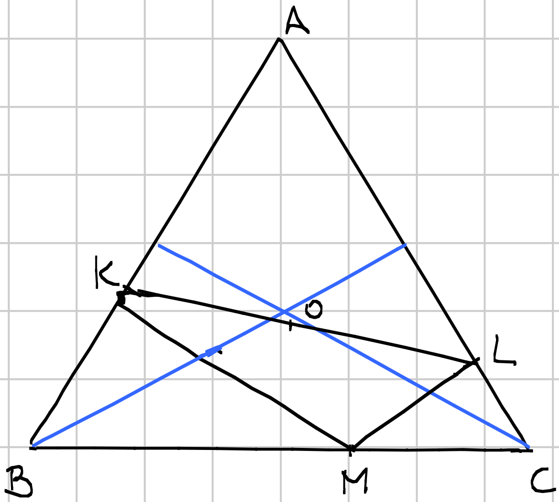
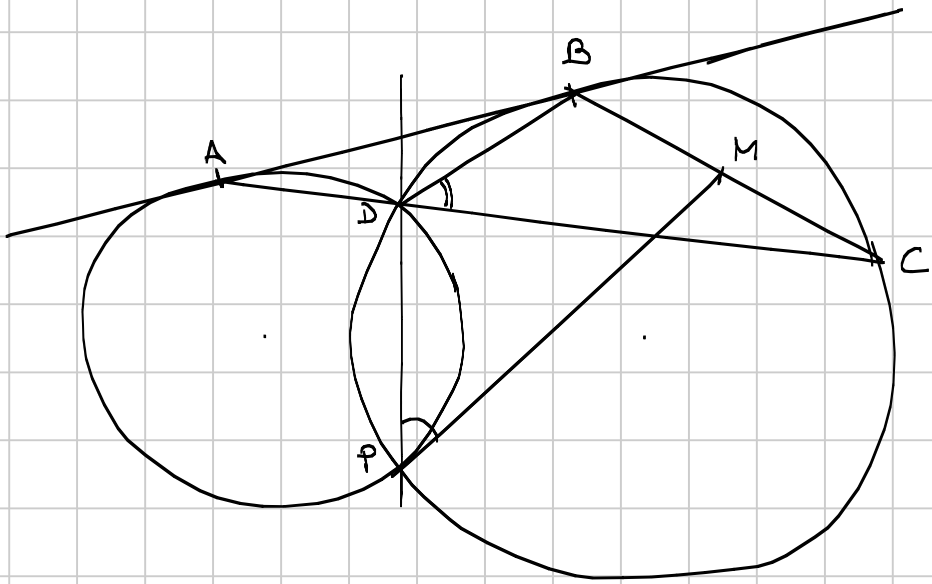
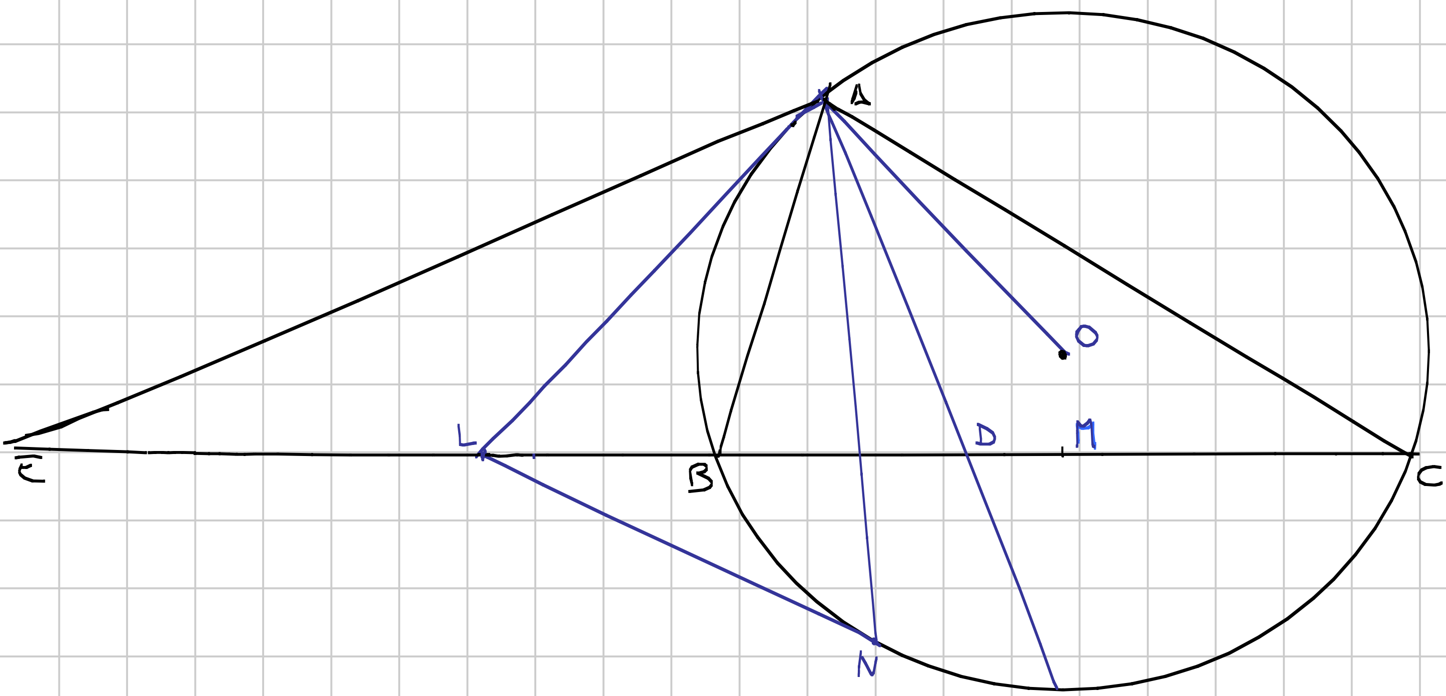
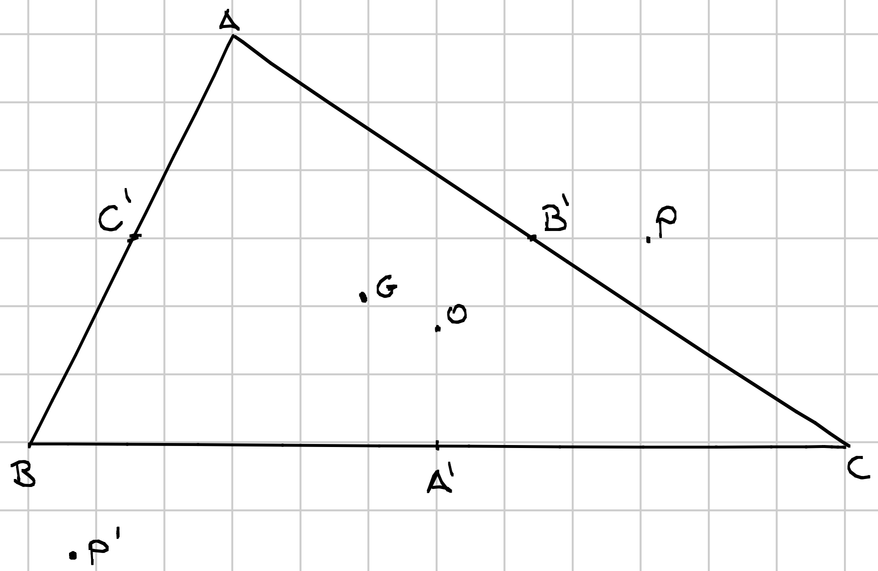
PREIMO 2011 - GEOMETRIA M

Titolo nota 24/05/2011

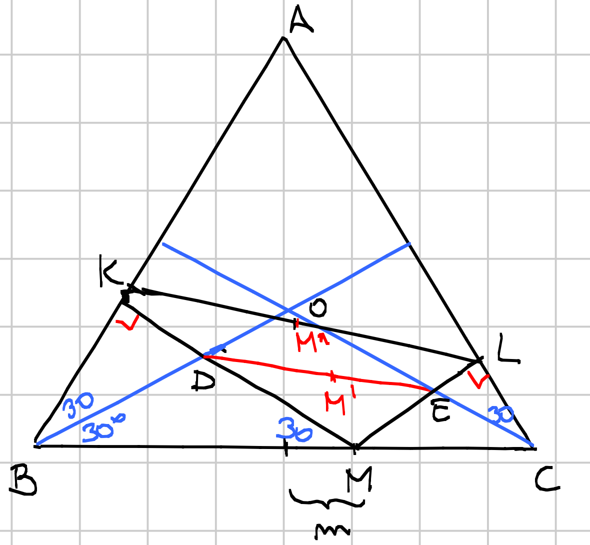







A
B
C
A'
B'
C'
G
O
P
P'

$\boxed{\text{ES 1}}$



$OD \parallel ML$ (sono $\perp AC$).

$OE \parallel DM$ (" " AB)

$ODME$ è un parall

M' = pto medio di DE

$M' \in OM$ (le diagonali si bisecano)

Basta dim $\boxed{KLM \sim DEM}$.

Omotetia di centro M e rapporto $\frac{KM}{DM}$.

$M \to M$

$D \to K$

$E \to L$

$M' \to M''$

$\Rightarrow M, M', M''$ allineati

O, M', M allineati.

similitudine di $BDK \sim CEL$

$$\frac{MD}{DK} = \frac{BD}{DK} = \frac{EC}{EL} = \frac{ME}{EL}$$

BDM isoscele

MEC isoscele

Questo mostra $KLM \sim DEM$.

Sol 2 Geometria analitica

$A = (0,1)$

$B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$M = \left(m, -\frac{1}{2}\right)$

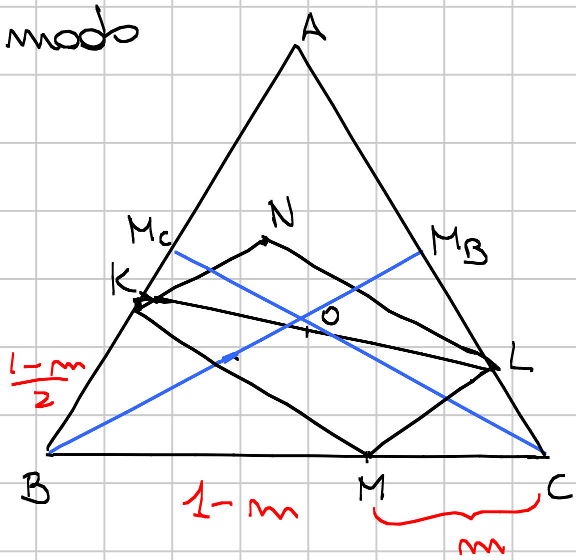
K, L proiezioni $\qquad M'' = \frac{K+L}{2}$

Sol 3 Costruisco N in modo che KMLN parall.

$N \in M_B M_C$

Basta poi:

$$\frac{M_C N}{N M_B} = \frac{MC}{BM}$$

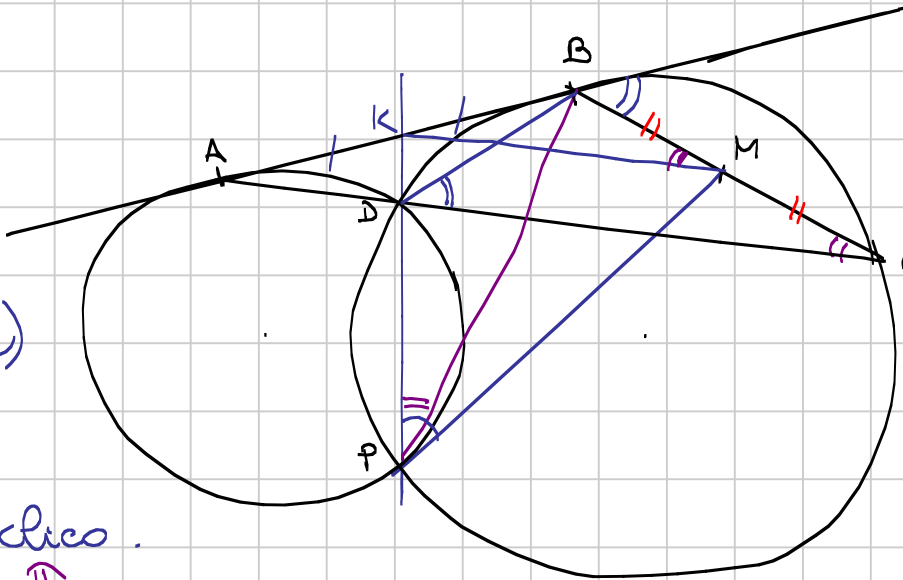


Tesi: $B\hat{D}C = D\hat{P}M$

$K = PD \cap AB$

$\boxed{AK = KB}$

$KM \parallel AC$ (Talete)



Tesi $\Leftrightarrow$ BMPK ciclico.

$B\hat{M}K = B\hat{C}D = B\hat{P}D$ $\Uparrow$

Sol 2 (ex)

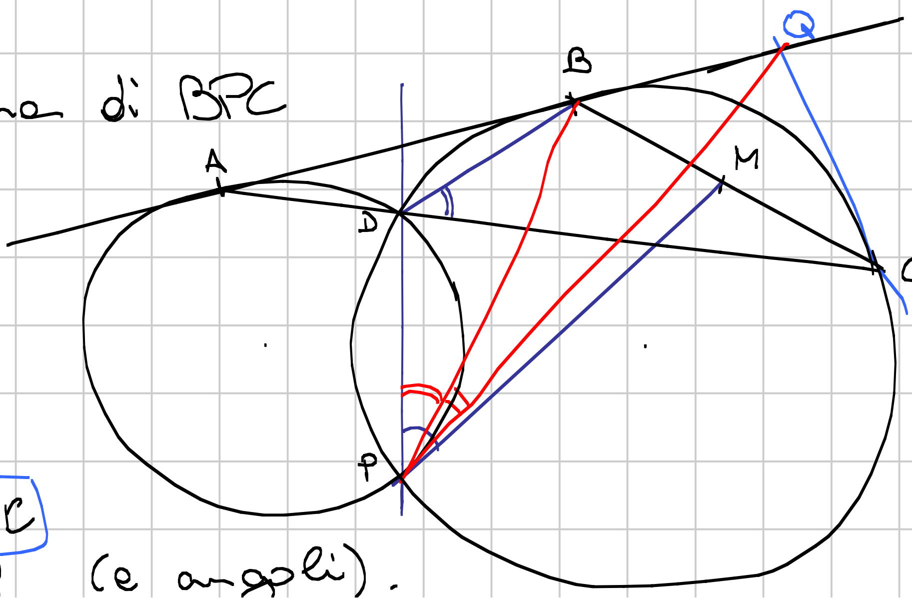
$Q = BB \cap CC$

PQ è simmediana di BPC

$$\Rightarrow \begin{cases} Q\hat{P}C = B\hat{P}M \\ M\hat{P}C = B\hat{P}Q \end{cases}$$

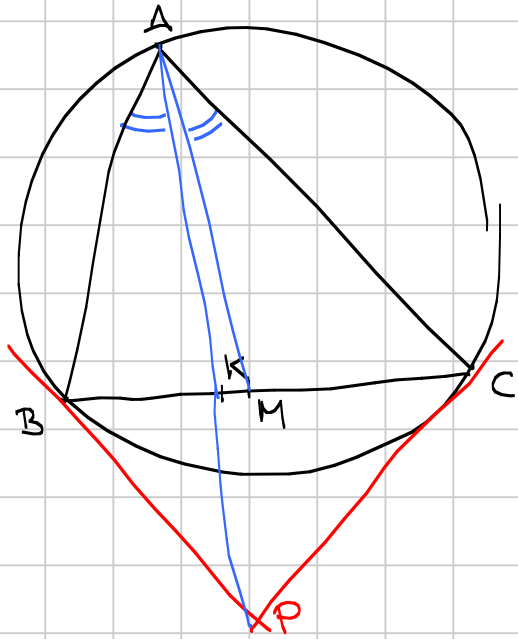
Tesi $\Leftrightarrow$

$$\underbrace{D\hat{P}M}_{\boxed{D\hat{P}B} + B\hat{P}M} \overset{?}{=} \underbrace{B\hat{D}C}_{B\hat{P}C \,=\, B\hat{P}M + \boxed{M\hat{P}C}}$$



Tesi $\Leftrightarrow$ $D\hat{P}B = B\hat{P}Q$ (e angoli).

Lemma (della simmediana)



AK ceviana, $P = BB \cap CC$

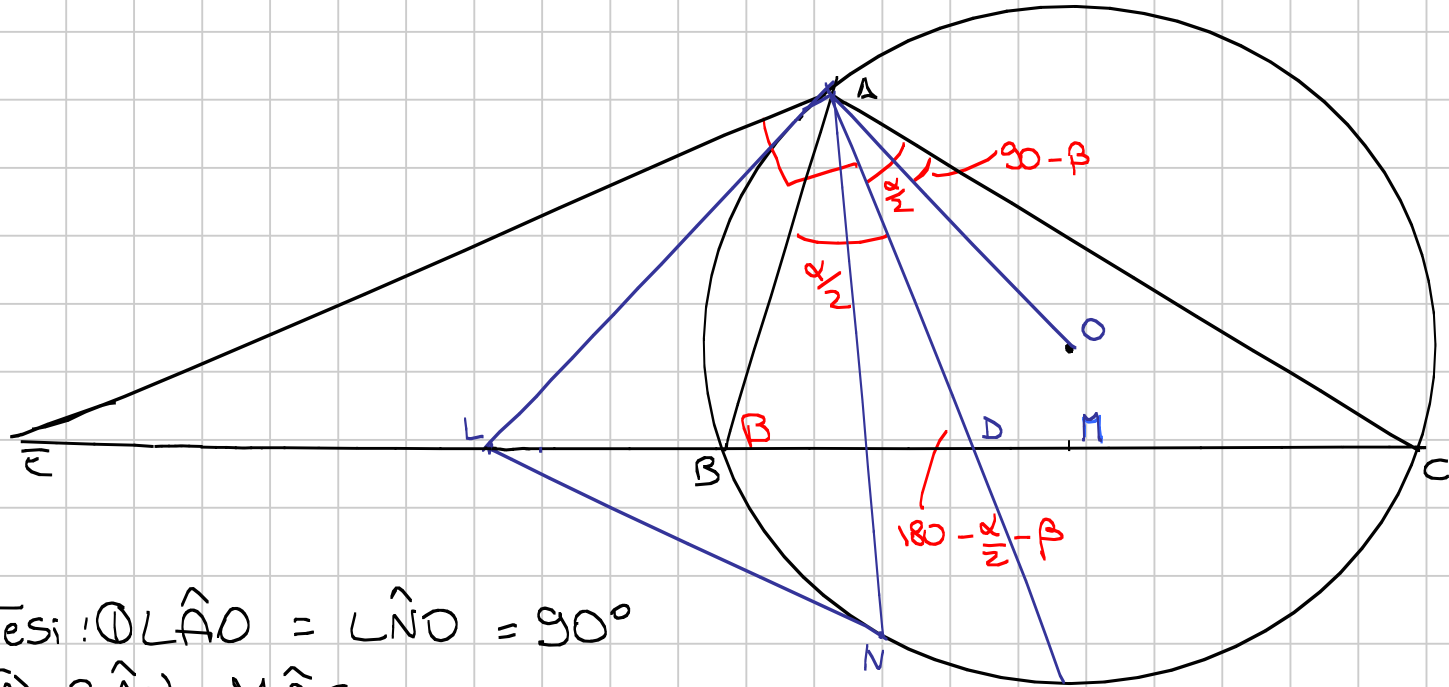
Sono equivalenti

① $B\hat{A}K = M\hat{A}C$

② $\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

③ A, K, P allineati.

Se AK verifica una delle proprietà, AK si dice SIMMEDIANA



Tesi: ① $L\hat{A}O = L\hat{N}O = 90°$

② $B\hat{A}N = M\hat{A}C$

(cioè AN è simmediana nel triangolo ABC)

① $D\hat{A}O = \frac{\alpha}{2} - 90 + \beta$

$L\hat{A}D = A\hat{D}L = 180° - \frac{\alpha}{2} - \beta$

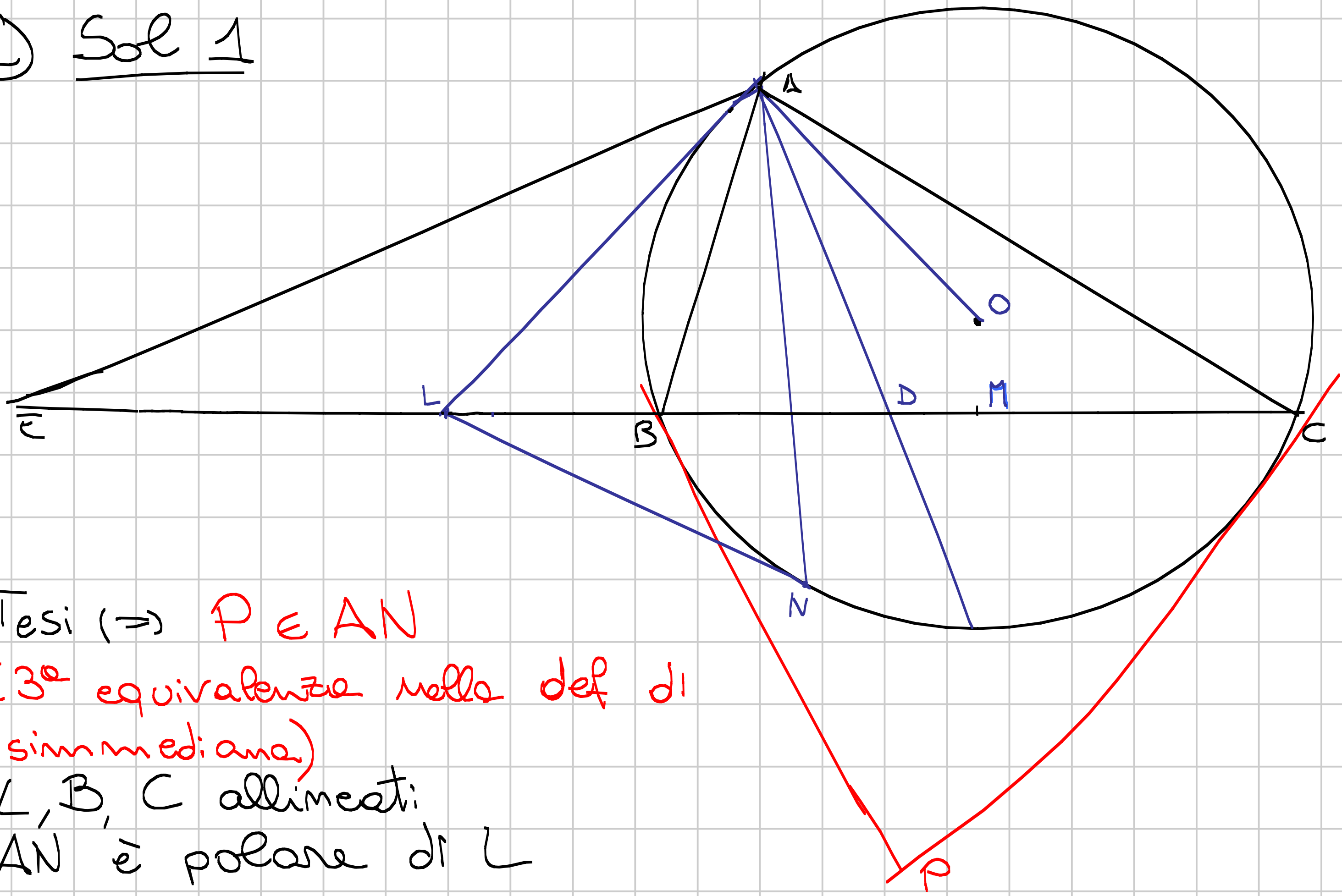
$E\hat{A}D = 90° \Rightarrow L$ è centro di $\odot EDA$

LA e LD sono raggi

$\Rightarrow L\hat{A}O = D\hat{A}O + L\hat{A}D = 90°$

$LAON$ è ciclico $\Rightarrow L\hat{N}O = 180° - L\hat{A}O = 90°$

② Sol 1



Tesi $\Leftrightarrow$ $P \in AN$

(3ª equivalenza nella def di simmediana)

L, B, C allineati:

AN è polare di L

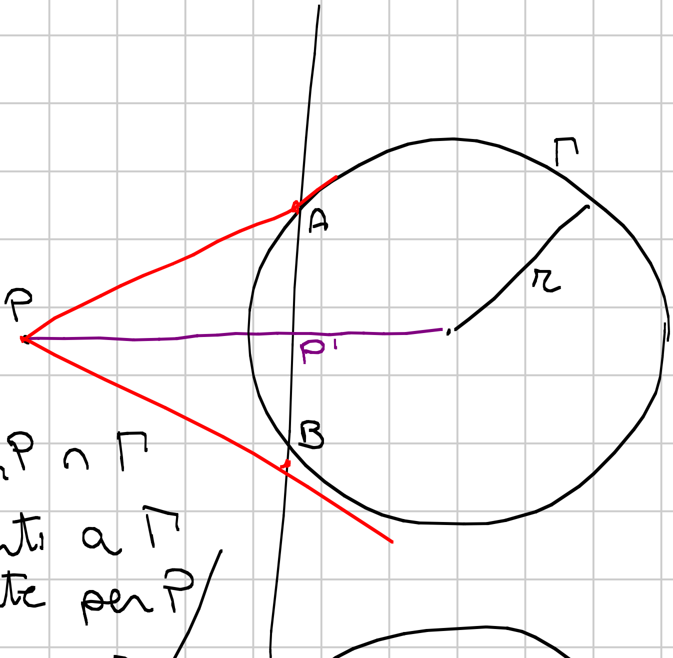
BP è polare di B

CP è polare di C

$\Rightarrow$ (lemma della polare) AN, BP, CP concorrono

Polarità

① $\mathrm{pol}_\Gamma P$ è la retta $\perp OP$ t.c. $OP' \cdot OP = r^2$.

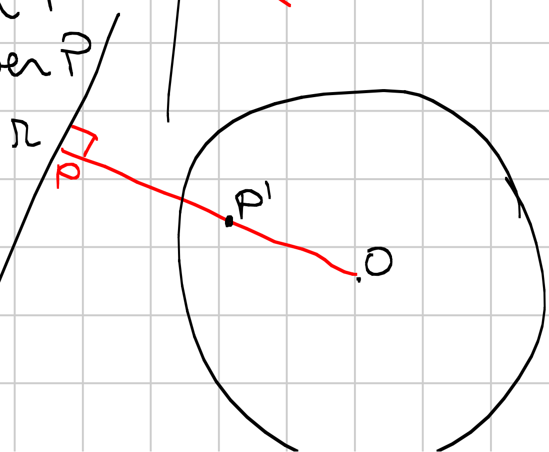


Proprietà

- Se P è esterno $\{A,B\} = \mathrm{pol}_\Gamma P \cap \Gamma$
  $\Rightarrow$ PA e PB sono tangenti a Γ
- Se $P \in \Gamma$, $\mathrm{pol}_\Gamma P$ = tangente per P

② r retta

$\mathrm{pol}_\Gamma r$ è un punto P' su OP t.c. $OP' \cdot OP = r^2$



Proprietà

- Sono inverse l'una dell'altra
- $\boxed{P \in r \iff pol_\Gamma P \ni pol_\Gamma r \qquad (ex)}$

Conseguenza

$A, B, C \in r \iff pol_\Gamma A,\ pol_\Gamma B,\ pol_\Gamma C \ni pol_\Gamma r$

(A, B, C allineati) (le polari concorrono)

Lemma della polare 2

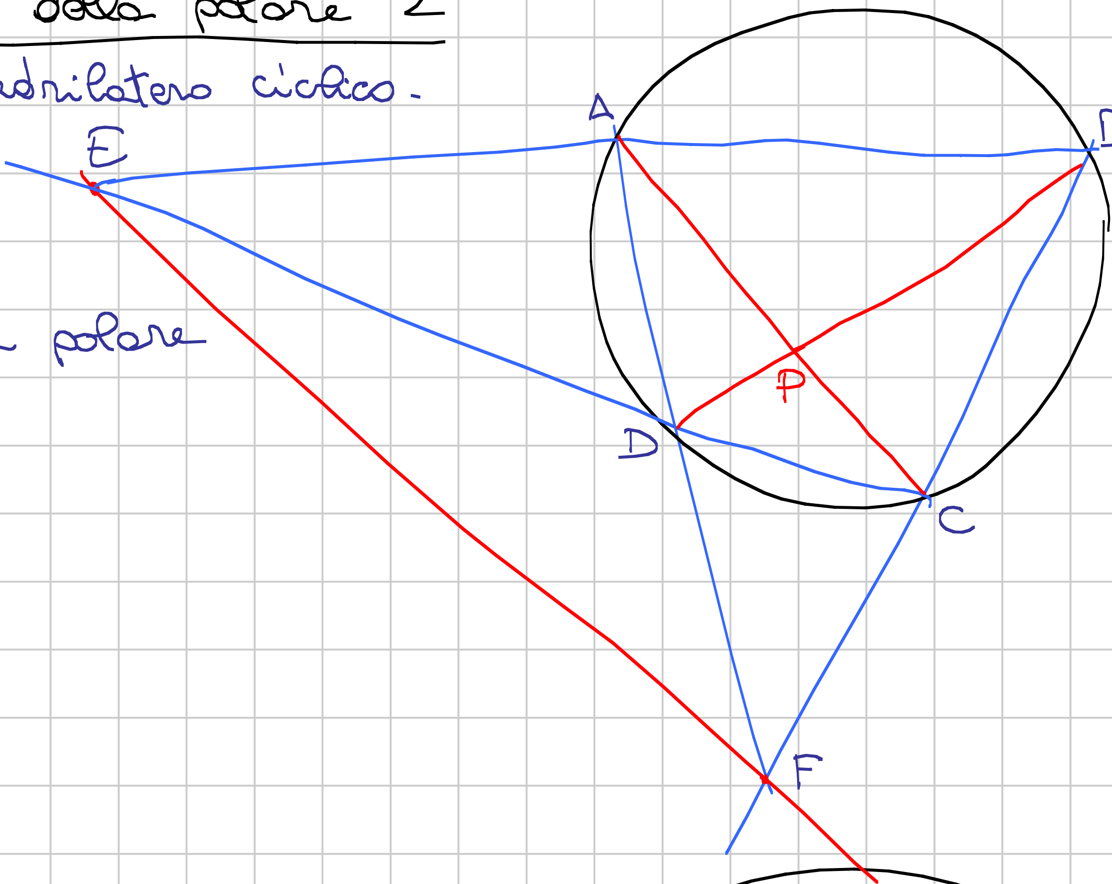
ABCD quadrilatero ciclico.

$E = AB \cap CD$

$F = BC \cap AD$

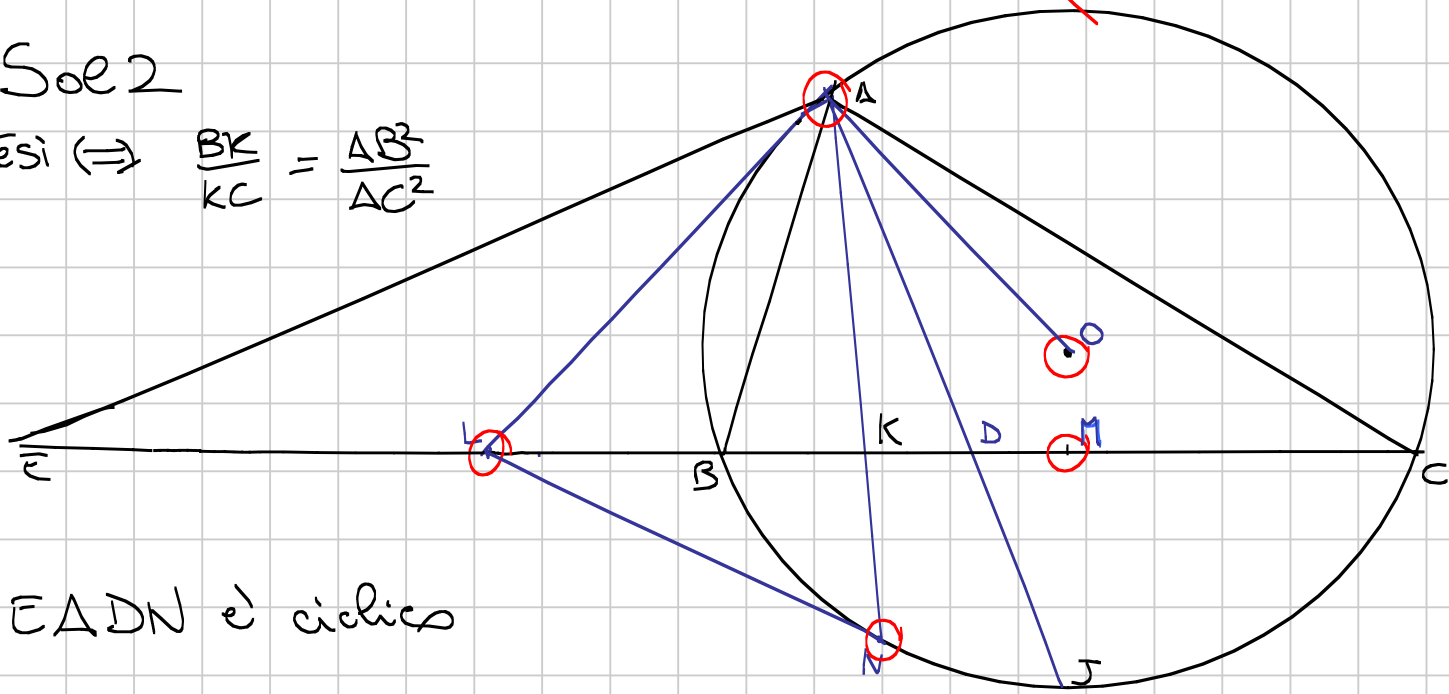
Tesi:

EF è la polare di P.



② Sol 2

Tesi $\iff \dfrac{BK}{KC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$



EADN è ciclico

$BK \cdot KC = AK \cdot KN = KD \cdot KE$

$$BK \cdot (BC - BK) = (BD - BK) \cdot (BK + BE)$$

$$BK \cdot BC = BD \cdot BK - BE \cdot BK + BE \cdot BD$$

$$BK \cdot (\underbrace{BC - BD}_{DC} + BE) = BE \cdot BD$$

$$BK = \frac{BE \cdot BD}{BE + DC}$$

Dal teo della bisettrice (interna ed esterna)

$$BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} \qquad CD = \dots$$

$$EB = \frac{AB \cdot BC}{|AB - AC|} \qquad CE = \dots$$

Sostituendo

$$BK = \frac{AB^2 \cdot BC}{AB^2 + AC^2} \qquad CK = \frac{AC^2 \cdot BC}{AB^2 + AC^2}$$

$$\frac{BK}{CK} = \text{ok}.$$

<u>Sol 3</u> E, N, J allineati: (ex)

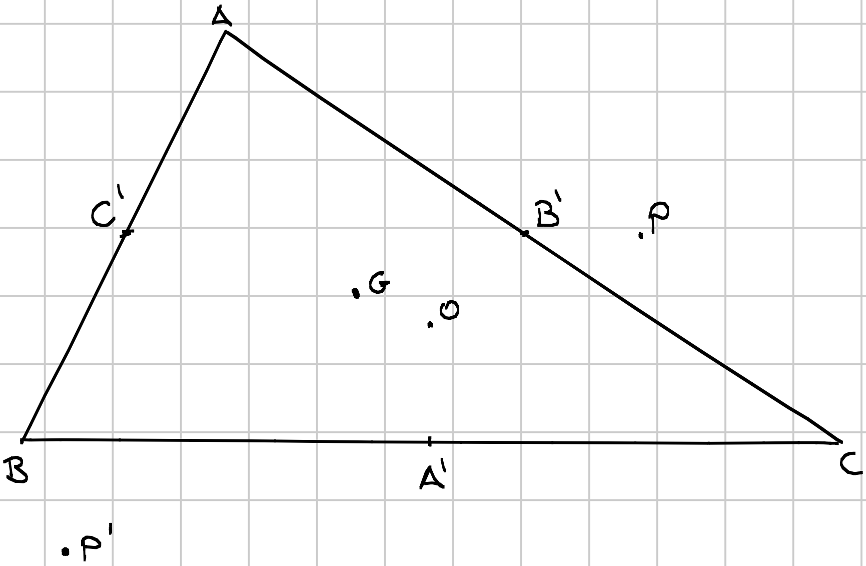
<u>Sol 4</u> Inversione d. centro A. (ex)
ABCN ciclico.

<u>Sol 5</u> <u>Lemma</u>: BC è simmediana per CAN
$\Rightarrow$ AN è simmediana per ABC

(ex)

$$\begin{cases} AP = A'P' \\ BP = B'P' \\ CP = C'P' \end{cases}$$

Tesi: PP' hanno un punto fisso



Sol 1 Vettori. Origine = G

$$A' = -\frac{A}{2}$$

$$\|P-A\|^2 = \|P' + \frac{A}{2}\|^2 \quad \text{e cicliche}$$

$$\begin{cases} |P|^2 + |A|^2 - 2A\cdot P = |P'|^2 + \frac{|A|^2}{4} + A\cdot P' & ① \\ |P|^2 + |B|^2 - 2B\cdot P = |P'|^2 + \frac{|B|^2}{4} + B\cdot P' & ② \\ \text{stessa con } C. \end{cases}$$

① − ②

$$\frac{3}{4}(|A|^2 - |B|^2) - 2(A-B)\cdot P = (A-B)\cdot P'$$

$$\frac{1}{4}(|A|^2 - |B|^2) = \overrightarrow{BA}\ \underbrace{\frac{2P+P'}{3}}_{\in \text{ retta } PP'} \quad \left(\text{è } \lambda P + (1-\lambda)P' \quad \lambda\in\mathbb{R}\right)$$

Similmente

$$\frac{1}{4}(|A|^2 - |C|^2) = \overrightarrow{CA}\ \frac{2P+P'}{3}$$

Lemma $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ indipendenti

$a_0 \in \mathbb{R}$, $b_0 \in \mathbb{R}$. $\cancel{\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}}$

Allora esiste un unico v t.c

$$a\cdot v = a_0 \qquad b\cdot v = b_0 \qquad (a_1 b_2 \neq a_2 b_1)$$

Dim

$v = (v_1, v_2)$. È un sistema di due eq in 2 incognite (risolvibile perché $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$).

Si applica con $v = \frac{2P + P'}{3}$ $\quad a = \overrightarrow{BA}$ $\quad b = \overrightarrow{CA}$

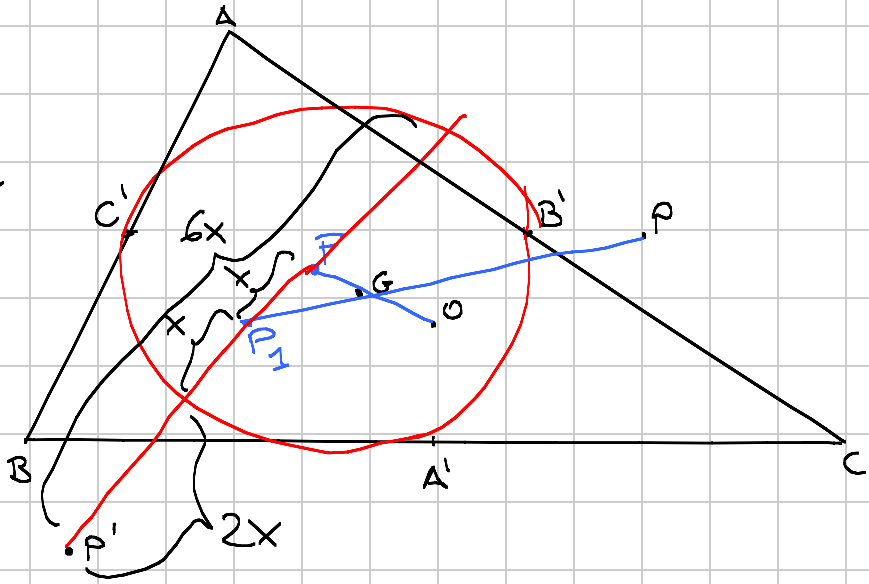
<u>Sol 2</u>

Omotetia di centro G e rapporto $-\frac{1}{2}$.

$A \to A'$ (e cicl)

$P \to P_1$

$O \to F$



Oss: $\begin{cases} P'A' = PA = 2P_1A' \\ P'B' = 2P_1B' \\ P'C' = 2P_1C' \end{cases}$

Luogo dei punti Q t.c
$P'Q = 2P_1Q$?

E' una circonferenza (di Apollonio) con centro su $P'P_1$.

La circonf di Apollonio rispetto a P' e P_1 di rapporto 2 è $\odot A'B'C'$.

$F \in P_1P'$

$$2x = \frac{R}{2} \Rightarrow x = \frac{R}{4}$$

$$P' - F = 4(P_1 - F)$$
$$= 4\left(-\frac{P}{2} - F\right)$$
$$= -2P - 4F$$

$$\frac{P' + 2P}{3} = -F$$ indipendente da P e P'.

sta sulla retta PP'

Quindi $P \in$ circonferenza di centro O e raggio $\frac{R}{2}$