PRE-IMO 2009

ALGEBRA
MATTINA

Titolo nota 25/05/2009

① $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $\quad n\geq 2$ $\quad$ coeff interi

a_0 primo , $\quad |a_0|>|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$

TS Non esistono $q(x)$, $r(x)$ a coeff interi t.c.

$p(x)=q(x)r(x)$ $\quad$ deg q, deg $r\geq 1$

RPA wlog $\quad q(0)=\pm a_0$ $\quad r(0)=\pm 1$

Se α è una radice complessa di p t.c. $|\alpha|\leq 1$

$$|0|=|p(\alpha)|=\left|\sum_k a_k\alpha^k\right|\leq\sum_k|a_k\alpha^k|$$

$$a_0=-a_n\alpha^n-a_{n-1}\alpha^{n-1}-\dots-a_1\alpha$$

$$|a_0|=|-a_n\alpha\ \dots\ -a_1\alpha|\leq|a_n||\alpha|^n+\dots+|a_1||\alpha|^1$$

$$\leq|a_n|+\dots+|a_1| \qquad ⨳$$

$$|r(0)|=1=\overset{\overset{1}{\underline{\wedge}}}{|r_k|}\,\overset{\overset{1}{\wedge}}{|\beta_1|}\dots\overset{\overset{1}{\wedge}}{|\beta_k|}>1 \qquad ⨳$$

$r(x)=r_k x^k+\dots\pm 1$

$\beta_1\dots\beta_k$

$r_k\in\mathbb{Z}$ $\qquad |r_k|\geq 1$

② $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Z}$

i $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

ii $(x+1)\, f(x-1) = x\, f(x)$ $\quad x > 1$

★ $\mathbb{Q}^+ \ni q = \frac{a}{b}$ $\quad (a,b) = 1$ allora $f(q) = a+b$

$$\text{LHS} = \frac{a}{b}+1 \cdot f\left(\frac{a}{b}-1\right) = \frac{a+b}{b} \cdot f\left(\frac{a-b}{b}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{a+b}{b} \cdot a$$

perchè?

$$\text{RHS} = \frac{a}{b} f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}(a+b)$$

★ Anche kf con $k \in \mathbb{Z}$ è soluzione

★ Faccio vedere che se conosco $f(1)$, allora $f(q)$ può essere determinata usando i. ii. un certo numero di volte.

Per induzione su $a+b$

a) $a+b = 2$ ✓

b) se so determinare $f\left(\frac{c}{d}\right)$ $\forall\, c+d < a+b$ allora calcolo $f\left(\frac{a}{b}\right)$

$a > b$ $\quad \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad c+d = a < a+b$

so $f\left(\frac{c}{d}\right) = f\left(\frac{a}{b}-1\right)$ con la ii trovo $f\left(\frac{a}{b}\right)$

$a < b$ $\quad f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{b}{a}\right)$ e finisco

---

$$(n+1)\, f(n-1) = n\, f(n)$$

$$\Rightarrow \quad n+1 \mid n \cdot f(n) \qquad (n, n+1) = 1$$

$$n+1 \mid f(n)$$

$$f(n) = (n+1)\,\frac{f(1)}{2}$$

(non è necessario
ma si fa
per INDU)

$$x = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{\cancel{b}}\, f\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \frac{a}{\cancel{b}}\, f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$(a+b) \mid a\, f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$(a, b) = 1$$

$$(a+b, a) = 1$$

$$a+b \mid f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$g\left(\frac{a}{b}\right) : \frac{f(a/b)}{a+b}$$

i) $g\left(\frac{a}{b}\right) = g(b/a)$

ii) $g\left(\frac{a}{b}-1\right) = g\left(\frac{a}{b}\right)$

$$g = \text{costante} = \boxed{\frac{f(1)}{2}}$$

✯ Escludo $f(1)$ dispari : $x=2$ nelle ii

$$3f(1) = 2f(2) \quad ✗$$

③ $x_n \le x_{n-1} \le \dots \le x_1 \in \mathbb{R}$ $\sum x_i = 0$

$$x_1^2+\dots+x_n^2 + n x_1 x_n \le 0$$

Stimare $x_i^2 + x_1 x_n = (x_i - x_1)(x_i - x_n) + x_i(x_1+x_n)$

$$\sum_i (x_i^2 + x_1 x_n) = \underbrace{\sum_i \underbrace{\underset{\le 0}{(x_i - x_1)}\underset{\ge 0}{(x_i - x_n)}}_{\le 0}}_{\le 0} + (x_1 + x_n)\underset{\underset{0}{\|}}{\sum_i x_i} \le 0$$

x_1, x_i $a \le b$ $ac+bd \ge ad+bc$

x_i, x_n $c \le d$

$$x_i^2 + x_1 x_n \le x_1 x_i + x_n x_i$$ anche per riarrangiamento

modo bovino $x_1^2 + \dots + x_n^2$

$x_1, \dots, x_k$ positivi (≥ 0) $y_1, \dots, y_\ell$ positivi (≥ 0)

$$\sum x_i = \sum y_\ell = S \qquad \begin{matrix} M = \max\{x_i\} \\ N = \max\{y_i\} \end{matrix}$$

$$\sum x_i^2 + \sum y_i^2 \leq (k+\ell) MN$$

RHS dipende da meno variabili

Fissati k, ℓ, M, N, S, quanto vale al max il LHS?

Più semplicemente: fissati M ed S, quanto vale al max $x_1^2 + \dots + x_k^2$ sapendo che $x_1 + \dots + x_k = S$

$\max\{x_1, \dots, x_k\} = M$

... convessità ... si vede che devo prendere gli $x_i = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow M \end{matrix}$

(tutti tranne 1 che aggiusta la somma)

Quanti sono gli $x_i = M$. Sono $\left\lfloor \frac{S}{M} \right\rfloor$. Ovviamente $k \geq \left\lceil \frac{S}{M} \right\rceil$

--- $x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq MS$ (bisogna fare il conto)

$$\begin{aligned} x_1^2 + \dots + x_k^2 + y_1^2 + \dots + y_\ell^2 &\leq MS + NS \\ &= MN\left(\frac{S}{M} + \frac{S}{N}\right) \\ &\leq MN\left(\left\lceil \frac{S}{M} \right\rceil + \left\lceil \frac{S}{N} \right\rceil\right) \\ &\leq MN(k+\ell) \end{aligned}$$

④ $f(k^2, a_1, a_2, \dots a_5) = \frac{1}{k^2}$ $\quad k = 1, 2, \dots, 5$

$f(6^2, a_1, \dots, a_5)$

$p(x) = x^2 - x$ $\quad x = 1, 2, 3$

$p(x) - x^2 + x = q(x)$ $\quad$ 1, 2, 3 sono radici

$$p(x) = \left(f(x, \dots) - \frac{1}{x}\right)(x+1)(x+2)\dots(x+5)\,x$$

$$= \left(\frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \dots + \frac{a_5}{x+5} - \frac{1}{x}\right)(x+1)(x+2)\dots(x+5)\,x$$

deg $p = 5$ $\quad$ con radici $1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$

$$p(x) = \underset{\uparrow}{b_5} x^5 + \dots = b_5(x-1)(x-2^2)\dots(x-5^2)$$

$$= \left(\frac{a_1 x}{x+1} + \dots + \frac{a_5 x}{x+5} - 1\right)(x+1)\dots(x+5)$$

$$p(0) = -5! = b_5 \cdot (-1)(-2^2)\dots(-5^2)$$

$$b_5 = \dots$$

$$p(6^2) = b_5 \cdot (6^2-1)(6^2-2^2)\dots(6^2-5^2)$$

$$f(6^2, \dots) = p(6^2) \cdot \frac{1}{6^2+1} \cdot \frac{1}{6^2+2^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{6^2+5^2} \cdot \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2}$$