Titolo nota 22/05/2008

Pre IMO 2008 Combinatoria (Mattino)

$\boxed{1}$ 12 interi in $\{10, 11, \dots, 99\}$ distinti

X il loro insieme

Tesi: $\exists\ A, B \subseteq X \quad A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset,\ A \cap B = \emptyset,\ |A| \leq 3,\ |B| \leq 3$

Somma el. di A = somma elementi di B.

Possibili somme: $\left.\begin{array}{ll} \text{minimo} & 10 \\ \text{Massimo} & 99+98+97 = 294 \end{array}\right\} 285$

Possibili sottoinsiemi: $\binom{12}{3} + \binom{12}{2} + \binom{12}{1}$

$$= \frac{\cancel{12}^{\,2} \cdot 11 \cdot 10}{\cancel{6}} + \frac{12 \cdot 11}{2} + 12 = 220 + 66 + 12$$

$$= 298 > 285$$

Esistono A_1 e B_1 con stessa somma e $\neq \emptyset$

Se $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ ho finito

Altrimenti tolgo la parte comune.

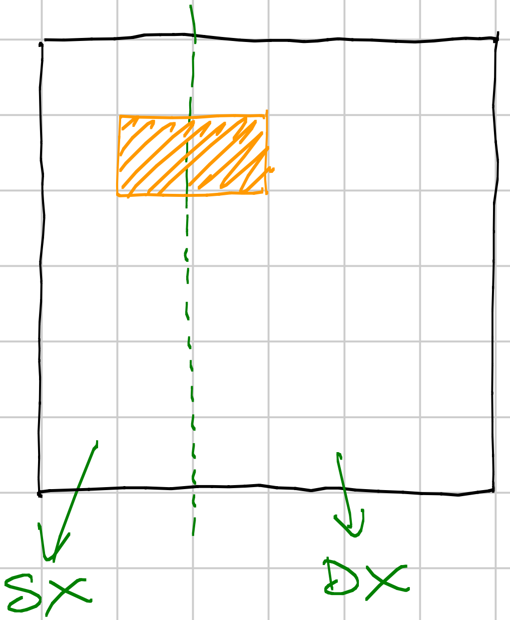
Osservo che non possono diventare vuoti, perché

avrebbe dovuto essere wlog $A_1 \subsetneq B_1$ impossibile perché stessa somma.

2 Scacchiera 6×6 con 18 pezzi 2×1 (piena)

Tesi: posso fare un taglio senza tagliare alcun pezzo

Oss. con 6×8 o con 8×8 c'è controesempio



Per assurdo: supponiamo che ogni taglio tagli anche una mattonella

Quanti i possibili tagli? 10

18 Mattonelle

Quindi (Pigeonhole) c'è un taglio che prende una sola mattonella

si tassellano "al loro interno" (ma hanno un # dispari di caselle)

$a \times b$ Possibili tagli : $a+b-2$

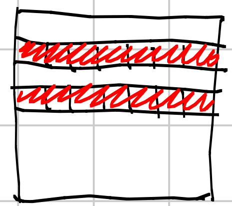
Pezzi $\frac{ab}{2}$

— o — o —

$\boxed{3}$ Scacchiera 2008×2008 con un po' di pedine

Scelgo in qualunque modo 2008 caselle (una x riga
(si può fare in 2008! modi) una x colonna)
e comunque le scelgo queste contengono <u>esatt</u> 2 pedine

Domanda: come sono messe le pedine?



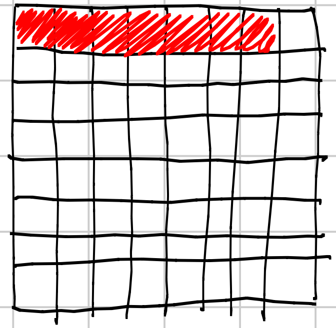
Risposta: scegliere 2 righe o 2 colonne
a caso e riempirle.

È chiaro che è suff. Bisogna dim. che è necessaria.

<u>Oss.</u> Sia l'ipotesi sia la tesi sono invarianti rispetto allo scambio di 2 righe o 2 colonne.

Cioè: se una scacchiera soddisfa l'Hp ogni altra scacchiera ottenuta scambiando 2 righe (o 2 colonne) verifica ancora l'Hp.

Iterando + volte l'operazione posso sistemare le pedine "in alto a sinistra"

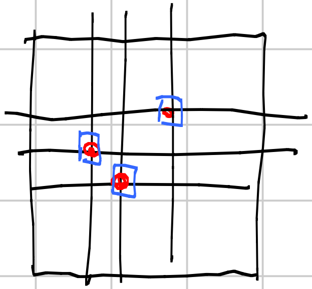


Nego la tesi: non è vero che esistono due righe o due colonne che contengono tutte le pedine

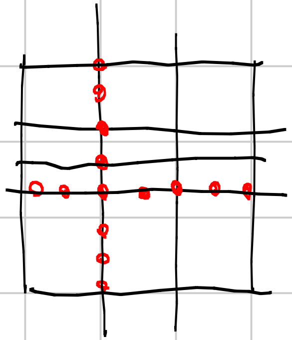
$$\left(\exists r_1, r_2 : P \subseteq r_1 \cup r_2\right) \vee \left(\exists c_1, c_2 : P \subseteq c_1 \cup c_2\right)$$

la nego: $\forall r_1, r_2 \quad P \notin r_1 \cup r_2 \quad \wedge \quad \forall c_1, c_2 \quad P \notin c_1 \cup c_2$

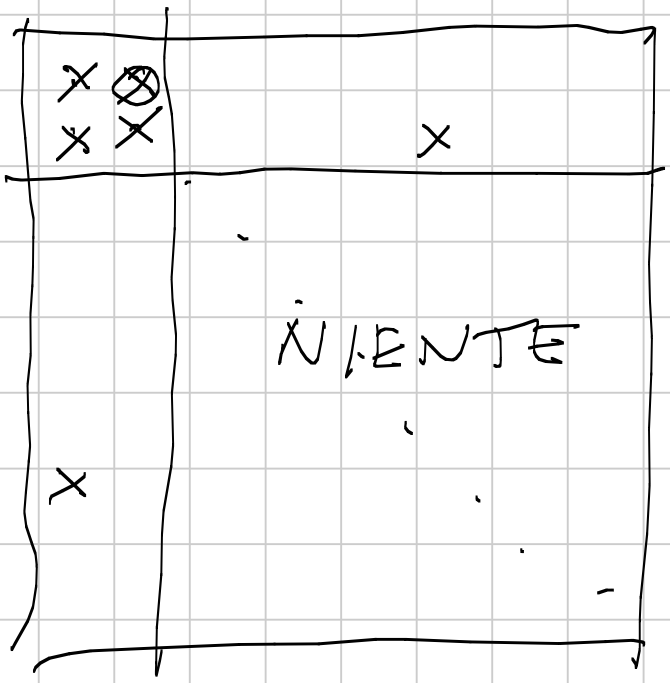
$\forall r_1, r_2 \quad \exists x \notin r_1 \cup r_2 \quad \wedge \quad \forall c_1, c_2 \quad \exists y \notin c_1 \cup c_2$



Se avessi tre pedine con righe e colonne tutte diverse avrei finito, perché potrei scegliere quelle caselle e completare con altre 2005



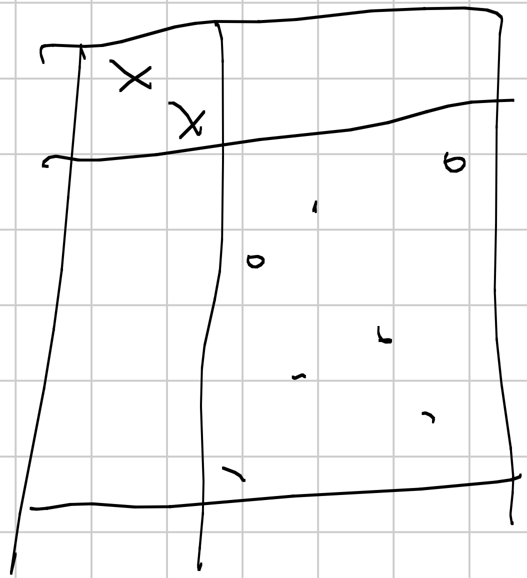
In tutto le pedine devono essere 4016 oppure prendo la casella centrale e completo...

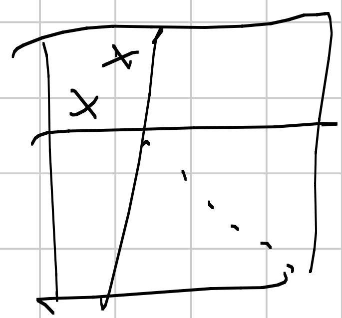


Assurdo (disegno)

Due pedine

Max → in alto a sinistra





④ $a_1, \dots, a_n$ interi $0 < a_i \leq i$ $i = 1, \dots, n$

$a_1 + \dots + a_n$ pari

Tesi $a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n = 0$ (scegliendo i segni)

$\boxed{\text{INDUZIONE PRIMA VERSIONE}}$ $n=2$ banale

Suppongo vero per n e provo a dim. per $n+1$

Caso facile: $a_{n+1} = a_n$. Li metto con segno diverso e mi riduco al caso $n-1$ purché

$a_1 + \dots + a_{n-1}$ sia pari

$$= \underbrace{a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}}_{\text{PARI}} \underbrace{-2a_n}_{a_n = a_{n+1}}$$

Caso un po' meno facile $\quad a_{n+1} \neq a_n$

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \underbrace{|a_{n+1} - a_n|}_{b_n}$$

Sono n numeri. $\quad 0 < a_i \leq i \quad i = 1, \dots, n-1$

$0 < b_n$ (sì perché $a_{n+1} \neq a_n$)

$b_n \leq n$ ("ho preso a_{n+1} e ho tolto almeno 1")

Distanza tra 2 numeri che stanno tra 1 e $n+1$

$|a_{n+1} - a_n|$ ha la stessa parità di $a_{n+1} - a_n$ e anche di $a_{n+1} + a_n$

quindi $\quad a_1 + \dots + a_{n-1} + |a_{n+1} - a_n|$ è pari

$a_1 + \dots + a_{n-1} + a_{n+1} + a_n$ PARI per ipotesi

$$a_1 \pm a_2 \pm \dots + a_{n-1} \pm |a_{n+1} - a_n| = 0$$

INDUZIONE SECONDA VERSIONE

IMPLICA CON $S=0$ la tesi originaria

Dimostro una tesi + forte, cioè

"Dati interi $a_1, \dots, a_n$ con $0 < a_i \leq i$ posso prendere i segni in modo che

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n = S$$

sia un qualunque intero $|S| \leq n+1$ e S ha la stessa parità di $a_1 + \dots + a_n$"

$\boxed{n=2}$ $\quad 1, 1 \quad\quad\quad 1, 2$

$\downarrow \quad\quad\quad \downarrow$

$S = 0, 2, -2 \quad\quad S = -3, -1, 1, 3$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Voglio ottenere una certa $0 \leq S \leq n+2$

↑ stessa parità di $a_1 + \dots + a_{n+1}$

Se con i primi n riesco ad ottenere $S - a_{n+1}$ ho finito

$$\underbrace{\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n}_{S - a_{n+1}} + a_{n+1} = S$$

Per ipotesi induttiva mi serve che $|S - a_{n+1}| \leq n+1$ (1)

e che $S - a_{n+1}$ abbia la stessa parità di $a_1 + \dots + a_n$ (2)

$$S - a_{n+1} \equiv a_1 + \dots + a_{n+1} - a_{n+1} = a_1 + \dots + a_n$$

$S - a_{n+1} \leq n+1$ infatti $S - a_{n+1} \leq n+2 - 1 = n+1$

almeno 1 tolgo

$S - a_{n+1} \geq -n-1$

$S \geq 0$

$-a_{n+1} \geq -(n+1)$

FINE □