numeri razionali con le seguenti proprietà:

(a) $x_0 = x$;

(b) per ogni $n \geq 1$ si ha o $x_n = 2x_{n-1}$ o $x_n = 2x_{n-1} + \frac{1}{n}$;

(c) x_n è intero per qualche n.

N5. Siano m, n interi positivi con $m \geq 3$. Una sequenza $x_1, \ldots, x_m$ di interi si dice una *progressione aritmetica modulo* n se $x_{i+1} - x_i \equiv x_i - x_{i-1} \pmod{n}$ per ogni i con $2 \leq i \leq m-1$.

Siano $p \geq 5$ un numero primo, a un intero con $1 < a < p-1$, e sia $a_1, a_2, \ldots, a_k$ l'insieme dei resti della divisione delle potenze di a per p. Dimostrare che se esiste una permutazione di $a_1, \ldots, a_k$ che è una progressione aritmetica modulo p, allora $k = p-1$.

N6. Sia $k > 1$ un numero intero. Definiamo la successione $a_1, a_2, \cdots$ come segue:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = k \\ a_{n+1} = (k+1)a_n - a_{n-1} \text{ per } n > 1. \end{cases}$$

Determinare tutti gli interi positivi n per cui a_n è una potenza di k.

N7. Per ogni numero primo p, definiamo la media delle parti frazionarie

$$M(p) := \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\{ \frac{k^{2n}}{p} \right\}.$$

Dimostrare che esistono infiniti primi p per cui $M(p)$ assume lo stesso valore.

Girls Selection Test

GST1. Sia $(a_n)_{n\geq 0}$ una successione di numeri reali tali che $a_n = a_{n-1} + a_{n+2}$ per ogni $n \geq 1$.

Quanto può valere, al massimo, il numero di elementi strettamente positivi consecutivi della successione?

GST2. Sia $\triangle ABC$ un triangolo ottuso in A e siano D, E, F i punti di tangenza della circonferenza inscritta al triangolo con i lati BC, AC, AB, rispettivamente. Chiamiamo inoltre Γ la circonferenza di diametro BC.

Sia ora X il secondo punto di intersezione (oltre a B) della circonferenza passante per B, D, F con Γ. Analogamente, sia Y il secondo punto di intersezione (oltre a C) della circonferenza passante per C, D, E con Γ.

Dimostrare che i punti X, Y, E, F sono allineati.

GST3. Trovare tutti gli interi $n \geq 1$ tali che esiste una permutazione $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di $(1, 2, \ldots, n)$ tale che $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ è divisibile per k per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$.

GST4. In una prova EGMO ci sono 3 esercizi valutati ciascuno da 0 a 7 punti. La gara è detta *emozionante* se si può sempre trovare una coppia di partecipanti tali che una delle due ha ottenuto un punteggio maggiore o uguale all'altra su ogni esercizio.

(a) Dimostrare che se la gara ha 65 partecipanti, allora è sempre emozionante.

(b) Dimostrare che esiste una gara con 48 partecipanti che non è emozionante.

(c) Dimostrare che se la gara ha 49 partecipanti, allora è sempre emozionante.

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

Primo giorno

A1. Dimostrare che esiste un insieme S costituito da 4038 interi positivi distinti con questa proprietà. Per ogni $m \in \{2, 3, \ldots, 2019\}$, esistono due sottoinsiemi S_1 ed S_2 di S tali che

- S è unione disgiunta di S_1 ed S_2 (cioè $S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$),
- S_1 ha esattamente m elementi,
- la somma degli elementi di S_1 è uguale alla somma degli elementi di S_2.

A2. Sia $\mathbb{Q}_{>0}$ l'insieme dei numeri razionali positivi.

Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ tali che

$$f\left(x^2 f(y)^2\right) = f(x)^2 f(y)$$

per ogni coppia di numeri razionali positivi x e y.

A3. Sia ω una circonferenza di raggio unitario.

Determinare tutti i numeri reali t con questa proprietà. Per ogni intero positivo n, esistono triangoli $T_1, \ldots, T_n$ che soddisfano le seguenti tre condizioni:

- la circonferenza circoscritta a T_i è ω per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- il perimetro di T_i è maggiore di t per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- T_i e T_j non hanno punti in comune per ogni coppia di interi distinti i e j in $\{1, \ldots, n\}$.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

Secondo giorno

B1. Sia ABC un triangolo acutangolo, e sia M il punto medio del lato BC. Sia D l'ex-centro del triangolo MAB relativo ad M, e sia E l'ex-centro del triangolo MAC relativo ad M. La circonferenza circoscritta al triangolo ABD incontra nuovamente la retta BC in F; la circonferenza circoscritta al triangolo ACE incontra nuovamente la retta BC in G.

Dimostrare che $BF = CG$.

B2. Sia $n \geq 2$ un numero intero. Una tabella $n \times n$ di numeri interi verifica le seguenti tre condizioni:

- ogni numero nella tabella è congruo ad 1 modulo n,
- la somma dei numeri in ogni riga è congrua ad n modulo n^2,
- la somma dei numeri in ogni colonna è congrua ad n modulo n^2.

Sia R_i il prodotto dei numeri dell'i-esima riga, e sia C_j il prodotto dei numeri della j-esima colonna.

Dimostrare che le somme $R_1 + \cdots + R_n$ e $C_1 + \cdots + C_n$ sono congrue modulo n^4.

B3. Dimostrare che, per ogni insieme S di interi positivi, almeno una delle seguenti due condizioni è verificata:

(a) esistono due sottoinsiemi finiti disgiunti F e G di S tali che

$$\sum_{i \in F} \frac{1}{i} = \sum_{i \in G} \frac{1}{i},$$

(b) esiste un numero razionale $r \in (0, 1)$ tale che

$$\sum_{i \in F} \frac{1}{i} \neq r$$

per ogni sottoinsieme finito F di S.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.