PREIMO 2010 — CM

Titolo nota 19/05/2010

Problema 1

$$x \nearrow 2x+1, \qquad x \searrow \frac{x}{x+2}$$

Partendo da x intero, si può ottenere 2010 dopo un po' di passaggi?

Idea: trovare un "invariante".

Fatto 1 Tutti i numeri generati da un intero sono razion. pos.

Fatto 2 Se $x = \frac{m}{n}$ (m, n interi)

$$2x+1 = \frac{2m}{n} + 1 = \frac{2m+n}{n}$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+2} = \frac{m}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{2n+m} = \frac{m}{2n+m}$$

Oss. se $\frac{m}{n}$ era ridotta ai minimi term., allora al max si può semplificare un fattore 2

In entrambi i casi Num + Den $= 2(m+n)$ = doppio del precedente

Supponiamo che dopo k passaggi si ottenga $2010 = \frac{2010\,A}{A}$

Allora Num + Den $= 2011\,A = 2^k \underbrace{(\text{Num. iniz.} + \text{Den. iniz.})}_{n_0+1}$

n_0 numero di partenza

Poiché 2011 è dispari, allora

$2011 \mid n_0+1$

I numeri ottenuti strada facendo, se non semplifico mai numeratore e denominatore, hanno solo fattori 2 che si semplificano.

Quindi A è una potenza di 2, ed è al max 2^k perché a ogni passaggio aggiungo al + un fattore 2.

Quindi $n_0 + 1 = 2011 \Rightarrow n_0 = 2010$ e $k = 0$.

Sol 2 $\boxed{\text{Tornare indietro}}$ $\frac{m}{n}$ da chi può arrivare

Se $\frac{m}{n} > 1$, allora $2x+1 = \frac{m}{n}$ $\quad x = \left(\frac{m}{n} - 1\right)\frac{1}{2} = \frac{m-n}{2n}$

Se $\frac{m}{n} < 1$, allora $\frac{x}{x+2} = \frac{m}{n}$ $\quad x = \frac{m}{n}x + \frac{2m}{n}$

$$x\left(1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{2m}{n}, \quad x = \frac{2m}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}}{n-m}$$

$$x = \frac{2m}{n-m}$$

Invariante: Num. + Den.

Posso partire da $\frac{2010}{1}$ e tornare indietro. Trovo solo frazioni con $m+n = 2011$. Quindi l'n_0 iniziale si deve poter scrivere come

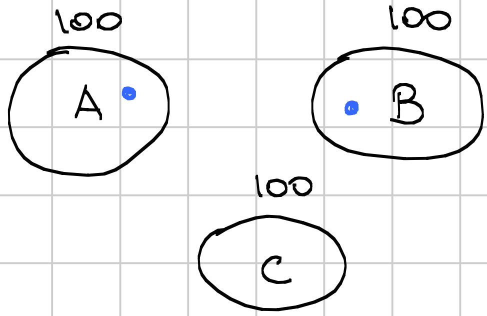
$\frac{n_0 A}{A}$ con $(n_0+1)A \boxed{=} 2011$

Essendo 2011 primo allora per forza $n_0+1 = 2011$.

... Forse si ricicla anche al caso dispari...

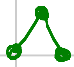
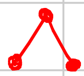
—o—o—

Problema 2



$\exists$ 2 persone in aule diverse tali che nella terza aula $\exists$ 17 persone che conoscono / non conoscono entrambi.

Sol. Conto i triangoli con un tizio per aula.
Sono $100^3 = 10^6$
Possono essere

In ogni caso c'è almeno una  o una 

Formalmente a ogni triangolo associo una coppia "eterolocata" (con i 2 in aule diverse), cioè la base

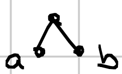
$$\underset{10^6}{\text{Triangoli}} \longrightarrow \underset{3 \cdot 100^2 = 3 \cdot 10^4}{\text{Coppie eterolocate}}$$

Pigeonhole: $\exists$ almeno una coppia eterolocata che viene "presa"

$$\frac{10^6}{3 \cdot 10^4} = \frac{100}{3} = 33, \ldots$$

$\exists$ almeno coppia eterolocata scelta 34 volte.
Sia (a, b) questa coppia (wlog $a \in A$, $b \in B$)

il vertice dei 34 triangoli sta per forza in C

e almeno 17  sono rossi o
" " " " verdi.

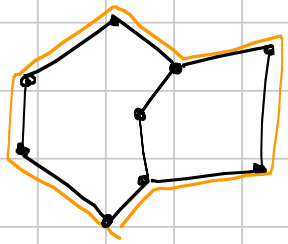
— o — o —

Problema 3 Grafo con tutti i cicli di lungh. dispari e connesso.
Scelgo un po' di cicli (tutti insieme) e elimino i collegamenti coinvolti

Tesi: il grafo finale ha numero dispari di componenti connesse.

Lemma 1 I cicli non hanno lati in comune

Dim. Se così non fosse, eliminando la parte comune ottengo un ciclo di lungh. pari

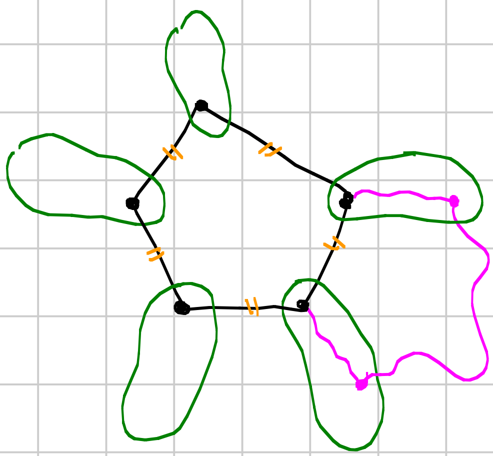


Occhio a tratti comuni multipli

C'è qualche dettaglio da sistemare...

Lemma 2 Ogni volta che tolgo un ciclo il numero di comp. connesse resta dispari.

Dim.



Le componenti connesse dei vertici coinvolti sono disgiunte, se non lo fossero avrei trovato 2 cicli con un tratto in comune.

Ogni volta che elimino i collegamenti di un ciclo, restano tante componenti connesse quanti sono i vertici coinvolti

Conclusione: induzione sul numero dei cicli tolti.

Problema 4 $\quad n$ persone $\quad$ Si forma dei gruppetti

- ognuno sta in quanti gruppi vuole
- ogni gruppo ha almeno 2 persone
- 2 gruppi con almeno 2 persone in comune hanno cardinalità diversa.

Tesi: gruppi $\leq (n-1)^2$.

Sol.: contare le coppie!!!

C_k = numero dei gruppi con k elementi

Fisso k.

Ogni gruppo di k elementi individua $\binom{k}{2}$ coppie.

Gruppi diversi determinano coppie diverse (siamo a k fissato, quindi gruppi diversi non hanno coppie in comune).

Quindi a k fisso

$$\underbrace{C_k \cdot \binom{k}{2}}_{\text{tutte le coppie prodotte}} \leq \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{tutte le coppie}} \implies C_k \leq \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{\binom{k}{2}}$$

Quindi

$$|\text{Tutti i gruppi}| = \sum_{k=2}^{n} C_k$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{2} \frac{1}{\binom{k}{2}}$$

$$= \binom{n}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} \cancel{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \cancel{n}(n-1)\frac{(n-1)}{\cancel{n}} = (n-1)^2$$

Fatto noto: $\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{n}$ (IMO 2002-4)

(Dim: induzione, oppure $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ e telescopizza)

— o — o —