# Pre IMO 2011 - Combinatoria P

Titolo nota 23/05/2011

**Problema 8** Torneo all'italiana (= grafico orientato completo)

$v_i$ = vittorie $i$-esima squadra

$p_i$ = sconfitte $i$-esima squadra

(a) $P(x)$ polinomio con $\deg(P(x)) \leq 2$. Allora

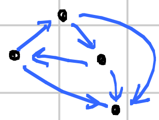
$$\sum_{i=1}^{n} P(v_i) = \sum_{i=1}^{n} P(p_i)$$

Oss. 1: basta dimostrare che $\boxed{\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} p_i}$ e $\boxed{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2}$

Double counting: ogni partita ha un vincitore e uno sconfitto.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(v_i+p_i)}_{n-1}(v_i-p_i) = (n-1)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i - p_i}_{=0} = 0.$$

(b) Supponiamo che non ci siano BAD COMPANY



Allora

$$\sum v_i^3 \geq \sum p_i^3$$

Oss. 1: basta dimostrarlo per un qualunque polinomio di grado 3 con il coeff. di $x^3$ positivo.

Proviamo con $P(x) = \binom{x}{3} = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}$

Quindi tesi $\iff \sum \binom{v_i}{3} \geq \sum \binom{p_i}{3}$

$V = \{4\text{-tornei con vincitore assoluto}\}$

$P = \{4\text{-tornei con sconfitto assoluto}\}$

L'asserzione di BAD COMPANY dice che se un 4-torneo ha sconfitto assoluto, allora ha vincitore assoluto.

Questo dice che $|V| \geq |P|$

Calcolo $|V|$ e $|P|$. Quanti sono i 4-tornei con squadra 1 come vincitore assoluto? Sono $\binom{v_1}{3}$

Quindi

$$|V| = \sum \binom{v_i}{3}$$

Analogamente

$$|P| = \sum \binom{p_i}{3}$$

Resta da dim. che $\sum (v_i - p_i)^3 \geq 0$

$$\sum v_i^3 - 3v_i^2 p_i + 3 v_i p_i^2 - p_i^3$$

$$= \sum v_i^3 - 3 v_i^2 (n-1-v_i) + 3 p_i^2 (n-1-p_i) - p_i^3$$

$$= 4 \underbrace{\left( \sum v_i^3 - \sum p_i^3 \right)}_{\geq 0.} - 3(n-1) \underbrace{\sum (v_i^2 - p_i^2)}_{=0}$$

— o — o —

## Problema 7

Allenamento 1: quante sono le parole lunghe $n$ con lettere A e B in cui non ci sono 2 B consecutive

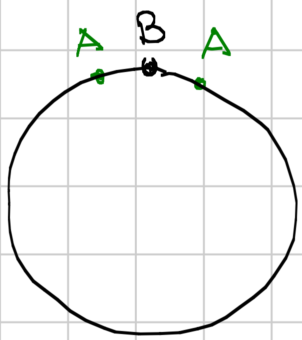
$A_n$ = parole tali che finiscono in A
$B_n$ = " " " " in B

$$A_{n+1} = A_n + B_n \qquad P_{n+1} = A_{n+1} + B_{n+1} =$$
$$B_{n+1} = A_n \qquad = A_n + B_n + A_n$$
$$= P_n + \boxed{A_{n-1} + B_{n-1}}$$
$$= P_n + P_{n-1}$$

Morale $P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$ ⇒ Numeri di Fibonacci

$2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13$
$P_1\ \ P_2\ \ P_3\ \ P_4\ \ P_5.$

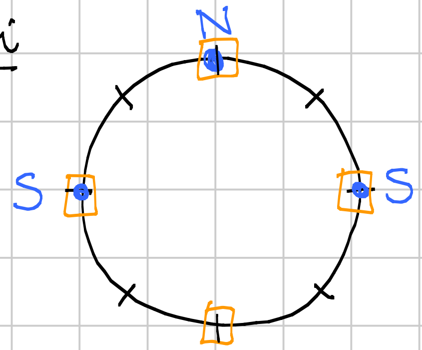
Allenamento 2: A e B per $n$ volte lungo una circ. senza due B consecutive. Fisso una posizione




Se c'è A ho $P_{n-1}$ possibilità
Se c'è B ho $P_{n-3}$ possibilità

Quindi i modi sono $P_{n-1} + P_{n-3} = D_n$

## Cannoneggiamenti

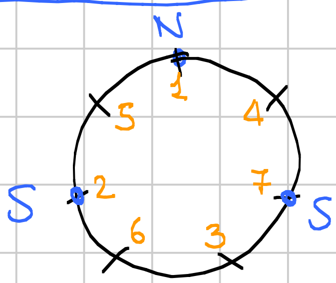



Nelle 4 posizioni N-S-W-E ci sono 4 simboli N-S senza 2 NO consecutivi (quindi $D_4$ possibilità)
Stessa cosa sulle restanti 4 posizioni.

Conclusione: $\underset{\uparrow\ \text{cannonegg.}}{C_8} = [D_4]^2$

Occhio: verificare che c'è corrispondenza biunivoca.

Più in generale $\boxed{C_{2n} = [D_n]^2 = [P_{n-1} + P_{n-3}]^2}$




Sui dispari c'è un "giro unico"

Ancora una volta se c'è NO in una posizione, c'è SI in quelle con numeri adiacenti.
Quindi

$$\boxed{C_{2n+1} = D_{2n+1} = P_{2n} + P_{2n-2}}$$

Osservazione: se pongo $L_n = P_{n-1} + P_{n-3}$ ho che

$$\boxed{L_{n+1} = L_n + L_{n-1}}$$ stessa relazione dei Fibonacci

$$\boxed{L_0 = 2 \qquad L_1 = 1}$$

Ora $\quad C_{2n} = [L_n]^2 \qquad C_{2n+1} = L_{2n+1}$

Tesi: $L_n$ e $L_{2n\pm1}$ sono coprimi. Facciamo con $2n+1$.
Formula esplicita:

$$L_n = a^n + b^n \qquad \text{dove} \qquad a, b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

"Brutal mode": supponiamo $p \mid L_n$ e $p \mid L_{2n+1}$

$$p \mid a^n + b^n \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n \equiv -1 \quad (p)$$

$$p \mid a^{2n+1} + b^{2n+1} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} \equiv -1 \quad (p)$$

$$= \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}} \left(\frac{a}{b}\right) \equiv -1 \quad (p)$$

$$\Rightarrow a \equiv -b \quad (p) \Rightarrow \underbrace{L_1}_{=1} = a + b \equiv 0 \quad (p)$$

Quando $5 = \square \mod p$ è pure rigoroso $p > 2$

(oss. $5 = \square \mod p \iff p = \square \mod 5 \iff p \equiv \pm 1 \mod 5$)

\end{brutal-mode}

$$p \mid a^n + b^n \implies p \mid (a^n + b^n)(a^{n+1} + b^{n+1})$$

$$p \mid a^{2n+1} + b^{2n+1}$$

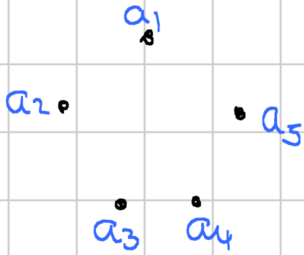
$$= a^{2n+1} + b^{2n+1} + a^{n+1} b^n + a^n b^{n+1}$$

$$= a^{2n+1} + b^{2n+1} + (ab)^n (a+b)$$

ora $ab = -1$, e $a+b = 1$, quindi

$$p \mid \underbrace{a^{2n+1} + b^{2n+1}}_{\equiv 0 \mod p} \pm 1 \cdot 1$$ assurdo perché $p \mid 1$.

Problema 5




Numeri con somma $n$

Mossa


Voglio arrivare ad avere un $n$ e tutti 0.

(a) Il pto in cui accumulo $n$ dipende solo dai dati iniziali.

$$I_1 = \sum a_i$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{2n+1} i \cdot a_i \pmod{2n+1}$$ è invariante

$I_2$ (inizio) = dato

$I_2$ (fine) $= J \cdot \boxed{n}$ numero scritto nella posizione

$J$ posizione con numero $\neq 0$

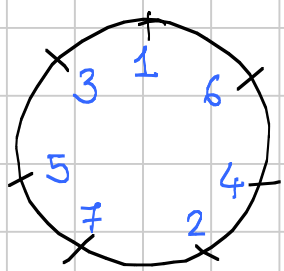
$J \cdot n =$ dato $\pmod{2n+1}$

$n$ è invertibile, quindi trovo $J \pmod{2n+1}$

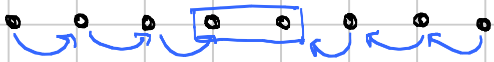
(b) Dimostrare che posso portare tutto in posizione $J$.

**Oss. 1** Posso supporre di aver agito una sola volta su ogni lato (con $k$ = somma dei $k$ ...)
Quindi tutto si riduce alla successione $k_1, \dots, k_{2n+1}$ che dice il $k$ usato su quel lato / vertice
$a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ = valori iniziali

**Oss. 2** Numerando diversamente i vertici posso far finta che la mossa sia su 3 vertici consecutivi

**Oss 3** Sappiamo rendere tutto 0 tranne 2 caselle adiacenti



**Oss. 4** Sappiamo portare tutti 1 in una casella sola? Sì, svolgo in modo che finisca al centro

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 |
| 0 | 0 | 6 | −5 | 6 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 |

**Finale** Sposto tutto in 2 caselle consecutive $J, J+1$

$$I_2 = J a_J + (J+1) a_{J+1} = \text{dato} \pmod{2n+1}$$

Se ho scelto $J$ come si deve ho che $Jn$ = dato, quindi

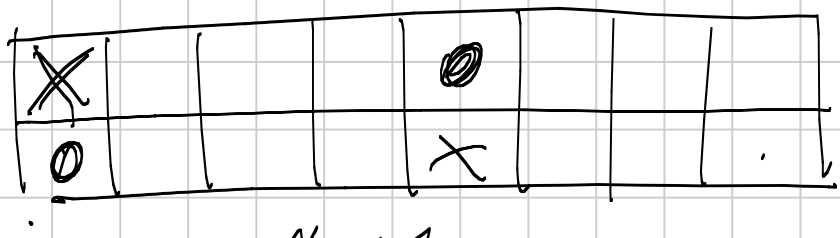
$J \underbrace{(a_J + a_{J+1})}_{n} + a_{J+1} = \text{dato}$, quindi $a_{J+1} \equiv 0 \pmod{2n+1}$

Ma io i multipli di $(2n+1)$ li so spostare....

[Cortesi POL].

---

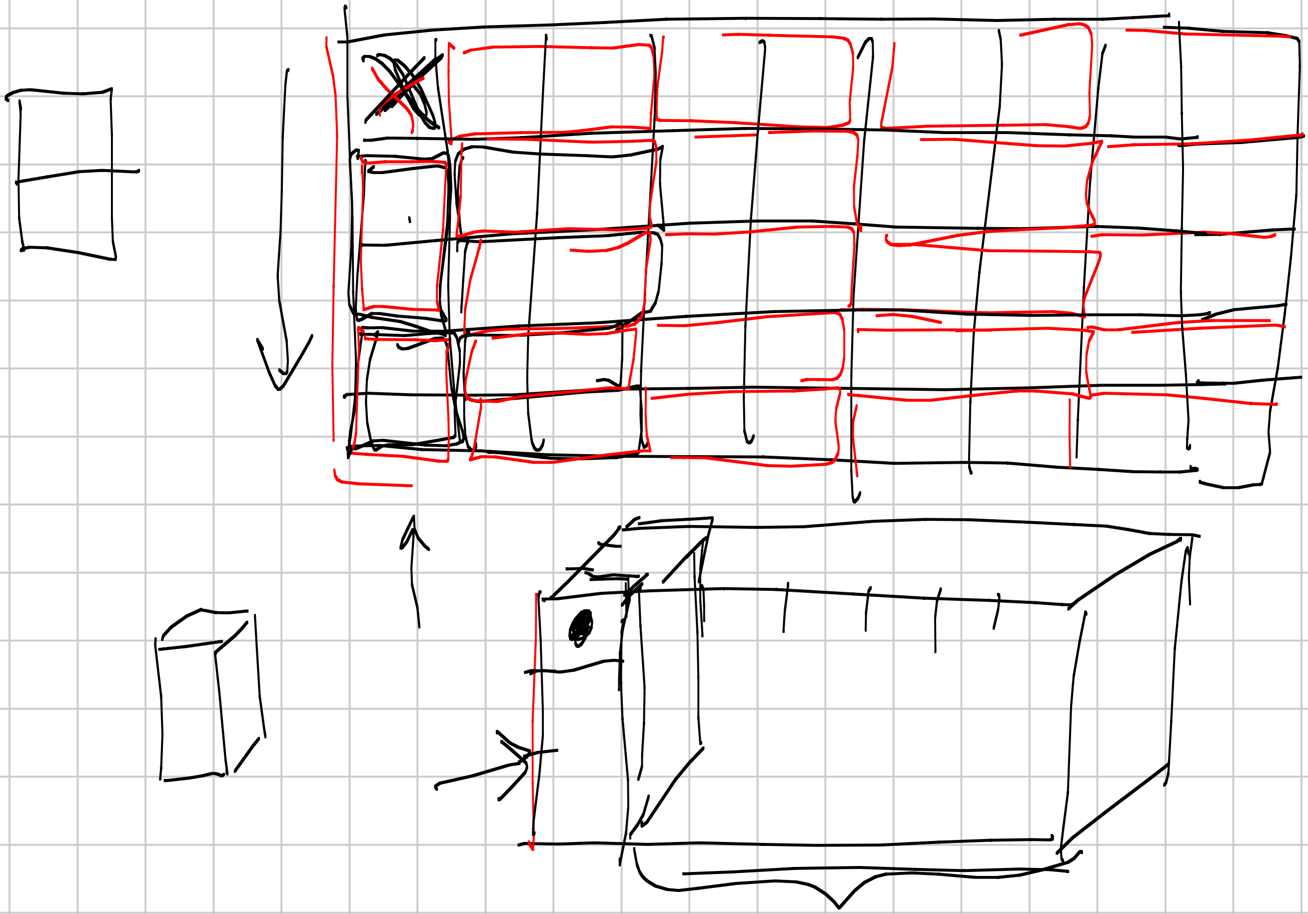
$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2$$



$\alpha_1 + 1$

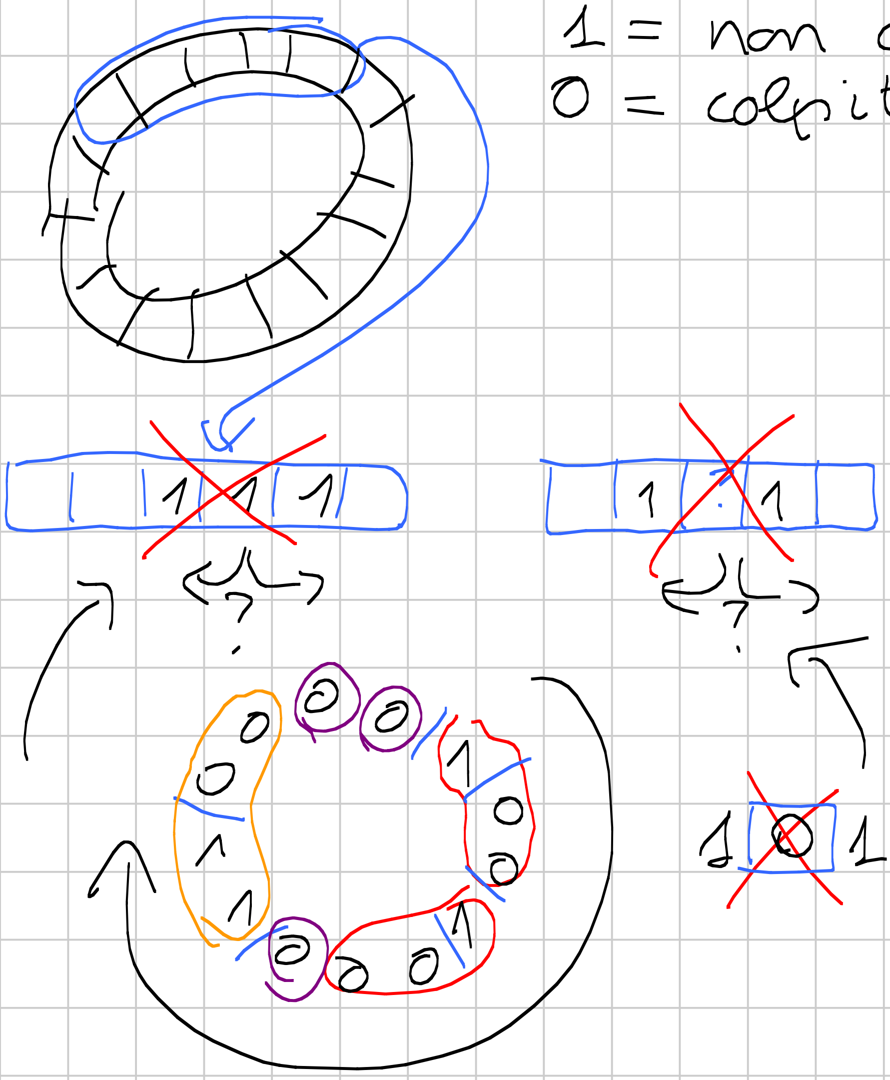
$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$N = p_1^{4} \cdot p_2^{8}$$

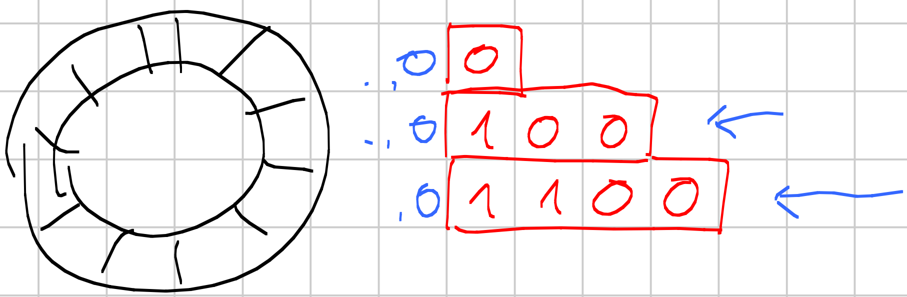


# Problema 7 – 2

1 = non colpite
0 = colpite




$\rightarrow 0 \quad \leftarrow 1$



① $x\,0 \quad k-1 \quad x\,k$

$$A(k) = A(k-1) + A(k-3) + A(k-4)$$

$100 \quad k-3$

$1100 \quad k-4$

$A(1) = 1 \qquad 0$

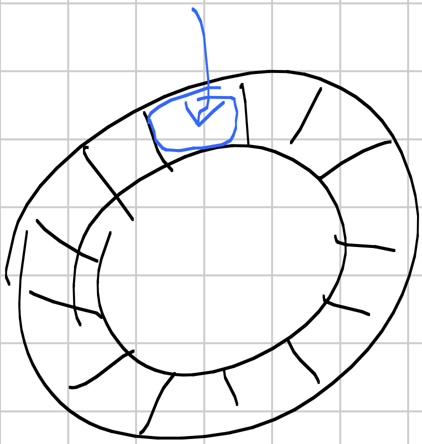
$A(2) = 1 \qquad 100$

$A(3) = 2 \qquad 1100$

$A(4) = 1+2+1 = 4$

---

$$A(k) = A(k-1) + A(k-3) + A(k-4)$$



$\boxed{0}$

$\to \; 100$

$1100$

$$S(n) = A(n-1) + 3A(n-3) + 4A(n-4)$$

$$S(n) = A(n-2) + A(n-4) + A(n-5) + 3A(n-4) + 3A(n-6) + 3A(n-7) + 4A(n-5) + 4A(n-7) + 4A(n-8) =$$

$$= S(n-1) + S(n-3) + S(n-4)$$

$S(0) = 4$

$S(1) = 1$

$S(2) = 1$

$S(3) = 4$

$S(4) = 4+4+1 = 9$

$$S(n) = \overset{x^4}{S(n-1)} + \overset{x^3}{S(n-3)} + \overset{x}{S(n-4)}$$

$x^4 \quad x^3 \quad x \quad 1$

$$x^4 - x^3 - x - 1 = 0 \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$$

$$S(n) = a\alpha_1^n + b\alpha_2^n + c\alpha_3^n + d\alpha_4^n$$

$$(x^2 + a'x + b')(x^2 + c'x + d') = x^4 - x^3 - x - 1$$

$$(x^2+1)(x^2-x-1) = 0$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$\pm i \qquad \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi + \overline{\varphi} = 1 \qquad \overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi} + 1$$

$$\varphi\overline{\varphi} = -1 \qquad \varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\begin{cases} a i^0 + b(-i)^0 + c\varphi^0 + d\overline{\varphi}^0 = S(0) \\ a i^1 + b(-i)^1 + c\varphi^1 + d\overline{\varphi}^1 = S(1) \\ \vdots \end{cases}$$

$$S(n) = i^n + (-i)^n + \varphi^n + \overline{\varphi}^n = L(n)$$

2, 1

LUCAS

$$2 \nmid n \qquad i^{2m+1} + (-i)^{2m+1} = \cancel{(-1)i + (-1} \; 0$$

$2 \mid n \quad 2(-1)^{m} + \ldots$

$$S(2n) = 2(-1)^n + \varphi^{2n} + \overline{\varphi}^{2n} = 2(-1)^n + L(2n)$$
$$= (\varphi^n + \overline{\varphi}^n)^2 = L(n)^2$$

$$S(2n+1) = L(2n+1)$$

$$\underbrace{L(n)L(n+1)}_{p} = (\varphi^n + \overline{\varphi}^n)(\varphi^{n+1} + \overline{\varphi}^{n+1}) =$$
$$= \varphi^{2n+1} + \overline{\varphi}^{2n+1} + (\varphi\overline{\varphi})^n \underbrace{(\varphi + \overline{\varphi})}_{=1} =$$
$$= \underbrace{L(2n+1) + (-1)^n}_{p}$$

$$(L(2n-1), L(n)) \stackrel{?}{=} 1$$

$S(2n-1) = L(2n-1)$

$S(2n) = L(n)^2$

$S(2n+1) = L(2n+1)$

$\vdots \qquad \vdots$