Pre IMO 2011 — Combinatoria M

Problema 1 $S(n) = \#$ permutazioni di $\{1,2,\dots,n\}$ t.c. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $|a_{i+1} - a_i| \le 2$.

$S(2) = 1$ $S(3) = 1$ $S(4) = 2$ 1234 1243

$S(5) = 4$ 12345 – 12354 – 12435 – 12453

Cerco $S(n+1)$

12 → $\underbrace{123}$ → $S(n)$ possibilità

↘ 124 dove metto il 3? Come vicini il 3 può avere 1, 2, 4, 5. Quindi il 3 non può stare in mezzo al blocco che rimane ---- 3 ----.

Quindi il 3 sta in un estremo

124 ↗ 1243 → 12|435 → $S(n-2)$ possibilità
12345

↘ 124 ---- 3| → 1246 ... 753 → obbligata → 1 possib.

Morale: $S(n+1) = S(n) + S(n-2) + 1$

Iterando arrivo a $S(10) = 31$

Voglio liberarmi di 1: pongo $S(n) = T(n) - 1$. Vedo cosa risolve $T(n)$:

$$T(n+1) \cancel{-1} = T(n) \cancel{-1} + T(n-2) \cancel{-1} \cancel{+1}$$

$$T(n+1) = T(n) + T(n-2)$$

C'è la formula $x^3 = x^2 + 1$. Se le radici sono a, b, c si ha che $T(n) = \alpha a^n + \beta b^n + \gamma c^n$ dove α, β, γ sistema i valori iniziali, se a, b, c distinti.

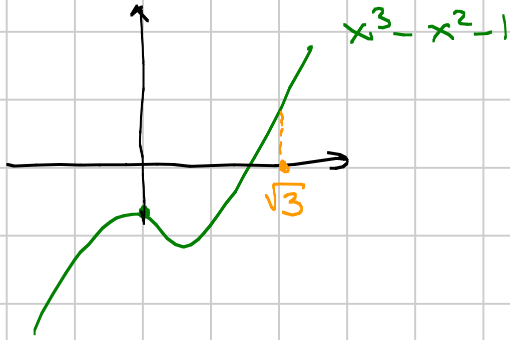
(b) Dimostrare che $S(2011) \le 3^{1005}$ basta dim. che

$$T(n) \le (\sqrt{3})^n \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e questa si dim. per induzione dopo averlo verificato per opportuni passi base.

La cosa importante è che $\sqrt{3} > \max\{|a|, |b|, |c|\}$.

$x^3 = x^2+1 \qquad x^3 - x^2 - 1 = 0$



(c) Per quali valori di n si ha che $T(n) \equiv 1 \ (3)$

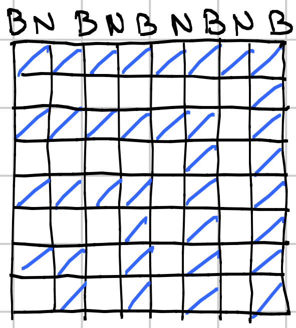
Oss.: $T(n)$ è periodico (mod 3) (e anche mod m).
Infatti appena si ripetono (mod 3) tre termini consecutivi, da lì in poi tutto si ripete (INDUZIONE).
Basta provare con i primi valori e aspettare la ripetizione

$n \equiv 1, 6, 7 \pmod 8$

<u>Oss.</u> $x^3 - x^2 - 1$ si fattorizza in $\mathbb{Z}_3[\sqrt{2}]$ perchè -1 è radice del polinomio

$$x^3 - x^2 - 1 = (x+1)(\ldots)$$

<u>Problema 2</u>

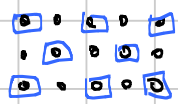


36 diagonali

1ª Dim.

Coloro B-N per colonne. Ogni diagonale ha 1 estremo B e 1 estremo N. Quindi $\#\,\text{diag.} \le \underbrace{\#\,\text{Neri}}_{\text{minoranza}} = 4 \cdot 9 = 36$

2ª Dim. Voglio dim. che 9 vertici del bordo saranno esclusi.
Coloro BN a scacchiera
Ogni diagonale ha 2 caselle dello stesso colore



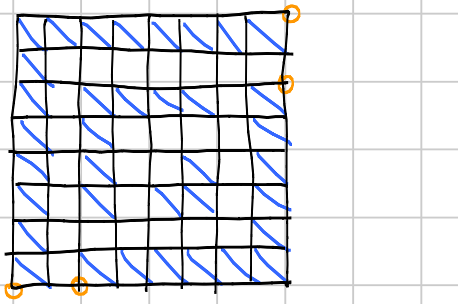
Nella cornice esterna ho 16 B e 16 N

" interna ho 12 B e 12 N

Questo mostra che dalla cornice esterna partono al massimo 24 diagonali, quindi restano inutilizzati 8 vertici

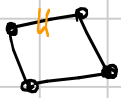
$81 - 8 = 73 \qquad 73 : 2 = 36,..$

Occhio: NON FUNZIONA perché una diagonale può prendere 2 vertici del bordo



— o — o —

<u>Problema 4</u>



Partendo da K_n ed eliminando più roba possibile, quanti lati restano come minimo.

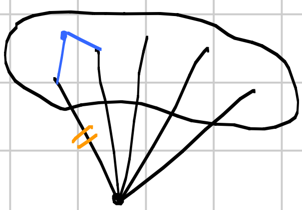
Risposta: n

1°: far vedere come lasciare solo n lati

2°: far vedere che meglio non si può.

1°: Isolo un vertice, da cui partono $(n-1)$ lati e ne lascio solo uno.

Elimino $(n-2)$ lati



K_{n-1}

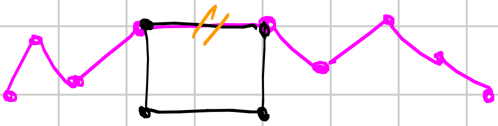
K_{n-1}

elimino tutti i lati che partono da questo nel K_{n-1} (meno 1)

$(n-2) + (n-3) + ...$

Facendo il conto, quelli che restano sono $\leq n$.

2° Osservazione A: ad ogni passaggio il grafo resta connesso

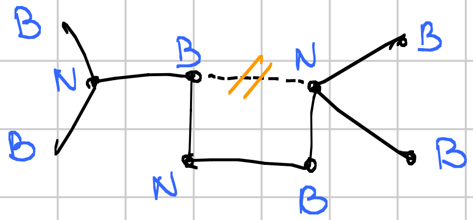


Posso sostituire il lato eliminato con i restanti 3.

Essendo connesso, il grafo finale ha $\geq n-1$ lati

Osservazione B: se dim. che il grafo non è un albero, cioè ha almeno un ciclo, ho finito.
Gli alberi sono grafi bipartiti, cioè posso colorare B–N i vertici in modo che i lati congiungono colori diversi

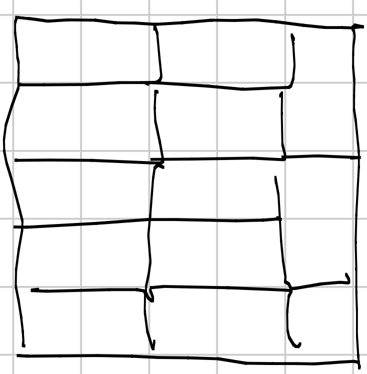
Oss. C: se dopo una certa mossa il grafo è bipartito, allora lo era anche alla mossa precedente



Infatti il lato tolto congiunge vertici di colore diverso.

Essendo K_n non bipartito, il finale è non bipartito, quindi non albero.
(Fatto generale: bipartito $\Leftrightarrow$ NO cicli lungh. dispari).

se c'è ancora si muove

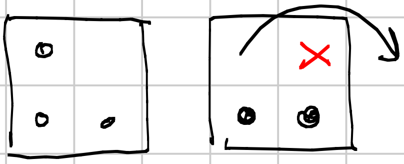


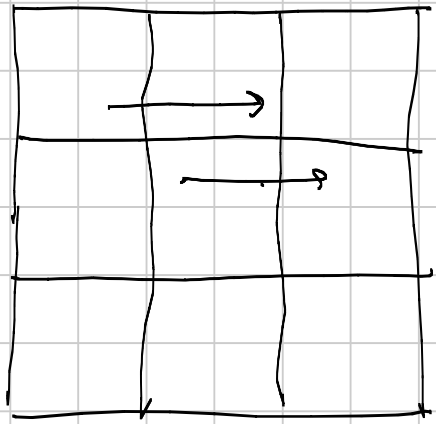
Mancano almeno $\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$ pedine

$m = e + i$

$2e + i \geq$ pedine mancanti all'interno $\geq \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$

pari $\frac{n^2}{2}$ $\quad \frac{n^2-1}{2}$ n disp



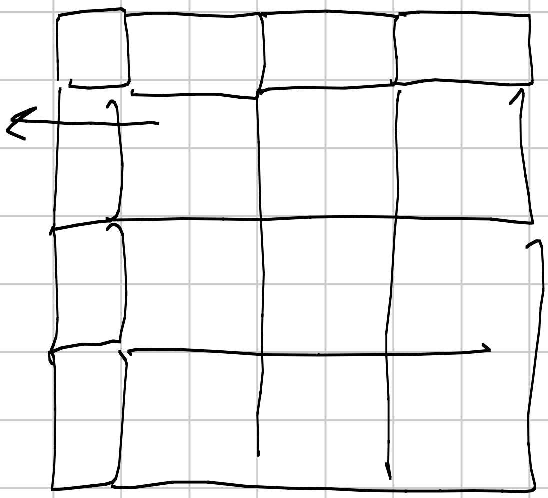


$2i + e \geq$ "coinvolgimenti" $\geq 2\frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$

$2e + i \geq \frac{n^2}{2}$

$e + 2i \geq \frac{n^2}{2}$

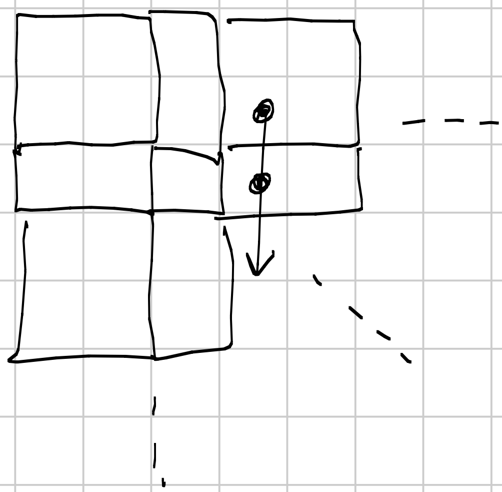
mosse $\geq \frac{n^2}{3}$



$n = 3$

$n = 1$

AMMANO



$n = 2m + 1$

m^2 quadratini

$2m$ tessere

$2i + e \geq$ coinvolgimenti $\geq 2m^2 + 2m$

$n^2 = 4m^2 + 4m + 1$

$\frac{n^2 - 1}{2}$

$$2e + i \geq \frac{n^2-1}{2}$$
$$+$$
$$2i + e \geq \frac{n^2-1}{2}$$

$$\text{mosse} \geq \frac{n^2-1}{3}$$

$$3 \nmid n \implies \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor = \frac{n^2-1}{3}$$

$$3 \mid n \qquad \text{mosse} \geq \frac{n^2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\text{mosse} \geq \frac{n^2}{3}$$