PREIMO 2008

Titolo nota 19/05/2008

1. n^2-4 ha 10 divisori. Possibile? NO

Quali numeri hanno esatt. 10 divisori? $\to p^9$
$\to p^4 q$

$n^2-4=p^9$ $\quad (n+2)(n-2)=p^9$, con $n+2=p^a$, $n-2=p^b$ $\quad a+b=9 \quad a>b$

$(n+2)-(n-2)=4=p^a-p^b=p^b(p^{a-b}-1)$

$\rightsquigarrow p\mid 4$ (NON SUBITO perché potrebbe essere $b=0$)

$b=0$ si tratta a parte
$b>0$ $\quad p\mid 4 \to p=2$ e non funziona (sostituire!!!)

$n^2-4=p^4q$ $\qquad$ $(n+2)(n-2)=p^4q$

$p^4q \qquad 1 \qquad \rightarrow$ FACILE

Se p sta un pó e un pó $\rightsquigarrow$ come prima $p=2$

$(n+2)(n-2)=16\,q$ $\rightarrow$ q può stare solo in uno dei 2 fattori, e per l'altro solo numero finito di possibilità

Oppure: il 16 può dividersi solo in 4 e 4, quindi
$n+2=4$ oppure $n-2=4$

$\boxed{\begin{array}{c} q=p^4+4 \\ \text{poi mod5} \end{array}}$
ALTERNATIVA

Restano 2 casi

$\begin{cases} n+2=p^4 \\ n-2=q \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} n+2=q \\ n-2=p^4 \end{cases}$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$n=p^4-2$ $\qquad$ $n=p^4+2$

$\downarrow$

$n-2=p^4-4$ che $\boxed{\text{si scompone}}$

$n+2=p^4+4-4p^2+4p^2$
$=(p^2+2)^2-4p^2$
$=\square-\square$ anche qui

occhio che i fattori non siano $=1$

$\boxed{2}$ k = primi $\leq n$

$a_1, \dots, a_{k+1}$ interi positivi tali che ognuno <u>NON</u> divide il prodotto degli altri

<u>Tesi</u>: almeno un $a_i > n$

<u>Tesi vera</u>: almeno un a_i ha un fattore primo $> n$

a_1 non divide il prodotto degli altri se esiste un suo fattore primo (diciamo p_1) ha esponente > della somma degli esponenti con cui compare negli altri

$v_p(a_1)$ = esponente di p_1 in a_1

$$v_{p_1}(a_1) > v_{p_1}(a_2) + \dots + v_{p_1}(a_{k+1})$$

Analog. $$v_{p_i}(a_i) > \sum_{j=1,\dots,k+1,\ j\neq i} v_{p_i}(a_j)$$

I primi che posso utilizzare sono al + k

Quindi un certo q viene utilizzato 2 volte, wlog in a_1 e a_2

$$v_q(a_1) > v_q(a_2) + \dots + v_q(a_{k+1}) \quad \leftarrow \text{Manca } a_1$$
$$v_q(a_2) > v_q(a_1) + \dots + v_q(a_{k+1}) \quad \leftarrow \text{Manca } a_2$$

Sommando $\rightsquigarrow$ assurdo

— o — o —

3 $a^2-b \mid b^2+a$ e $b^2-a \mid a^2+b$ a,b interi positivi

$\boxed{\text{wlog } a \geq b \text{ se serve}}$ MA NON SERVE, anzi farò wlog q.c. altro

idea: se dividere vuol dire essere uguali $\rightsquigarrow$ si fa CASO 1
se non c'è uguaglianza, allora quello che viene CASO 2
diviso è almeno il doppio del divisore

$\boxed{\text{Caso 1}}$ wlog $a^2-b = b^2+a$

$a^2-b^2-a-b=0 \qquad (a+b)(a-b)-(a+b)=0$

$\underbrace{\cancel{(a+b)}}_{\neq 0}(a-b-1)=0 \qquad a=b+1 \to$ deve essere

$(b^2-a) \mid (a^2+b)$

$(b^2-b-1) \mid (b^2+3b+1)$

In generale quando si ha $\dfrac{P(b)}{Q(b)}$ conviene dividere

$$\frac{b^2+3b+1}{b^2-b-1} = \frac{b^2-b-1+4b+2}{b^2-b-1} = 1+\underbrace{\boxed{\frac{4b+2}{b^2-b-1}}}_{\text{INTERO}}$$

$\to$ Num $\geq$ Denom e ci si riduce a un numero finito di casi

(si trova $b=1,\ a=2$)
$b=2,\ a=3$ e simmetriche

$\boxed{\text{CASO 2}}$

$$b^2+a \geq 2(a^2-b)$$
$$a^2+b \geq 2(b^2-a) \qquad \text{sommo}$$

$$a^2+b^2+a+b \geq 2a^2+2b^2-2a-2b$$

$$a^2+b^2 \leq 3(a+b)$$

$$(a+b)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{AM-QM} \\ (\text{o C.S.})}}{\leq} 2(a^2+b^2) \leq 6(a+b)$$

$$(a+b)^{\cancel{2}} \leq 6\,\cancel{(a+b)}$$

$a+b \leq 6$ e sono pochi casi

$a=1,2,3,4,5,6$

(conviene WLOG $a \geq b$)

④ $pq \mid p^p + q^q + 1$ $\qquad p, q$ primi

Guardo p $\qquad p^p + q^q + 1 \equiv 0 \quad (p)$ ← Hp + debole

$$q^q + 1 \equiv 0 \quad (p)$$

$$q^q \equiv -1 \quad (p)$$

$$q^{2q} \equiv 1 \quad (p)$$

$\mathrm{ord}_p(q) \mid (2q) \Rightarrow \mathrm{ord}_p(q) =$
- 1 ← CASO 1
- 2 ← CASO 2
- q ← CASO 3
- $2q$ ← CASO 4

$\mathrm{ord}_p(q) \mid (p-1)$

Trattiamo separatamente $p=2$ (quindi anche $q=2$)

$(2q) \mid q^q + 5 \qquad q^q + 5 \equiv 0 \quad (q) \qquad 5 \equiv 0 \quad (q) \qquad q = 5 \ldots$

$\boxed{1}$ $\mathrm{ord}_p(q) = 1 \implies q \equiv 1 \quad (p) \implies q^q \equiv 1 \quad (p)$

ma invece $q^q \equiv -1 \quad (p)$ (FINE PERCHÈ $p \neq 2$)

$\boxed{3}$ $\mathrm{ord}_p(q) = q \implies q^q \equiv 1 \quad (p) \implies$ ASSURDO COME SOPRA

$\boxed{2}$ $\mathrm{ord}_p(q) = 2 \implies q \equiv -1 \quad (p)$

$\boxed{4}$ $\mathrm{ord}_p(q) = 2q \implies 2q \mid (p-1) \implies p \equiv 1 \quad (q)$

perchè $\mathrm{ord}_p(q) \mid p-1$

$$\Downarrow$$

$$p^p + q^q + 1 \equiv 2 \quad (q)$$
$$\equiv 0 \quad (q)$$

$$\Downarrow$$

FINE $(q \neq 2)$

Resta aperto il caso in cui siamo in $\boxed{2}$ sia con p, sia con q

$q \equiv -1 \quad (p)$ e $p \equiv -1 \quad (q)$

$$q \equiv -1 \ (p) \implies \underbrace{q = kp - 1}$$

$$\underbrace{p \equiv -1 \ (q) \qquad p = hq - 1}$$

$$q = k(hq-1) - 1 = khq - k - 1$$

$$\underbrace{q(kh-1)}_{\text{troppo grande}} > k+1$$

$$q(kh-1) \geq 3kh - 3 \geq 3k - 3 \underset{\text{quasi sempre}}{\geq} k+1$$

quasi sempre $\begin{pmatrix} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{pmatrix}$

Altrimenti $p \leq q$ e $p \equiv -1 \ (q)$

$$\Downarrow$$

$p = q-1$ e si chiude.