COMBINATORIA POMERIDIANA

Titolo nota 31/05/2007

Formula per a_n in generale: scrivo n in base 2 e poi lo interpreto in base 3

Induzione su n

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$ $\qquad 2 = (10)_2$

$a_2 = 3$ $\qquad 3 = (10)_3$

Supponiamo vero per un certo n e dim. per $n+1$

che $\{a_1, \dots, a_n\}$ = insieme dei primi n numeri con soli zeri e uni in base 3

Chi sarà a_{n+1}?

$a_{n+1} = 110 \dots 1\ 2\ 0\ 1 \dots 1$

serve che siamo prec. col a_n $\longrightarrow$ $\longrightarrow$

1

0

Bisogna dimostrare che il primo numero con soli zeri e uni in base 3 va bene come a_{n+1}.

$$a_{n+1} + a_i = 2a_j$$

↑ solo due e zeri in base 3

$\Rightarrow$ a_i deve avere uni dove a_{n+1} ha uni

$\Rightarrow$ $a_i \geq a_{n+1}$ assurdo

—— o —— o ——

$\exists$ 2^k numeri di 2^{k-1} cifre con le proprietà richieste.

$\boxed{k=1}$ A
B

$\boxed{k=2}$ AA AB BA BB

$\boxed{k=3}$

$$\begin{array}{cccc} A & A & A & A \\ B & B & B & B \\ A & A & B & B \\ B & B & A & A \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A & B & A & B \\ B & A & B & A \\ A & B & B & A \\ B & A & A & B \end{array}$$

Per induzione supp. di avere fatti 2^k e facciamone 2^{k+1}

$\downarrow$ accoppiati a 2 a 2 $\qquad \downarrow$ accoppiati a 2 a 2

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ due accoppiati con 2^k cifre

$$\begin{array}{cc} \mathcal{A} & \mathcal{A} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} C & C \\ C & D \\ D & C \\ D & D \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ C & D \end{array}$$

al + $\frac{1}{2}$ posiz.

al + $\frac{1}{2}$ posizioni

$|X| \geq 2^k + 1$ $\quad \exists\ |S| = k+2$ t.c. tutti i suoi sottoinsiemi di cardinalità fissa abbiano somma diversa

Provo per induzione

Suppongo vero fino a k e provo a passare a k+1 $\quad |X| = 2^{k+1} + 1$

$$\boxed{\{ a_1, a_2, \dots, a_{2^k}, a_{2^k+1} \}}$$

metà + 1 degli elementi

ne trovo k+2 con i sottoinsiemi come si deve

Tra i rimanenti ne devo scegliere 1 da aggiungere ai $k+2$ precedenti in modo da rispettare la condizione.

$\boxed{\text{IDEA}}$ Se tipo gli $a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}$ fossero tutti pari

mi basterebbe prendere un dispari esterno

$\boxed{\text{Osservazione}}$ 1 Se la proprietà vale in un certo X, allora vale anche in X con tutti gli elementi traslati di 1

Se avevo maggioranza dispari traslo e ho maggioranza pari

2 Se la proprietà vale in X, allora vale in $\frac{X}{2}$

Per renderlo rigoroso considerare la max potenza di 2 che divide tutte le differenze

8

DOUBLE COUNTING

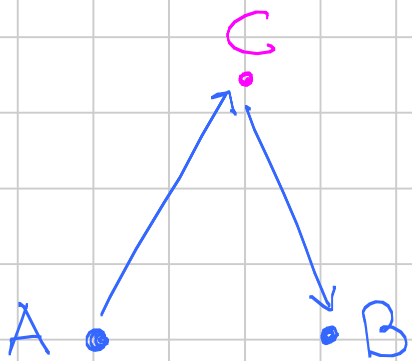
$$\sum_{(A,B) \in D} S(A,B) = \text{numero dei percorsi ordinati di lunghezza} \leq 2$$

- Percorsi ordinati di lunghezza 1: $\sum_{A \in X} L(A)$

  X ← 2000 città

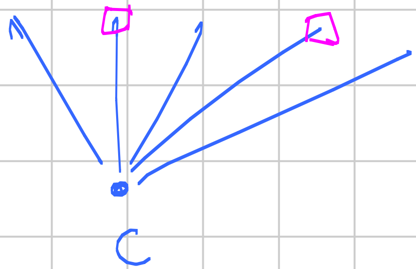
- Percorsi ordinati di lunghezza 2: conto a seconda della città intermedia C

L(A) = linee che escono dal vertice A



Una data C fissata è intermedia ad

possibili partenze → $L(C)\,[L(C)-1]$ ← possibili arrivi



$$\sum_{C\in X} L(C)\,[L(C)-1]$$

$$=\sum_{A\in X} L(A)\,[L(A)-1]$$

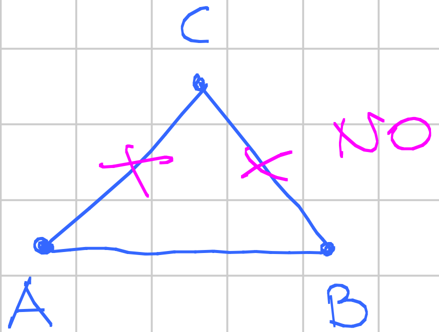
\# percorsi di lungh. ≤ 2

$$=\sum_{A\in X} L(A)+\sum_{A\in X} L(A)\,[L(A)-1] =$$

$$\sum_{A\in X} \boxed{[L(A)]^2} \equiv \sum_{A\in X} 1 = |X| = 2000 \pmod 3$$

tutte potenze di 4

$10000 \not\equiv 2000 \pmod 3$



Quanti percorsi sto togliendo alla somma precedente ?

Risp. : 6 per ogni triangolo presente nel grafo

$$\sum O(A,B) = \sum S(A,B) - \underbrace{6 \, \# \text{Triangoli}}_{\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)}$$