PreIMO 2008 – Algebra – Pow.

Titolo nota 21/05/2008

(5) $\boxed{\text{BOVINO}}$ Hp. $\underset{Q}{ab+bc+ca} > \underset{S}{a+b+c}$ $\quad P=abc$

Tesi $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{1}{a+b+1} < 1$

$$\sum_{cyc}(a+b+1)(b+c+1) < (a+b+1)(b+c+1)(c+a+1)$$

$$LHS = \sum_{cyc}\left(ab+ac+a+b^2+bc+b+b+c+1\right) =$$

$$= \cancel{3\sum_{cyc} ab} + \cancel{\sum_{cyc} a^2} + \overset{2}{\cancel{3}} + \overset{2}{\cancel{4}}\sum_{cyc} a$$

$ab+ac+b^2+bc$

$$RHS = \cancel{1} + 2\cancel{\sum_{cyc} a} + 3\cancel{\sum_{cyc} ab} + \cancel{\sum_{cyc} a^2} + \sum_{sym} a^2b + 2abc$$

$$\text{LHS} \overset{?}{<} \text{RHS}$$

$SQ - 3P$

$$2\sum_{cyc} a + 2 \overset{?}{<} 2abc + \sum_{sym} a^2 b$$

$$2S + 2 < 2P + SQ - 3P$$

$$\underset{1}{2S} + \underset{0}{2} + \underset{3}{P} \overset{?}{<} \underset{3}{SQ} \quad \leftarrow \text{Nuova Tesi}$$

Hp: $Q > S$

$\underset{1}{\frac{Q}{S}} > 1$

$$2S = 2S \cdot 1 \underset{\text{Hp}}{<} 2S\frac{Q^2}{S^2} \qquad 2 < 2\frac{Q^3}{S^3}$$

$$2S + 2 + P \underset{\text{Hp}}{<} 2\cancel{S}\frac{Q^2}{S^{\cancel{2}}} + 2\frac{Q^3}{S^3} + P \underset{\text{Hope}}{\leq} SQ$$

$$2S^2Q^2 + 2Q^3 + PS^3 \leq S^4 Q$$

$$Q \leq \frac{S^2}{3}$$

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$$

$$\boxed{2S^2Q^2 \leq \frac{2}{3} S^4 Q} \quad 1$$

$$P \leq \frac{SQ}{9} \qquad \text{AM. GM}$$

$1 + 2 + 3 = \text{Hope}$

$$\boxed{PS^3 \leq \frac{S^4 Q}{9}} \quad 2$$

$$\cancel{2}Q^{\cancel{3}\,2} \overset{?}{\leq} \frac{\cancel{2}}{9} S^4 \cancel{Q}$$

$$9Q^2 \leq S^4 \qquad \text{Banale}$$

$$\boxed{2Q^3 \leq \frac{2}{9} S^4 Q} \quad 3$$

$\boxed{\text{BRILLANTE}}$

C.S.

$$(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{a}\sqrt{a}+\sqrt{b}\sqrt{b}+1\cdot c\right)^2 \overset{\text{C.S.}}{\leq}$$

$$= (a+b+1)(a+b+c^2)$$

$$\frac{1}{a+b+1} \leq \frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}$$

Hp VERA $\qquad$ appena fatto

$$1 \leq \sum_{cyc} \frac{1}{a+b+1} \leq \sum_{cyc} \frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2} \sum_{cyc} (a^2+2a)$$

$$(a+b+c)^2 \leq \sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} a$$

$$\cancel{\sum_{cyc} a^2} + \cancel{2} \sum_{cyc} ab \leq \cancel{\sum_{cyc} a^2} + \cancel{2} \sum_{cyc} a$$

TESI VERA

$\boxed{6}$ $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ $\qquad p(i) = 2^i \qquad i = 0, 1, \dots, n+1$

grado n

$$p(n+2) = 2^{n+2} - n - 3$$

$n+3$ condizioni (2 condizioni + del lecito)

Si può soddisfare le prime $n+1$ condizioni

$$p(i) = 2^i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

$$p(x) = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots \text{ fino a } n$$

$$= \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \dots + \binom{x}{n}$$

Dico che soddisfa le prime $(n+1)$ condizioni

$0 \le i \le n$ intero

$$p(i) = \underbrace{\binom{i}{0} + \binom{i}{1} + \dots + \binom{i}{i}}_{2^i} + \underbrace{\binom{i}{i+1} + \dots + \binom{i}{n}}_{0}$$

Vediamo le restanti 2 condizioni

$$p(n+1) = \underbrace{\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1}}_{2^{n+1}} - \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}$$

$2^{n+1} - 1 \rightarrow$ condizione mancata

$$p(n+2) = \underbrace{\binom{n+2}{0} + \dots + \binom{n+2}{n} + \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+2}{n+2}}_{2^{n+2}} - \binom{n+2}{n-1} - \binom{n+2}{n+2}$$

$2^{n+2} - n - 2 - 1 = 2^{n+2} - n - 3$

PREND E L'ULTIMA CONDIZIONE !!!

NESSUN POL. PRENDE TUTTE LE CONDIZIONI

ESISTE UN POLINOMIO ($p(x)$ COSTRUITO) CHE NE PRENDE $n+2$.

Esistono altri polinomi che prendono $n+2$ condizioni? $\boxed{\text{NO}}$

Supponiamo esista $Q(x)$ che ne prende $n+2$.

Quali prende? Mettiamo che salti $Q(i) = 2^i$ $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

Cosa posso dire di $P(x) - Q(x) = R(x)$

si annulla per $x = k$ per $k \neq i$ $\quad$ n condizioni
e per $x = n+2$

$\Rightarrow R(x)$ ha almeno $n+1$ radici $a_1, \dots, a_{n+1}$, quindi

$$R(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_{n+1})\,S(x)$$

$\Rightarrow$ GRADO TROPPO ALTO se $S(x) \neq 0$

grado $= n$

Se $Q(x)$ ha lo stesso valore di $P(x)$ in $n+1$ posti,

allora per forza $P(x) = Q(x)$

— o — o —

$p(0) = 2^0$ $\qquad p(x) = 1$

$p(0) = 1,\ p(1) = 2$ $\qquad p(x) = 1 + x$

$p(0) = 1,\ p(1) = p(2),\ p(2) = 4$ $\qquad$ BOVINO $p(x) = a + bx + cx^2$

Più furbo $\qquad p(x) = 1 + x + a\underbrace{x(x-1)}_{\text{si annulla per } x=0 \text{ e } x=1}$

$\boxed{7}$ $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$

$$f(x)\,f(y) = 2008 \cdot f(x + y\,f(x))$$

1) $f(x) \equiv 2008$ è una soluzione

2) $f(x)\,f(y) = 2008\, f(x+y f(x)) = 2008\, f(y + x f(y))$

3) SE f FOSSE iniettiva $\quad x + y f(x) = y + x f(y)$

Metto $y = 3$ $\quad x + 3 f(x) = 3 + f(3)\, x$

$$f(x) = ax + 1$$

Sostituisco e vedo che non va mai bene

4 Monotonia $\quad f(x + \underset{>0}{q.c.}) \geq f(x)$

$$f(x + y f(x)) = f(x) \frac{f(y)}{\underbrace{2008}_{\text{se fosse } \geq 1}}$$

Vorrei $\quad f(y) \geq 2008 \quad \forall y > 0$

5 $\quad y = x + y f(x) \qquad \boxed{y} = \dfrac{x}{1 - f(x)}$

Se $f(x) < 1$ posso fare la sost. e trovo

$$f(x) \cancel{f(\boxed{y})} = 2008 f(\cancel{\boxed{x + y f(x)}})$$

ASSURDO con $f(x) < 1$ $\qquad$ ho $f(x) \geq 1$

6 $f(a) = m =$ minimo valore

$x = y = a \qquad m^2 = [f(a)]^2 = 2008\, f(\ ) \geq 2008\, m$

$$m \geq 2008$$

$$m = \inf \{ f(x) : x > 0 \}$$

$x = y$ e tali che $f(x) = f(y) \leq (m + \varepsilon)$

$$(m+\varepsilon)^2 \geq f(x) \cdot f(y) \geq 2008\, f(\ ) \geq 2008\, m$$

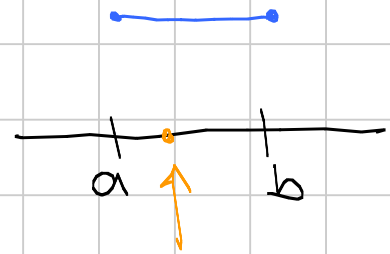
$$(m+\varepsilon)^2 \geq 2008\, m \qquad \forall \varepsilon$$

passando al limite per $\varepsilon \to 0$ $\qquad m^{\cancel{2}} \geq 2008\, \cancel{m}$

(7) Se è monotona stretta, è iniettiva, quindi NIENTE

Quindi è monotona debole

esistono $a < b$ t.c. $f(a) = f(b)$



$a + y f(a)$ per y piccolo

$$\underbrace{f(a + y f(a))}_{=\cancel{f(a)}} = \frac{1}{2008} \cancel{f(a)} f(y)$$

Quindi $f(y) = 2008$ in un intervallino piccolo $(0, \alpha)$

(8) Se $f(c) = 2008$, esistono altri x in cui $f(x) = 2008$?

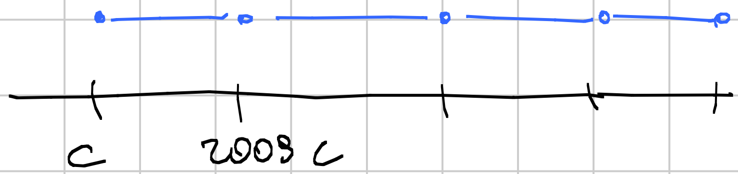
$\boxed{x=c}$ $\quad f(c) f(y) = 2008 f(c + 2008 y)$

$\boxed{y=c}$ $\quad f(c) \cdot f(c) = 2008 f(2009 c)$

$$\cancel{2008} \cdot 2008 = \cancel{2008} f(2009 c)$$

Se $f(c) = 2008$ per induzione

$$f(2009c) = f(2009^2 c) = \dots = 2008$$



$\boxed{\text{6bis}}$ Dal 5 sappiamo che $f(x) \geq 1 \quad \forall x > 0$

$$f(x)\, f(y) = 2008\, f(\text{mostro})$$

$\boxed{x = y}$ $$f(x) \cdot f(x) = 2008 \cdot f(\text{mostro}) \geq 2008$$

$$\rightsquigarrow \quad f(x) \geq \sqrt{2008}$$

$$f(x) \cdot f(x) = 2008 \cdot f(\text{mostro}) \geq 2008 \sqrt{2008}$$

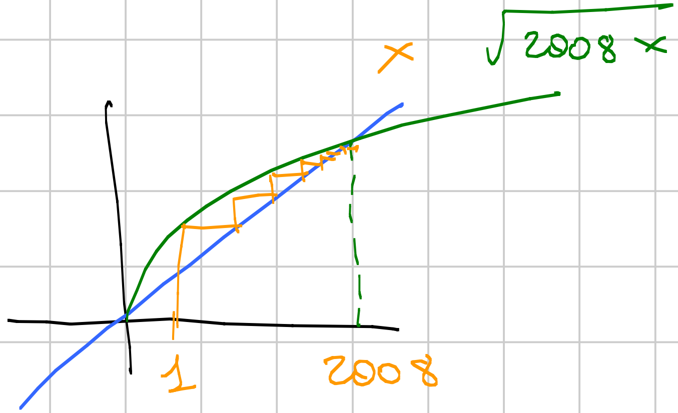
$$\rightsquigarrow \quad f(x) \geq \sqrt{2008 \sqrt{2008}}$$

Se ho per ipotesi induttiva $f(x) \geq c_k \quad \forall x > 0$

$$\rightsquigarrow \quad f(x) \geq \underbrace{\sqrt{2008\, c_k}}_{= c_{k+1}} \quad \forall x > 0$$

$c_{k+1} = \sqrt{2008\, c_k}$

$c_0 = 1$



$\boxed{6\text{ ter}}$ Alternativa per vedere che $f(x) \geq 2008 \quad \forall x > 0$.
Già sappiamo che $f(x) \geq 1 \quad \forall x > 0$

$$f(x) \cdot f(y) = 2008\, f(x + y f(x))$$

$$\frac{f(x)}{2008} \cdot \frac{f(y)}{2008} = \frac{f(x + y f(x))}{2008}$$

Pongo $g(x) = \dfrac{f(x)}{2008}$

$$g(x) \cdot g(y) = g\left(x + y \cdot 2008\, g(x)\right)$$

Oss.: l'immagine della funzione $g(x)$ è un insieme chiuso rispetto al prodotto.

Se l'immagine contiene un elemento $0<k<1$, allora contiene k^n, cioè contiene elementi piccoli a piacere

Se per assurdo $f(x_0) < 2008$, allora $g(x_0) < 1$, ma allora $\exists\, y_0$ t.c. $g(y_0) < \dfrac{1}{2008}$, cioè $f(y_0) < 1$

ASSURDO.

Dim. alternativa della debole crescenza

$$f(x)\,f(y) = 2008\, f(x + y f(x))$$

$$f(z)\,f(y) = 2008\, f(z + y f(z))$$

Domanda: dati x e z, posso trovare y in modo che i 2 RHS siano uguali?

Se sì, semplifico e ottengo che $f(x) = f(z)$.

La condizione è $\quad x + y f(x) = z + y f(z) \quad$ ricavo y

$$y\,[f(x) - f(z)] = z - x \qquad y = \frac{z-x}{f(x) - f(z)} > 0$$

Se $z > x$ e $f(z) < f(x)$, allora trovo y e deduco che $f(x) = f(z)$ ASSURDO. Quindi se $z > x$, per forza $f(z) \geq f(x)$.

$\boxed{8}$ Determinare la + grande costante k_n t.c.

$$\prod_{i=1}^{n} (1+x_i^2) \geq k_n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \qquad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE "ELEMENTARE"}}$

Supponiamo che il caso ottimale sia quello in cui

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$$

$$(1+a^2)^n \geq k_n\, n^2 a^2 \qquad \text{se } a^2 = b \text{ ottengo}$$

$$(1+b)^n \geq k_n\, n^2 b \qquad\qquad 1+b \geq \sqrt[n]{k_n n^2 b}$$

$$1+b = n \frac{1+b}{n} = n \cdot \frac{b + \overbrace{\boxed{\frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-1}}}^{(n-1) \text{ termini}}}{n}$$

$$\text{AM-GM} \quad \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)^{n-1}} \cdot b} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\, b} = \sqrt[n]{k_n n^2 b}$$

l'ultimo = vale se $\quad k_n = \dfrac{n^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}$

Obiettivo: dimostrare la disug. iniziale con k_n dato da

Lemma (BERNOULLI GENERALIZZATO)

$$\prod_{i=1}^{n} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

se tutti gli a_i sono > -1 e stanno dalla stessa parte rispetto a 0.

Oss. 1 Bernoulli classica è il caso in cui gli a_i sono tutti uguali ad un certo $a > -1$

Oss. 2 È banale quando tutti gli a_i sono ≥ 0.
Meno banale quando tutti gli $a_i \in (-1, 0)$

La dim. è una semplice INDUZIONE

$(1+x_i^2)$

Nel caso ottimale tutti gli x_i sono uguali e valgono $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

In questo caso

$$1+x_i^2 = 1+\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$(1+x_i^2) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}(1+x_i^2)\right)$$

$$= \frac{n}{n-1}(1+a_i)$$

Quanto deve valere a_i ?

$$\frac{n-1}{n}(1+x_i^2) = 1+a_i$$

$$a_i = \frac{n-1}{n} - 1 + \frac{n-1}{n}x_i^2$$

$$= \frac{n-1-n}{n} + \frac{n-1}{n}x_i^2$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}x_i^2$$

$$\prod_{i=1}^{n} (1+x_i^2) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (1+a_i) =$$

$$P = \{ i \in \{1, \dots, n\} \ : \ a_i \geq 0 \} \qquad |P| = p$$

$$N = \{ \quad " \quad : \ a_i < 0 \} \qquad |N| = n-p$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \prod_{i\in P} (1+a_i) \cdot \prod_{i \in N} (1+a_i)$$

$$\geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left[1 + \sum_{i\in P} a_i\right] \cdot \left[1 + \sum_{i \in N} a_i\right] = (\ast)$$

$$\sum_{i\in P} a_i = \sum_{i \in P} \left[-\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} x_i^2\right] = -\frac{p}{n} + \sum_{i\in P} \left[\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} x_i\right]^2$$

$$1+\sum_{i\in P} a_i = 1-\frac{p}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i\in P}\left[\sqrt{n-1}\ x_i\right]^2$$

$$=\frac{1}{n}\left[n-p+\sum_{i\in P}\left[\sqrt{n-1}\ x_i\right]^2\right]$$

Analogamente ;

$$1+\sum_{i\in N} a_i = \frac{1}{n}\left[p+\sum_{i\in N}\left[\sqrt{n-1}\ x_i\right]^2\right]$$

$$(\star) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \frac{1}{n^2}\left[n-p+\sum_{i\in P}\left[\sqrt{n-1}\,x_i\right]^2\right]\cdot\left[p+\sum_{i\in P}\left[\sqrt{n-1}\ x_i\right]^2\right]$$

$$\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-p}\quad \underbrace{\sqrt{n-1}\ x_i}_{p \text{ volte}} \qquad \underbrace{\sqrt{n-1}\ x_i}_{n-p \text{ volte}},\ \underbrace{1,\dots,1}_{p \text{ volte}}$$

C.S.

$$\geq \frac{n^{n-2}}{(n-1)^n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n-1}\, x_i \right)^2$$

$$= \frac{n^{n-2}}{(n-1)^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 . \qquad \square$$

— o — o —

$\boxed{\text{SOLUZIONE + STANDARD CON L'ANALISI}}$

$$\prod_{i=1}^{n} (1+x_i^2) \geq k_n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

$$k_n \leq \frac{\prod (1+x_i^2)}{\left(\sum x_i\right)^2} = f(x_1, \dots, x_n)$$

il + grande k_n che va bene è l'inf della funzione al variare di $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ con $\underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{S} \neq 0$.

SPERO che l'inf sia un minimo. Se FOSSE così, il minimo è il valore assunto in un p.to in cui $\nabla f = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{2x_i \prod_{j\neq i}(1+x_i)^2 \cdot S^2 - 2S\prod_{r=1}^{n}(1+x_i^2)}{S^4} = 0$$

$$\iff 2\prod_{j\neq i} S\left[Sx_i - (1+x_i^2)\right] = 0$$

$$\iff x_i^2 - Sx_i + 1 = 0$$

Gli x_i potrebbero non essere tutti uguali, ma sono al + di 2 tipi, quindi ci si riduce in 2 variabili...

PROBLEMA: dimostrare che il minimo esiste.

Sia I l'inf., e sia $\vec{x}_n$ una successione t.c.

$f(\vec{x}_n) \to I \qquad \vec{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,m})$

wlog posso assumere $x_{k,1} \geq x_{k,2} \geq \dots \geq x_{k,m}$ perché f è simmetrica.

A meno di sottosuccessioni posso assumere che

$$\left.\begin{array}{l} x_{k,1} \to x_{\infty,1} \\ x_{k,2} \to x_{\infty,2} \\ \vdots \\ x_{k,m} \to x_{\infty,m} \end{array}\right\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Se i limiti sono tutti $\in \mathbb{R}$ ho finito (devo in realtà escludere che $x_{\infty,1} + x_{\infty,2} + \dots + x_{\infty,m} = 0$, ma questo è facile).

Resta il caso in cui almeno uno dei limiti è $+\infty$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Solo $x_{\infty,1} = +\infty$ (gli altri sono $\in \mathbb{R}$)

In questo caso $f(\vec{x}_n) \to 1$, che però non è l'inf che sappiamo essere < 1 (basta sostituire il caso $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$)

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $X_{\infty,1} = X_{\infty,2} = +\infty$

$$f(\vec{x}_n) = \frac{\prod (1+x_i^2)}{\left(\sum x_i\right)^2} \geq \frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{n^2 x_1^2} \longrightarrow +\infty$$

$$\frac{(1+x_1^2)}{n^2 x_1^2} \downarrow 1 \qquad (1+x_2^2) \downarrow +\infty$$

quindi non è possibile che

$$f(\vec{x}_n) \to I.$$