PRE-IMO 2008 ALGEBRA MATTINA

Titolo nota 21/05/2008

$\boxed{1}$ $$f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\boxed{\text{INIETTIVA}}$

Soluzione banale: $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Tesi: non ce ne sono altre.

Supponiamo che $f(n) < n$ per un qualche n FISSATO

$$f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2} < \frac{n+n}{2} = n \Rightarrow f(f(n)) < n$$

$$f(f(f(n))) \leq \frac{f(n)+f(f(n))}{2} < \frac{n+n}{2} = n$$

$$f(f(f(n))) = f^{(3)}(n) < n$$

composizione

Congettura $\quad f^{(k)}(n) < n \quad \forall k \geq 1 \quad$ $\boxed{n \text{ FISSO}}$

FACILE
INDUZIONE

iterata k-esima

PRIMA o poi si ripetono.

Considero la $\boxed{\text{prima}}$ ripetizione, cioè interi k_0 e h_0 t.c.

MINIMO

$$f^{(k_0)}(n) = f^{(k_0+h_0)}(n)$$

CON LE MANI: $\quad f\left(f^{(k_0-1)}(n)\right) = f\left(f^{(k_0+h_0-1)}(n)\right)$

DISTINTI, MA CON LA STESSA f

PIÙ IN ASTRATTO

$$f^{(k_0)}(n) = f^{(k_0+h_0)}(n)$$

$$= f^{(k_0)}\left(\underbrace{f^{(h_0)}(n)}\right)$$

più piccolo di n

Quindi $f^{(k_0)}$ non è iniettiva $\Rightarrow f$ non è iniettiva

Fatti generali:

$$g_1(g_2(g_3 \cdots g_{50}(x))))$$

- Se tutte le g_i sono iniettive, allora composiz. iniettiva
- Se composiz. iniettiva, allora la più interna è iniettiva

Ho trovato un assurdo se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $f(n) < n$

Devo trovare un assurdo se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $f(n) > n$

$$f(\underbrace{f(n)}_{m}) \leq \frac{n + f(n)}{2} < \frac{f(n) + f(n)}{2} = \underbrace{f(n)}_{m}$$

$f(m) < m$ e ricado nel caso precedente.

$\boxed{2}$ $p(-x^2) = p(x) \cdot p(x-1)$ $\qquad p(x) \in \mathbb{R}[x]$

pol. a coeff. in $\mathbb{R}$

(idem in $\mathbb{C}$)

$p(x) = 0$ è una soluzione

$p(x) = 1$ PURE

$p(x)$ ha un numero finito di radici COMPLESSE
(e ne ha se non è una delle 2 costanti di sopra)

r radice di $p(x)$ $\overset{①}{\Rightarrow}$ $-r^2$ è radice (metto $x = r$)

r radice di $p(x)$ $\overset{②}{\Rightarrow}$ $x = r+1$ e ottengo che
$-(r+1)^2$ è radice

Per la ① $|r|$ può valere solo 0 o 1.

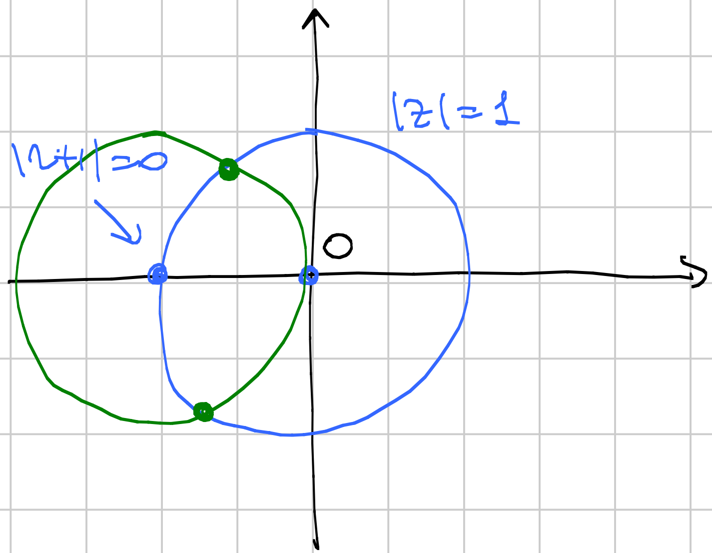
Se fosse $|r| > 1$, allora $|-r^2| = |r|^2 > |r|$
per ogni radice ne ho una di modulo > FINE

Se $0<|z|<1$, allora $|-z^2| < |z|^2$, quindi trovo sempre nuove radici con modulo + piccolo usando solo la ①.

Uso la ② e ho che anche

$|z+1| = 1$ oppure $=0$

$|z-(-1)|$



NON VANNO BENE per la PRIMA formula.

Le altre 2 sì. Quindi $p(x) = cx^a (x+1)^b$. Sostituisco

$$c(-x^2)^a(-x^2+1)^b = cx^a(x+1)^b \cdot c(x-1)^a(x)^b$$

$$\underbrace{c(-1)^a(-1)^b}_{(-1)^{a+b}} x^{2a}(x+1)^b(x-1)^b = c^2 x^{a+b}(x+1)^b(x-1)^a$$

$2a = a+b \rightarrow a = b$ tutti i fattori si sistemano e

$$c = c^2 \Rightarrow c = 0, 1$$

$\boxed{\text{SOLUZIONI}}$ $p(x) = x^a (x+1)^a$

$p(x) = 1$

$p(x) = 0$

(3) $a, b, c > 0 \qquad (a+b)(b+c)(c+a) = 8$

Tesi $\qquad \dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

Bunching + omogenizzazione + Schur

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3\sum_{sym} a^2b + 6abc = a^3+b^3+c^3+24$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = \sum_{sym} a^2b + 2abc$$

$$\frac{(a+b+c)^3}{27} \geq \sqrt[9]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3+24}{27} \geq \sqrt[9]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

elegante (by StW)

AM-GM

$$\frac{\overbrace{a^3+b^3+c^3}^{1} + \overbrace{3+3+\dots+3}^{8}}{9} \geq \sqrt[9]{(a^3+b^3+c^3)\cdot 3^8}$$

Divido per 3 e ho finito.

In alternativa: opzione BOVINA

$$\frac{(a+b+c)^3}{27} \geq \sqrt[9]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} = \sqrt[9]{\frac{(a+b+c)^3-24}{3}}$$

$a+b+c = S$

$$\frac{S^3}{27} \geq \sqrt[9]{\frac{S^3-24}{3}} \qquad \frac{S^{27}}{3^{27}} \geq \frac{S^3}{3} - 8$$

$$\frac{S^{27}}{3^{27}} - \frac{S^3}{3} \geq -8 \qquad \left(\frac{S}{3}\right)^3 = x$$

$$\underbrace{x^9 - 9x}_{f(x)} \geq -8 \qquad \text{VERA per } x = 1$$

$f(x)$ ← spero sia crescente per $x \geq 1$

$$f'(x) = 9x^8 - 9 = 9(x^8 - 1) \geq 0 \quad \text{per } x \geq 1$$

Tutto vero se $x \geq 1$, quindi mi serve $\frac{S}{3} \geq 1$

$$\frac{2S}{3} = \frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \underset{\text{AM-GM}}{\geq} \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = 2$$

$$f(x) = x^9 - 9x + 8 \qquad \text{CONVESSA per } x \geq 0$$

$f'(1) = 0 \Rightarrow$ tangente orizz. in $x = 1$

$\boxed{4}$ $T = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} (2m-1)^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} \left(\sqrt{2m-1}\right)^{2k} \longrightarrow$ Termini pari di

$$\sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \left(\sqrt{2m-1}\right)^{i} (1)^{2m-i} = \left(\sqrt{2m-1}+1\right)^{2m} = A$$

Binomio di Newton

$$\sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \left(\sqrt{2m-1}\right)^{i} (-1)^{2m-i} = \left(\sqrt{2m-1}-1\right)^{2m} = B$$

$$\frac{A+B}{2} = T = \frac{\left(\sqrt{}+1\right)^{2m} + \left(\sqrt{}-1\right)^{2m}}{2}$$

Devo dim. che T è divisibile per $2^m \cdot n$ se m è DISPARI

$$T = \frac{\left(2m+2\sqrt{}\right)^{m} + \left(2m-2\sqrt{}\right)^{m}}{2} =$$

$$= \frac{2^m}{2}\underbrace{\left[\left(n+\sqrt{2u-1}\right)^m+\left(n-\sqrt{2u-1}\right)^m\right]}$$

Questo deve essere divisibile per $2n$
e SOPRATTUTTO deve essere INTERO

$$A^u + B^u = \underbrace{(A+B)}_{2n} \cdot \underbrace{\text{Mostro}}$$

perchè MAI è intero ???

$$A^u + B^m \overset{=a_u}{} : \text{ cosa ricorda?}$$

$a_{u+1} = \alpha a_u + \beta a_{u-1}$ chi sono α e β ?

$x^2 - \alpha x - \beta = 0$ e le radici devono essere A e B

quindi $\alpha = A+B$ $\beta = -AB$

Nel nostro caso $\alpha = A+B = 2n$

$$\beta = -AB = -(n-1)^2$$

$$a_{n+1} = 2n\, a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$$

tesi: a_n multiplo di $2n$ se n dispari

$$a_0 = A^0 + B^0 = 2$$
$$a_1 = A^1 + B^1 = 2n$$

a_0, a_1 pari $\Rightarrow$ tutti gli a_n sono pari

Mi serve che i termini dispari siano multipli di $2n$

induzione: a_1 lo è. Suppongo vero per a_{2n-1}

$$a_{2n+1} = \underbrace{2n}\, a_{2n} - (n-1)^2 a_{2n-1}$$

multiplo di $2n$ per Hp ind.

Alternativa:

Mostro = $p(A,B)$ simmetrico, quindi

$q(A+B, AB)$

Fatto generale: ogni pol. simm. $p(A_1, A_2, \dots, A_n)$ si può scrivere come q (funz. simm. elem.)

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + \dots + A_n \\ \sum_{sym} A_1 A_2 \\ \vdots \end{array}\right\} = \text{coeff. del pol. che ha come radici } A_1, \dots, A_n$$

IMPORTANTE: se p ha coeff. interi, anche q ha coeff. interi

Ancora

$$\text{Mostro} = \frac{A^n + B^m}{A+B} \in \mathbb{Q}$$

$\downarrow$

$$\alpha + \beta\sqrt{} \in \mathbb{Q}$$

α, β interi

$$\Rightarrow \sqrt{\ldots} \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{\text{intero}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{\text{intero}} \in \mathbb{N}$$