ALGEBRA POMERIDIANA

Titolo nota 28/05/2007

6

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) > 4(a^6+b^6+c^6)+12a^2b^2c^2$$

Vera $\forall a,b,c \geq 0$? NO $b=c=1$

LHS $\sim a^6$ RHS $\sim 4a^6$

Ora a^2, b^2, c^2 lati di un triangolo

LHS $\geq \boxed{?} \geq$ RHS

C.S.

$$\text{LHS} \geq (a^2+b^2+c^2)^3 \iff (a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

Hope $(a^2+b^2+c^2)^3 > 4(a^6+b^6+c^6)+12a^2b^2c^2$

RAVI $\quad a^2 = x+y \quad b^2 = y+z \quad c^2 = z+x$

$$\cancel{8}^{\,2}(x+y+z)^3 > \cancel{4} \sum_{cyc} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$+ \cancel{12}^{\,3}(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\cancel{2\sum_{cyc} x^3} + \cancel{2\sum_{sym} 3x^2y} + 12xyz \overset{?}{>} \cancel{2\sum_{cyc} x^3} + \cancel{\sum_{sym} 3x^2y}$$

$$+ \cancel{3\sum_{sym} x^2y} + 6xyz$$

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$x\,p(x) = y\,p(y)$ per infinite coppie $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ con $x \neq y$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy$$

$$a(x^4 - y^4) + b(x^3 - y^3) + c(x^2 - y^2) + d(x - y) = 0$$

$$a(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + b(x^2 + xy + y^2) + c(x + y) + d = 0$$

$x + y = S \qquad xy = P$

$$a(S^3 - 2SP) + b(S^2 - P) + cS + d = 0$$

$$aS^3 + bS^2 + cS + d = 2aSP + bP = P(2aS + b)$$

Può essere vera per tante coppie (x, y) con la stessa S?

NO!

$\boxed{\text{Quindi: essendo per } \infty \text{ coppie, è vera con infiniti valori diversi di } S}$

SBAGLIATA, MA QUASI GIUSTA

$\Rightarrow$ è vera con valori di S grandi quanto voglio in valore assoluto

Per $|S|$ MOLTO GRANDE

$LHS \sim aS^3$ $\qquad$ $RHS \sim P(2aS) \overset{\leq}{\sim} 2a \cdot \frac{S^2}{4} S$

$P = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{S^2}{4}$ $\qquad$ $= a\frac{S^3}{2}$

$2aS + b = 0$ e $LHS = 0$ sempre

$\boxed{-\frac{b}{a}} = 2S$

somma radici

radice intera

$LHS = 0 \Rightarrow p(S) = 0$

$$|aS^3+bS^2+cS+d| = |p|\,|2aS+b|$$

$$\left|a+\cancel{\frac{b}{S}}+\cancel{\frac{c}{S^2}}+\cancel{\frac{d}{S^3}}\right| = \frac{|p|}{S^2}\left|2a+\frac{b}{S}\right| \le \frac{1}{4}\left|2a+\cancel{\frac{b}{S}}\right|$$

$$|a| \le \frac{|a|}{2}$$

— o — o —

Si può usare parte reale e immaginaria

$$a = \alpha + i\beta \qquad \alpha \neq 0$$

(se $\beta \neq 0$ faccio stessa cosa con parte imm.)

Prendo Re di LHS e RHS

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{LHS}) \sim \alpha S^3 \qquad \mathrm{Re}\,(\mathrm{RHS}) = p \cdot 2\alpha S$$

ora sono reali

$A = (a_1, \dots, a_n)$ $\qquad$ $B = (b_1, \dots, b_n)$

$|A|^2 = |B|^2 = 1$ $\qquad$ $A \cdot B = 0$ $\qquad$ $U = (1, \dots, 1)$

$$\sum a_i = A \cdot U = \alpha \qquad |U|^2 = n$$

$$\sum b_i = B \cdot U = \beta$$

$(x_1, \dots, x_n) = X$

$(y_1, \dots, y_n) = Y$

$X \cdot Y = \sum x_i y_i$

$$\vec{U} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \vec{R}$$

$$n = |U|^2 = (\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \vec{R})(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \vec{R})$$

$$= \alpha^2 \underbrace{|\vec{A}|^2}_{=1} + \beta^2 \underbrace{|\vec{B}|^2}_{=1} + |\vec{R}|^2 + 2\alpha\beta \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{B}}_{=0} +$$

$$+ 2\alpha \vec{A} \cdot \vec{R} + 2\beta \vec{B} \cdot \vec{R}$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + |\vec{R}|^3$$

Speranza $\quad \vec{A}\cdot\vec{R} = 0 \qquad \vec{B}\cdot\vec{R} = 0$

$$\vec{A}\cdot\vec{R} = \vec{A}\cdot\left(\vec{U} - \alpha\vec{A} - \beta\vec{B}\right)$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{U} - \alpha\,\underbrace{\vec{A}\cdot\vec{A}}_{=1} - \beta\,\underbrace{\vec{A}\cdot\vec{B}}_{=0}$$

$$\alpha \quad - \alpha \qquad\qquad 0 \qquad = 0$$

$v_1, \dots, v_n$ vettori "ortonormali" ($n =$ dim. dei v_i)

$$v_i \cdot v_j = 0 \qquad \text{se } i \neq j$$

$$v_i \cdot v_i = |v_i|^2 = 1$$

<u>Fatto generale</u>: Dato un qualunque v, si può scrivere

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

e valgono 2 proprietà

1. $|v|^2 = \sum c_i^2$

2. $c_i = v \circ v_i$

— o — o —

$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x\,g(y+1)) + y = x\,f(y) + f(x + g(y))$$

$$f(0) + g(0) = 0$$

$\boxed{x=0}$ $f(0) + y = f(g(y))$

$$f(g(y)) = y + f(0)$$

$\Downarrow$

- f surgettiva
- g iniettiva

$\boxed{\text{Supponiamo}}$ che esista $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $g(\alpha) = 0$

$\boxed{y = \alpha - 1}$ $\quad f(x \underset{\underset{f(0)}{\shortparallel}}{g}(\alpha)) + \alpha - 1 = x f(\alpha - 1) + f(x + g(\alpha - 1))$

$$f(x + g(\alpha - 1)) = -f(\alpha - 1)x + f(0) + \alpha - 1$$

$$= mx + n$$

$$f(x + c) = mx + n$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = px + q$$

$$\downarrow$$

sostituisco nell'eq. iniziale e trovo parecchie condizioni

$$f(x\,g(y+1)) + y = x\,f(y) + f(x+g(y))$$

Scelgo x in modo che si abbia

$$x\,g(y+1) = x + g(y) \qquad x = \frac{g(y)}{g(y+1)-1}$$

!!!

Pongo $x = \dfrac{\cdots}{\cdots}$

$$y = \frac{g(y)}{g(y+1)-1} \cdot f(y)$$

Metto $y=0$ $\qquad 0 = \dfrac{g(0)}{g(1)-1} \cdot f(0)$

1° caso: si annulla $g(0)$ $\rightsquigarrow$ OK: $\alpha = 0$

2° caso: si annulla $f(0)$ $\rightsquigarrow$ per 2ª condiz. si annulla anche $g(0)$

3° caso: $g(1) = 1$ e non si può fare nulla

Poichè f è surgettiva, esiste β t.c. $f(\beta)=0$

Metto $y=\beta$ $\qquad \beta = \dfrac{g(\beta)}{g(\beta+1)-1} \cdot \underbrace{\boxed{f(\beta)}}_{=0}$

se $\beta = 0$ $\rightsquigarrow$ $f(0)=0$ $\rightsquigarrow$ per 2ª condiz. anche $g(0)=0$

se $\beta \neq 0$ poichè g è iniettiva

$g(\beta+1) \neq g(1)$ quindi la formula si può scrivere ed è assurda.