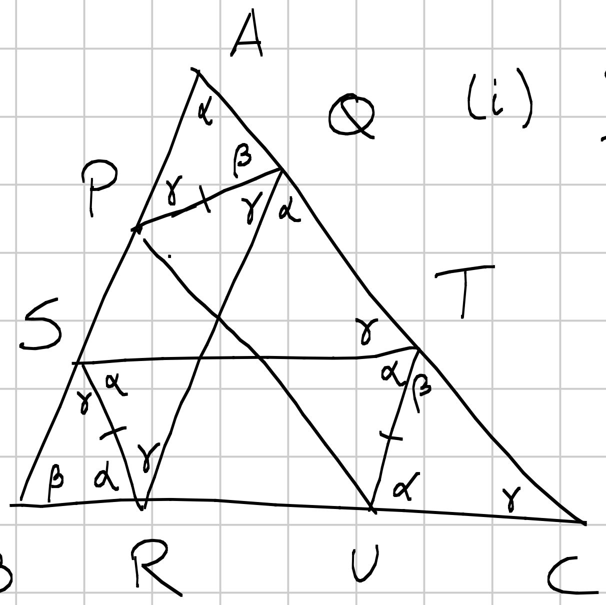
PRE IMO 2009 - GEOMETRIA - Pomeriggio

Titolo nota 26/05/2009

Problema 5



(i) PQ, TU, SR } antiparallele

QR, ST } parallele

⇓

PU parallele

PQRS, STUR } Trap. isoscele

⇓

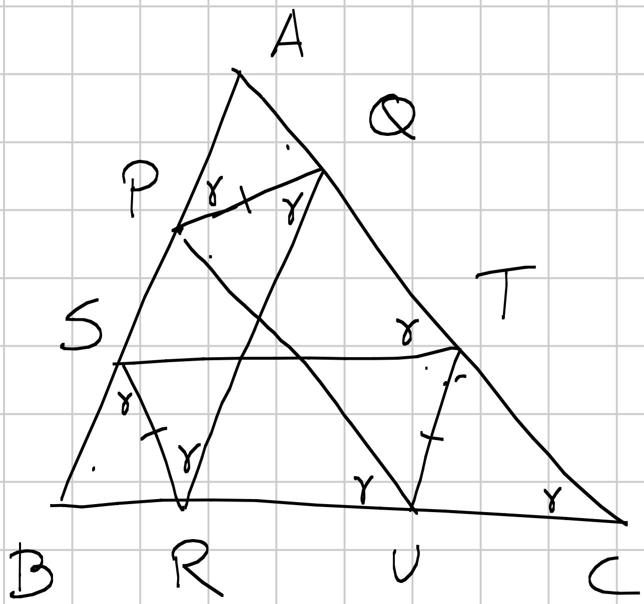
$PQ = SR = TU$

$P\hat{Q}T = U\hat{T}Q$

} ⇒ PUTQ Trap isoscele

⇒ $PU \parallel QT$ ⇒ $PU \parallel AC$

(ii)



PQRU ciclico

QTUR ciclico

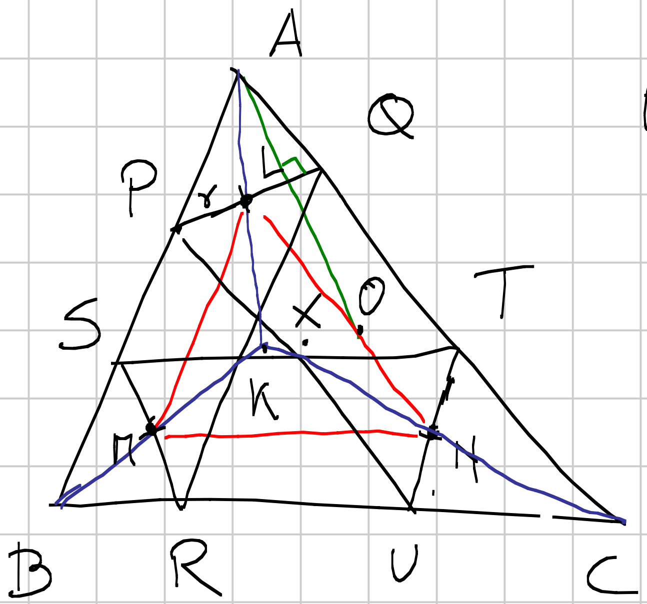
PSRQ ciclico

PSRU ciclico

⋮ ciclico

⇒ PQRSTU ciclico.

(iii)



Le simmediane bisecano le antiparallele

L, M, N pt. medi di PQ, RS, TU

$\Downarrow$

AL, BM, CN simm.

Il Triangolo LMN è ottenuto da ABC con un'omotetia di centro K.

Ovvero $\frac{AK}{AL} = \frac{BK}{BM} = \frac{CK}{CN}$ (Talete su ABK con trasv. LM)

(⋮)

$\Rightarrow$ il circocentro di LMN sia $\stackrel{X}{\checkmark}$ sul segmento OK.

Se $XL \perp PQ$ (e $XM \perp RS$, $XN \perp TU$)

ho finito: X è circocentro di $PQRSTU$

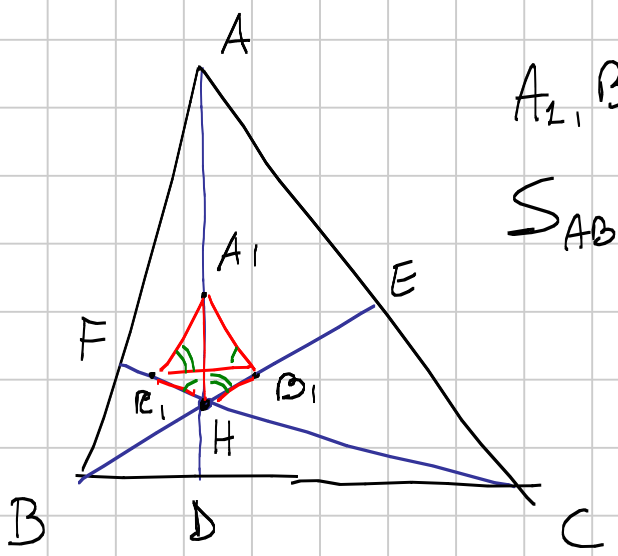
$$XP = \sqrt{XL^2 + LP^2} = \sqrt{XL^2 + LQ^2} = \sqrt{XM^2 + MR^2} = \ldots$$

$$\phantom{XP = \sqrt{XL^2 + LP^2} = } \underset{XQ}{\parallel} \qquad\qquad \underset{XR}{\parallel}$$

Osservo che $XL \perp PQ \Leftrightarrow OA \perp PQ$

$\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad \widehat{APQ} = \gamma \Rightarrow OA \perp PQ$. $\square$

Problema 6



A_1, B_1, C_1 sulle altezze t.c.

$$S_{ABC_1} + S_{AB_1C} + S_{A_1BC} = S_{ABC}$$

$$\Downarrow$$

A_1, B_1, C_1, H ciclico

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dis. di Tolomeo} \\ A, B, C, D \quad \text{(a 3 a 3 non allineati)} \\ AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD \\ \text{Vale } = \text{ se e solo se } ABCD \text{ è ciclico} \end{array}}$$

$$\frac{S_{A_1BC}}{S_{ABC}} = \frac{A_1D}{AD} \qquad \frac{S_{AB_1C}}{S_{ABC}} = \frac{B_1E}{BE} \qquad \frac{S_{ABC_1}}{S_{ABC}} = \frac{C_1F}{CF}$$

$$\frac{A_1D}{AD} + \frac{B_1E}{BE} + \frac{C_1F}{CF} = 1$$

$$\frac{A_1H}{AD} = \frac{A_1D}{AD} - \frac{DH}{AD} = \frac{S_{A_1BC}}{S_{ABC}} - \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$$

$$\frac{B_1H}{BE} = \frac{B_1E}{BE} - \frac{EH}{BE} = \frac{S_{AB_1C}}{S_{ABC}} - \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$$

$$\frac{C_1H}{CF} = \frac{C_1F}{CF} - \frac{FH}{CF} = \frac{S_{ABC_1}}{S_{ABC}} - \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

A_1B_1, C_1A_1, C_1B_1 si calcolano con Carnot.

Si sostituisce e si verifica.

<u>Meglio fare i conti in $\mathbb{C}$</u>

$a, b, c \qquad a_1, b_1, c_1 \qquad h = a+b+c$ (se ad esempio l'origine è il circocentro)

$$\frac{|a_1 - d|}{|a-d|} = \frac{a_1 - d}{a-d} = 1 - \frac{a - a_1}{a-d}$$

$$\frac{(a_1 - c_1)(b_1 - h)}{(a_1 - h)(b_1 - c_1)} \in \mathbb{R}$$

$$\cancel{1} - \frac{a-a_1}{a-d} + 1 - \frac{b-b_1}{b-e} + 1 - \frac{c-c_1}{c-f} = \cancel{1}$$

<u>Terza via</u>

Se $A_1B_1C_1H$ è ciclico, vale

$$A_1H \cdot B_1C_1 = A_1B_1 \cdot HC_1 + A_1C_1 \cdot HB_1$$

e anche $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ simile ad $A\overset{\Delta}{B}C$

$$A_1H \cdot \frac{BC}{\cancel{2}} = \frac{AB}{\cancel{2}} \cdot HC_1 + \frac{AC}{\cancel{2}} HB_1$$

$$S_{A_1BHC} = S_{AHBC_1} + S_{AHCB_1}$$

$$S_{A_1BC} - S_{HBC} = S_{AHB} - S_{AC_1B} + S_{AHC} - S_{ABC}$$

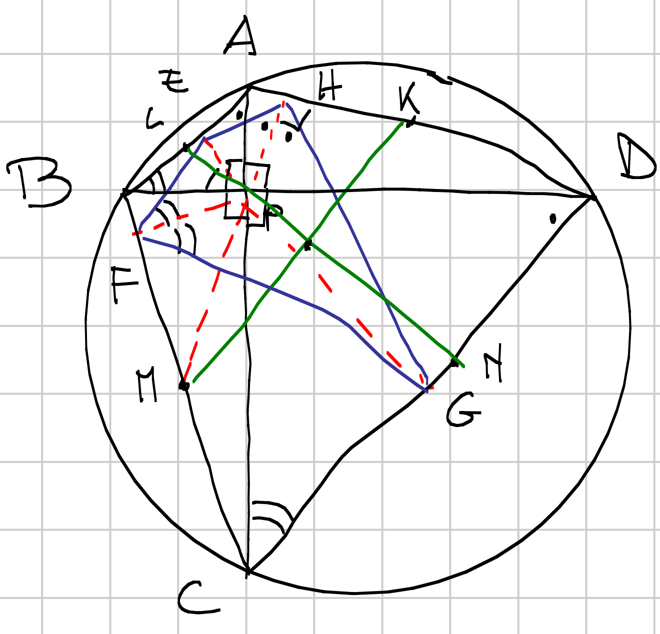
$$S_{A_1BC} + S_{AB_1C} + S_{ABC_1} = S_{HBC} + S_{AHC} + S_{AHB} = S_{ABC}$$

Fissiamo A_1, B_1 e supponiamo che X sia l'unico punto che soddisfa l'ip. sulle aree e che Y sia l'unico punto che soddisfa la ciclicità.

$\Rightarrow$ Y soddisfa anche l'ip. sulle aree $\Rightarrow Y = X$.

Problema 7

a) EFGH è ciclico



$EP \perp AB$
$FP \perp BC$
$PG \perp CD$
$PH \perp AD$

$\Downarrow$

$EPHA$, $EPFB$, $FPGC$, $GPHD$ ciclici

$\Rightarrow \quad P\hat{F}E = P\hat{B}E = P\hat{C}D = P\hat{F}G \Rightarrow FP$ bisettrice

$P\hat{B}A + P\hat{A}B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow E\hat{F}G + E\hat{H}G = \pi \quad \Rightarrow$ ok.

(d) FP, EP, GP, HP bisettrici $\Rightarrow P$ incentro $\Rightarrow EFGH$ circoscrittibile

(b) $KLMN$ è rettangolo

EP, FP, GP, HP intersecano i lati opposti in N, K, L, M

$\Rightarrow H$ vede MK sotto un angolo di $\frac{\pi}{2}$

e similmente F

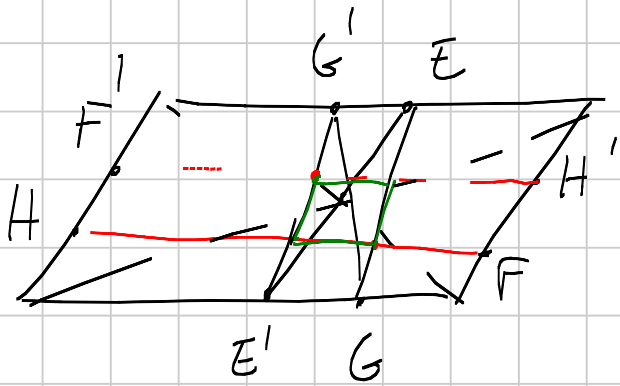
come E, G vedono LN sotto un ang. di $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow EFGHKLMN$ sono conciclici

(c) Il centro è $KM \cap LN$ che è pt medio fra i pt medi delle diag. di $ABCD$

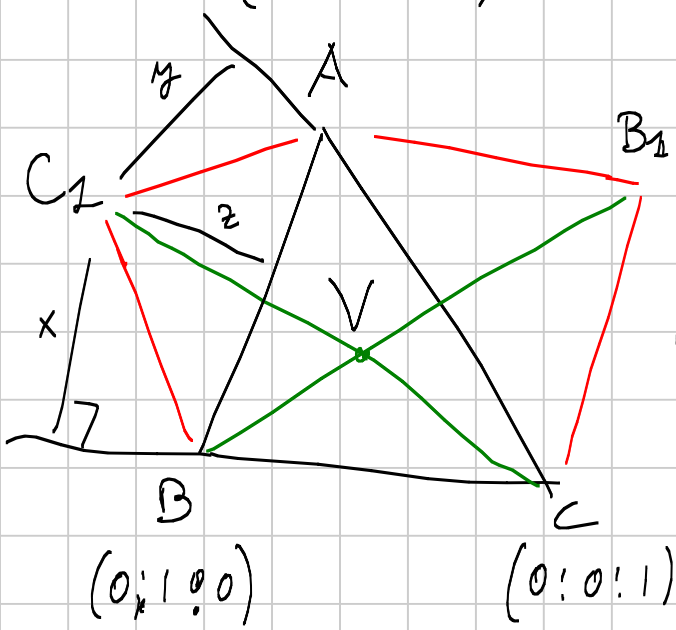
(e) <u>Lemma</u>: in un quadrilatero $ABCD$, dati E, F, G, H sui lati, $P = AC \cap BD$, siano E', F', G', H' sui lati opposti a E, F, G, H tali che EE', FF', GG', HH' si incontrano in P.

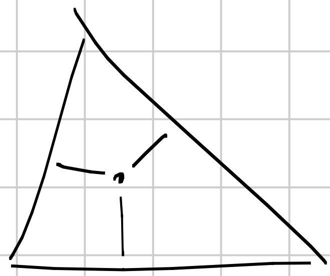
Allora P, $EG \cap FH$, $E'G' \cap F'H'$ sono allineati



Problema 8

$$L = (a : b : c)$$





$$\left(\operatorname{sen}\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) : \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) : -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = C_1$$

$$(\qquad\qquad) = B_1$$

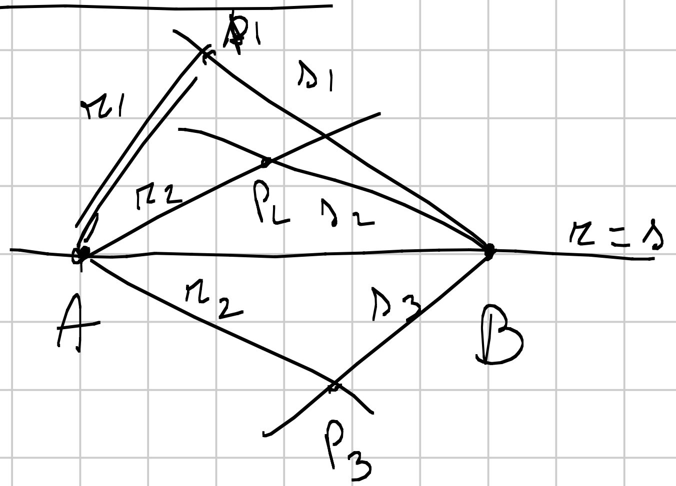
$$V = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} : \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)} : \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

stessi conti

$$V' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)} : \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)} : \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\gamma-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ \dfrac{1}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} & \dfrac{1}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)} & \dfrac{1}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)} \\ \dfrac{1}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)} & \dfrac{1}{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)} & \dfrac{1}{\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{4}\right)} \end{pmatrix} = \dots = 0$$

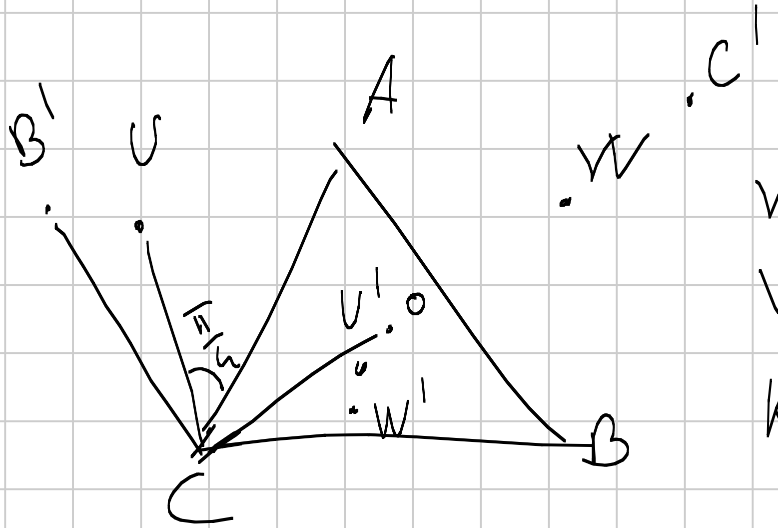
Idea sintetica



P_1, P_2, P_3 sono allineati

$$\Updownarrow$$

$$(r, r_1, r_2, r_3) = (s, s_1, s_2, s_3)$$



$V = BU \cap CW$

$V' = BU' \cap CW'$

$K = BB' \cap CC'$

Voglio $(BU, BU', BB', BC) = (CW, CW', CC', CB)$