PreIMO 2008 – Combinatoria – Pom

Titolo nota 22/05/2008

$\boxed{5}$ Grafo con almeno un vertice con # dispari di lati.

Tesi: si possono colorare i lati in R e B in modo che

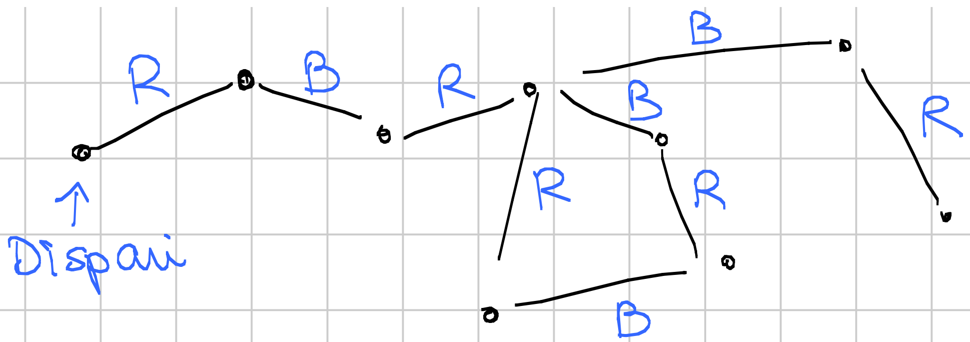
$$|r(v) - b(v)| \leq 1 \quad \forall \text{ vertice } V$$

Rossi uscenti

Blu Uscenti

Fatto generale: i vertici dai cui partono # dispari di lati sono pari

Idea: parto dal "vertice dispari" e costruisco un cammino che coloro alternativamente R e B



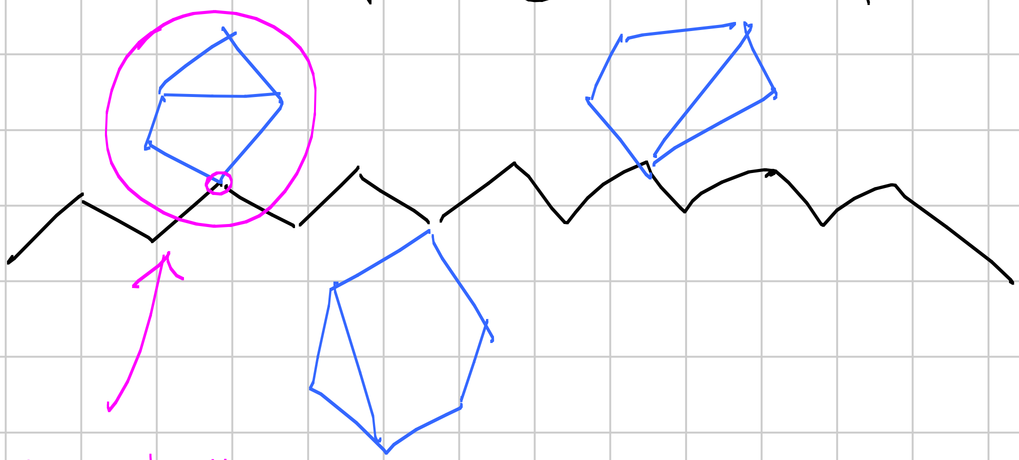
Quando finisce il cammino? Quando non si può più continuare!

Quando sono finito in un punto di cui ho già esaurito i lati. Questo è per FORZA un vertice dispari.

"Elimino" tutti i lati già colorati.

All'inizio prendiamo "il" cammino MASSIMALE (di lunghezza max).
Se ha esaurito i lati → FINE
Se non ha esaurito i lati, quando lo tolgo restano varie componenti connesse, ciascuna delle quali ha

un vertice dispari (su cui ripeto la costruzione)



se ha tutti i
vertici pari, c'è un cammino ciclico che lo visita

Usandolo allungherei il cammino che era massimale

— o — o —

Alternativa: se ho + di 2 vertici dispari (ad es. 4) ne unisco 2 artificialmente. Coloro il grafo aggiunto, poi elimino il lato aggiunto (o i lati aggiunti)

$\boxed{6}$ Matrice $a_{ij} \in \{+1,-1\}$ pari $\times$ pari

$= A$

R_i = prodotto el. riga i

C_j = " " colonna j

$F(A) = B = b_{ij}$

$G(A) = D = d_{ij}$

$b_{ij} = R_i C_j$ $\qquad$ $d_{ij} = R_i C_j a_{ij}$

Immagine F , Immagine G

(1) G è surgettiva. Conseguenza di $G(G(A)) = A$ per ogni A.

$G(D) = A$ $\qquad$ $G(D) = e_{ij} = d_{ij} \overline{R_i} \, \overline{C_j}$ ← colonna j-esima di D

↑ riga i-esima di D

$$\overline{R_i} = \prod_{j=1}^{2m} d_{ij} = \prod_{j=1}^{2m} R_i C_j a_{ij} = (R_i)^{2m} \cdot \prod_{j=1}^{2m} C_j \cdot \prod_{j=1}^{2m} a_{ij}$$

$$= (R_i)^{2m} \cdot \prod \cdot R_i$$

prodotto tutta matrice iniziale

$$\overline{C_j} = (C_j)^{2m} \cdot \prod \cdot C_j$$

$$e_{ij} = d_{ij} \cdot \overline{R_i} \cdot \overline{C_j} = R_i C_j a_{ij} (R_i)^{2m} \prod \cdot R_i (C_j)^{2m} \prod C_j$$

$$= a_{ij}$$

2

$$b_{ij} = R_i C_j$$

$$\frac{b_{i+1,j}}{b_{i,j}} = \frac{R_{i+1}\cancel{C_j}}{R_i\cancel{C_j}}$$ NON DIPENDE DA J

Ogni riga è uguale o opposta rispetto alla precedente,

Quindi tutta la matrice B è determinata dalla 1ª riga e dalla 1ª colonna.

Quindi in apparenza ho $2m+2n-1$ parametri.

$$\begin{bmatrix} + & + & + & - & - & + \\ + & & & & & \\ - & & & & & \\ + & & & & & \\ - & & & & & \\ + & & & & & \end{bmatrix}$$

NO!

$$\overline{R}_i = \prod_{j=1}^{2m} b_{ij} = \prod_{j=1}^{2m} R_i C_j = (R_i)^{2m} \prod_{j=1}^{2m} C_j = \prod$$

$$\overline{C}_j = \quad \ldots \quad = \prod$$

Quindi tutti i prodotti di riga o colonna sono uguali

$$
\begin{array}{ccccccccc}
c_j \rightarrow & + & + & + & - & - & + & & \\
 & + & + & + & - & - & + & \rightarrow + & R_1 = + \\
 & + & + & + & - & - & + & \rightarrow + & R_2 = + \\
B = & - & - & - & + & + & - & \rightarrow + & R_3 = - \\
 & + & + & + & - & - & + & \rightarrow + & R_4 = + \\
 & - & - & - & + & + & - & \rightarrow + & R_5 = - \\
 & + & + & + & - & - & - & & R_6 = +
\end{array}
$$

Non sono libero di scegliere l'ultima riga

Quindi $2m + 2n - 2$ gradi di libertà

Problema: definire questo →

$$
\begin{array}{cccccc}
+ & + & + & - & - & + \\
+ & + & + & + & + & + \\
- & + & + & + & + & + \\
+ & + & + & + & + & + \\
- & + & + & + & + & + \\
+ & + & + & + & + & +
\end{array}
$$

$\boxed{8}$ Dati 2 interi i e j cerco $a_{i,j}$ t.c.

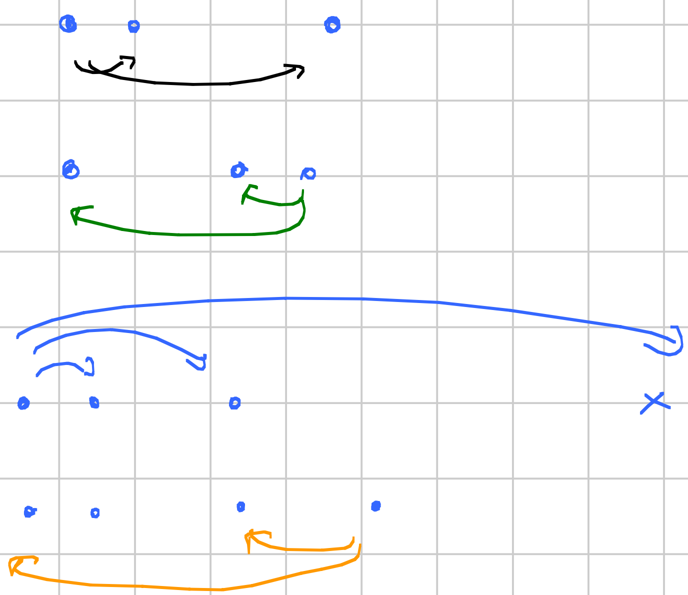
se $|X| = a_{i,j}$ allora posso fare una successione di $i+2$ ↗ con la proprietà richiesta

oppure una successione di $j+2$ ↘

<u>Tesi</u> $a_{n,n} = \binom{2n}{n} + 1$

$a_{1,1} = 3$

$a_{2,1} =$ ↗ 4 ↗
↘ 3 ↘

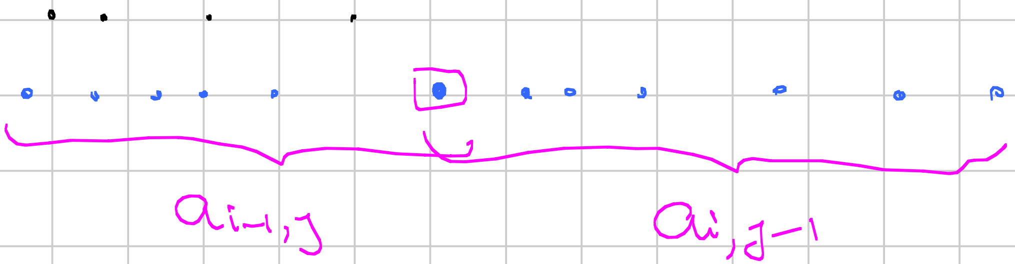


$a_{2,1} = 4$

$a_{k,1} = k+2$ $\qquad$ $a_{1,k} = k+2$

$a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1} - 1$

Questa formula permette di ricavare tutti gli $a_{i,j}$ conoscendo $a_{1,k}$ e $a_{k,1}$



Se nel primo tratto ho $j+2$ ↘ FINE

Se nel secondo tratto ho $i+2$ ↗ FINE

Sfortuna: nel 1° tratto ho $i+1$ ↗ Provo ad aggiungere il + grande e arrivare a $i+2$

nel 2° tratto ho $j+1$ ↘ Provo ad agg. il + piccolo

Una delle 2 riesco a completarla. FINE

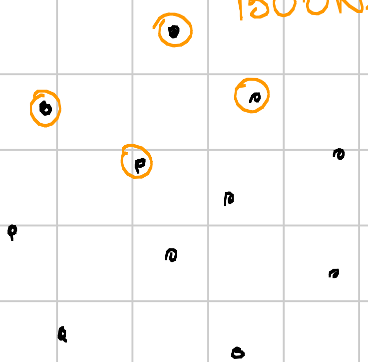
Dalla formula si ottiene per induzione che

$$\binom{i+j}{i} + 1 = a_{i,j}$$

— o — o —

$\boxed{7}$ n punti

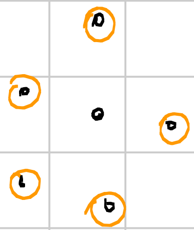
BUONO



n punti

Cattivi 1ª specie

vertici di poligoni convessi con altri p.ti dentro



Cattivi 2ª specie

vertici di poligoni non convessi con / senza p.ti dentro

$$f(x) = \sum_{i=3}^{n} (-1)^i c_i$$

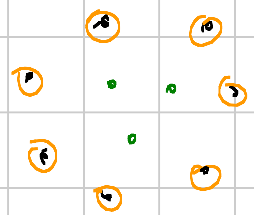
Un cattivo di prima specie (con k vertici) cosa cambia nella formula

toglie 1 a C_k

toglie 3 a C_{k+1}

toglie 3 a C_{k+2}

toglie 1 a C_{k+3}



Se avessi h p.ti dentro

-1 su C_k

$-\binom{h}{1}$ su C_{k+1}

$-\binom{h}{2}$ su C_{k+2} ...

$$\sum_{k=3}^{n} (-1)^k$$

$\{v_1,\dots,v_k\} \subseteq X$

Relazione di equivalenza fra sottoinsiemi

$A \sim B$ se hanno lo stesso inviluppo convesso.

$+$ punti interni

$\{v_1,\dots,v_m\} \cup$ alcuni fra i t punti.

$$\sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (-1)^{m+j} = (-1)^m \sum (-1)^j \binom{t}{j}$$

BUONO	$t=0$	1	$= (1-1)^t$
CATTIVO	$t>0$	0	