PREIMO 2010 – AM

Titolo nota 18/05/2010

Problema 1 $a_1, \dots, a_n$ reali >0. $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$

$S = a_1 + \dots + a_n$

Tesi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{S+1-a_i} \geq 1$$

$$S^2 = \left[\sum a_i\right]^2 = \left[\sum \frac{a_i}{\sqrt{S+1-a_i}} \cdot \sqrt{S+1-a_i}\right]^2$$

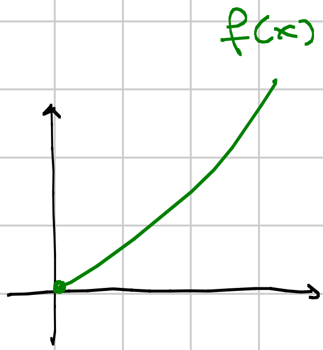
$$(C\text{-}S) \leq \sum \frac{a_i^2}{S+1-a_i} \cdot \sum (S+1-a_i)$$

$$= \text{Testo} \cdot [(n-1)S+n]$$

$$\Rightarrow \text{Testo} \geq \frac{S^2}{(n-1)S+n} \geq 1$$

↑ Hope

$\frac{S}{n} \geq 1$ (GM-AM) $\Rightarrow S \geq n$



Considero $f(x) = \dfrac{x^2}{(n-1)x+n}$

Questa è monotona crescente, quindi

$$S \geq n \Rightarrow f(S) \geq f(n) = \frac{n^2}{(n-1)n+n} = \frac{n^2}{n^2-n+n} = 1.$$

Per dim. $f(x)$ monotona:

- $f(x) = \dfrac{x^2}{ax+b}$ con $a>0$, $b>0$ è strett. cresc. per $x>0$

$$f'(x) = \frac{2x(ax+b) - ax^2}{(ax+b)^2} = \frac{ax^2+2bx}{(ax+b)^2} > 0 \quad \text{per } x>0$$

- $f(x) = \dfrac{x}{a + \frac{b}{x}}$ Quando x cresce, ho che num ↗ e den. ↘

Problema 2

$xyzw = 1 \qquad x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha + w^\alpha \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}$

$x, y, z, w > 0$

per quali α ?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{xyz + yzw + zwx + wxy}{\boxed{xyzw} = 1}$$

Se $\boxed{\alpha = 3}$ la disug. diventa $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 \geq \sum_{cyc} xyz$

e questa è vera per bunching (modulo il fatto che in questo caso le somme sym e cyc sono le stesse)

In alternativa è vera per AM-GM a 3 a 3.

$$\boxed{\sum_{sym} x^3 yz \geq \sum_{sym} x^2 y^2 z}$$ Esempio di bunching

Se $\boxed{\alpha > 3}$ basta omogeneizzare e riusare bunching

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha + w^\alpha \geq (xyzw)^{\frac{\alpha - 3}{4}} \sum_{cyc} xyz$$

vera per bunching e implica la tesi quando $xyzw = 1$.

Se $\boxed{\alpha \in (0,3)}$ la disug. non è più vera. Per costruire un esempio prendiamo

$$x = y = z = n \quad e \quad w = \frac{1}{n^3} \quad con \quad n \in \mathbb{N}$$

$$LHS = 3n^\alpha + \frac{1}{n^{3\alpha}} \sim 3n^\alpha \qquad RHS = \frac{3}{n} + n^3 \sim n^3$$

Se $\alpha < 3$ LHS < RHS per n grandi.

... così è a rischio 6 ...

$$3n^\alpha + \frac{1}{n^{3\alpha}} \overset{?}{<} \frac{3}{n} + n^3 \qquad \underbrace{\frac{3}{n^{3-\alpha}}} + \underbrace{\frac{1}{n^{3\alpha+3}}} \overset{?}{<} 1 + \frac{3}{n^4}$$

scelgo n in modo che siano entrambi $< \frac{1}{2}$

Oss. Se $xyzw = 1$, allora $f(\alpha) = x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha + w^\alpha$ è una funzione crescente di α

Dim: derivata ... ma occhio che $\log x$, $\log y$, ... possono essere negativi ... quindi c'è da lavorare ...
in alternativa: omogenizz. + bunching.

— o — o —

$\boxed{\text{Problema 3}}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x^3) + f(y^3) = (x+y)\left[f(x^2) + f(y^2) - f(xy)\right]$$

Risposta: $f(x) = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{x = y = 0}$ $f(0) = 0$

$\boxed{y = 0}$ $f(x^3) = x f(x^2)$ da cui

$$x \cancel{f(x^2)} + y \cancel{f(y^2)} = x \cancel{f(x^2)} + x f(y^2) + y f(x^2) + y \cancel{f(y^2)} - (x+y) f(xy)$$

$$\boxed{(x+y) f(xy) = x f(y^2) + y f(x^2)}$$

$\boxed{y = 1}$ $x f(x) + f(x) = x f(1) + f(x^2)$ (1)

La riscrivo con $-x$ al posto di x

$$-x f(-x) + f(-x) = -x f(1) + f(x^2) \qquad (2)$$

$\boxed{y = -x \text{ nel testo}}$ $f(x^3) + f(-x^3) = 0 \Rightarrow f$ è dispari
$f(x^3) = -f(-x^3)$ e x^3 è un reale qualunque

Uso f dispari nella 2 e ottengo

$$x f(x) - f(x) = -x f(1) + f(x^2) \qquad (3)$$

$(1)-(3) \Rightarrow 2f(x) = 2f(1)x \Rightarrow f(x) = \alpha x$

... e siamo a 6 punti ... e bisogna fare la verifica ....

— o — o —

$\boxed{\text{Problema 4}}$ a_n succ. debol. decresc.

$\exists M$ t.c. $a_0 + \dots + a_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow b_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$ <u>non</u> limitata superiormente.

Per assurdo dim. che $b_n \le A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

<u>Approccio telescopico</u>: $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \underbrace{\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}} + \underbrace{\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n-1}}} + \dots + \underbrace{\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_0}} + \dfrac{1}{a_0}$

$$\le (n+1)A + \frac{1}{a_0}$$

Quindi $a_{n+1} \ge \dfrac{1}{(n+1)A + \frac{1}{a_0}} = \dfrac{1}{an+b} \qquad a>0 \quad b>0$

"Ben noto" $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{an+b} = +\infty$

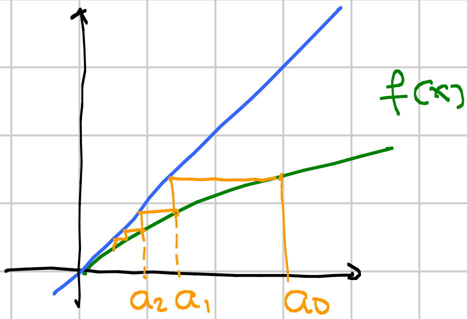
Più noto: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$. $\quad \dfrac{1}{an+b} > \dfrac{1}{2an}$ per n

$\cancel{2}an > \cancel{an} + b$ grande a suff.

<u>Approccio standard</u> $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \le A \Rightarrow \dfrac{1}{a_{n+1}} \le A + \dfrac{1}{a_n}$

$\Rightarrow a_{n+1} \ge \dfrac{1}{A + \frac{1}{a_n}} = \dfrac{a_n}{A a_n + 1} \qquad a_{n+1} \ge \dfrac{a_n}{A a_n + 1}$

$f(x) = \dfrac{x}{Ax+1}$



Spero che $a_n \ge \dfrac{c}{n}$ e a quel punto confronto con la serie armonica

Provo per induzione .... passo induttivo...

Hp: $a_n \geq \frac{c}{n}$ tesi: $a_{n+1} \geq \frac{c}{n+1}$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{A a_n + 1} \geq \frac{\frac{c}{n}}{A \frac{c}{n} + 1} = \frac{c}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}}{Ac + n} \geq \frac{c}{n+1}$$

Devo prima dim. che $f(x)$ è crescente

Hope

vero se $Ac \leq 1$

Basta prendere $c = \frac{1}{A}$? No! Devo controllare anche il passo base

$a_1 \geq \frac{c}{1}$

In realtà devo prendere $c = \min\{a_1, \frac{1}{A}\}$.

—o—o—