TEORIA DEI NUMERI - MATTINO

Titolo nota 28/05/2009

① $x^{9002} + 9002! = 21^y \qquad x, y \in \mathbb{Z}$

★ escludete i negativi per y
★ fattori 3 e fattori 7

$a + b + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}$

$v_p(a) = k : p^k \| a$

wlog $\quad v_p(a) \leq v_p(b) \leq v_p(c) \Rightarrow v_p(a) = v_p(b)$

$$\boxed{v_p(n!) \leq \frac{n-1}{p-1}}$$

uguale se $n = p^k$

$v_p(x^{9002}) = 9002\, k_p$

$v_p(21^y) = y \geq 1 \qquad p = 3, 7$
$v_p(9002!) < 9002$
min è almeno 1 $\Rightarrow k_p \geq 1 \Rightarrow 9002 k_p > v_p(9002!)$
$\Rightarrow 9002 k_p$ è il max delle 3
$\Rightarrow v_p(21^y) = y = v_p(9002!) \qquad p = 3, 7 \quad$ ※.

② (x, y) interi $x > 1,\ y > 1$

$$x + y^3 = 2^n \mid x^8 - 1$$

$$x^8 \equiv 1 \pmod{2^n}$$

$\mathbb{Z}_{2^n}^*$ per $n > 2$ il max ordine è 2^{n-2}

$$\boxed{x^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^n} \qquad n \geq 3,\ x \text{ dispari}}$$

1) $n = 5$ $\qquad x^8 \equiv 1 \pmod{2^5}$ vero per tutti x dispari

$x + y^3 = 32 \qquad y = 3 \quad x = 5$ che verifica

2) $n < 5 \qquad 2^n \leq 16$ non ci sono x, y : $x + y^3 = 2^n$

3) $n \geq 6 \qquad x^8 - 1 = \underbrace{(x-1)(x+1)}_{1,\ \alpha}\underbrace{(x^2+1)}_{1}\underbrace{(x^4+1)}_{1}$

$2^n \mid x^8 - 1 \qquad n \leq 3 + \alpha \qquad \alpha \geq n - 3$

$x \pm 1 = 2^\alpha d \qquad d$ dispari

$$2^n - y^3 = x = 2^\alpha d \mp 1$$

$$(y \mp 1)(y^2 \pm y + 1) = y^3 \mp 1 = 2^n - 2^\alpha d$$

$\geq n-3$ $\qquad$ dispari

$2^{n-3} \mid y \mp 1 \qquad y = 2^{n-3}k \pm 1 \geq 2^{n-3} - 1$

$y^3 \geq 2^{3n-9} - 2^{2n-6} \cdot 3 \overset{\text{hope}}{\geq} 2^n$

2^{3n-}

$y > 2^{n-4} \qquad y^3 > 2^{3n-12} \geq 2^n$

$3n - 12 \geq n \qquad n \geq 6$

$x^8 \equiv 1 \pmod{2^m}$ ha 16 soluzioni che sono

$k\, 2^{m-3} \pm 1 \qquad k = 1, \dots, 8$

$$x^8 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

1, almeno m-3   1   1

$2^{m-3} \mid x-1 \Rightarrow x \equiv 1 \ (2^{m-3}) \qquad x = 1 + k\, 2^{m-3}$

$\quad " \quad " \ x+1 \Rightarrow x \equiv -1 \quad " \qquad x = -1 + k\, 2^{m-3}$

$y^3 \pm 1 = k\, 2^{m-3} \qquad y^3 + 1 = k \cdot 2^{m-3}$

$$\underbrace{(y+1)}_{2^B d_2}\underbrace{(y^2 - y + 1)}_{\text{DISPARI} = d_1} = d \cdot 2^B$$

dispari 1,3,5,7   potenza di 2

$y^2 - y + 1$ ha quasi sempre un primo che $y+1$ non ha (sempre tranne $2^3 + 1 = 9$)

$(2+1)(4-2+1)$

3^a sol.

$x + y^3 \mid x^8 - 1 \qquad x \equiv -y^3 \pmod{x+y^3}$

$\Updownarrow$

$x + y^3 \mid (-y^3)^8 - 1$

$2^a \rightarrow x + y^3 \mid y^{24} - 1 \qquad x, y$ dispari

$$\underline{v_2(y^{24} - 1) = \max v_2(y+1), v_2(y-1) + 3}$$

IN GENERALE

$$v_2(y^n - 1) = v_2(y-1) + v_2(n) \quad \text{se } 4 \mid y-1$$

$$v_2(y^2-1) = \max v_2(y-1), v_2(y+1) + 1$$

y^2-1

$z=y^2$ $\quad v_2(z^{12}-1) = v_2(z-1)+2$

$$2^a \mid y^{24}-1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} a &\le v_2(y^{24}-1) \\ &= \max v_2(y-1), v_2(y+1) + 3 \\ 2^a &\ge y^3 \end{aligned}}$$

MA

I CASO: $v_2(y+1) \ge v_2(y-1)$

$$y^3 \le 2^a \le 2^{v_2(y+1)+3} = 8 \cdot 2^{v_2(y+1)} \le 8(y+1)$$

$$y^3 \le 8(y+1)$$ SI FINISCE

(3) $\quad 12^x + y^4 = 2008^z \qquad y = 2^\alpha d$ dispari

$$2^{2x} \cdot 3^x + 2^{4\alpha} d^4 = 2^{3z} \cdot 251^z$$

x è dispari, altrimenti 12^x e y^4 sono quadrati non divisibili entrambi per 251, quindi

$$a^2+b^2 \equiv 0 \pmod{251} \Rightarrow a \equiv 0 \equiv b \pmod{251}$$

$\Rightarrow 2x \ne 4\alpha \qquad 3z = \min(2x, 4\alpha) \qquad z$ pari

$z = 2z'$

$$2^{2x}3^x = \underbrace{\left(2^{3z'} \cdot 251^{z'} + 2^{2\alpha} d^2\right)}_{2^{a_1}}\underbrace{\left(2^{3z'} \cdot 251^{z'} - 2^{2\alpha} d^2\right)}_{3^x 2^{a_2}}$$

$$2^{3z'+1} \cdot 251^{z'} = 3^{a \wedge b} k_3 \quad \Rightarrow a \wedge b = 0$$

$$2^{3z'} \cdot 251^{z'} \pm 2^{2\alpha} d^2 = 2^h$$

z' pari $\Leftarrow 3z' = 2\alpha$ se no $2^{3z'} \cdot d_1^2 + 2^{2\alpha} d^2 \neq 2^{a_1}$

$$2^{2\alpha}(d_1^2 + d^2) \neq 2^h$$

$$d_1^2 + d^2 \equiv 2 \pmod 4 \quad ⨳$$

versione (b) $\quad 3 \equiv k^2 \pmod{251}$

quindi 12^x e y^4 sono quadrati $\pmod{251}$

quindi assurdo

$\mathrm{ord}_{251}(3) \qquad \varphi(251) = 250 = 2 \cdot 5^3$

$\downarrow$

$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{5}, \cancel{10}, \cancel{25}, \cancel{50}, 125, 250$

$3^5 = 243 \equiv -8 \qquad 8^2 = 64 \equiv 3^{10}$

$3^{20} \equiv 4096 \equiv 80 \qquad 3^{25} \equiv -640 \equiv -138 \equiv 113$

$3^{125} \equiv 1 \qquad g$ un generatore

$3 = g^a \quad 1 \equiv 3^{125} = g^{125a} = g^{250k} \Rightarrow$ $a = 2k$, a è pari

(4) $f : S \to \mathbb{N} \qquad S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

(b) $f(ab) = f(a) + f(b)$

$n = \prod_i p_i^{\alpha_i} \qquad f(n) = f\left(\prod_i p_i^{\alpha_i}\right) = f(p_1) + f\left(\frac{\prod p_i^{\alpha_i}}{p_1}\right)$

$= \dots \quad \boxed{f(n) = \sum_i \alpha_i f(p_i)}$

Se conosco $f(p_i)$ p_i primi, conosco f

☆ Se $f(p_i) = k$ per $p_i = q$ q fissato
$f(p_i) = 0$ per $p_i \neq q$

Si ottiene $f(n) = k\, v_q(n)$ che verifica

☆ Se per due primi distinti $f(p), f(q) \geq 1$

Allora $f(p^n) \geq n \quad f(q^n) \geq n$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$f(ap^n + bq^n) \geq \min\left(f(ap^n), f(bq^n)\right) \geq n$

$\forall k \in S\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad k = a_n p^n + b_n q^n$ per Bezout, a_n, b_n opportuni

$\Rightarrow f(k) \geq n \quad \forall n \quad \times$

$1 = ap + bq$