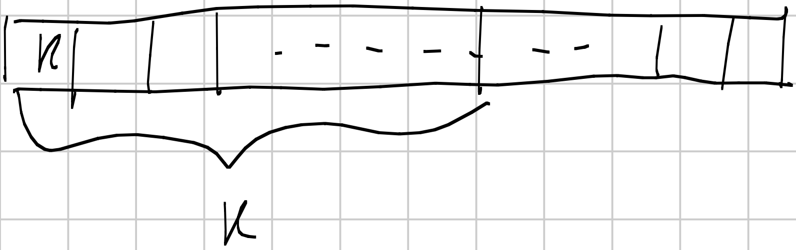
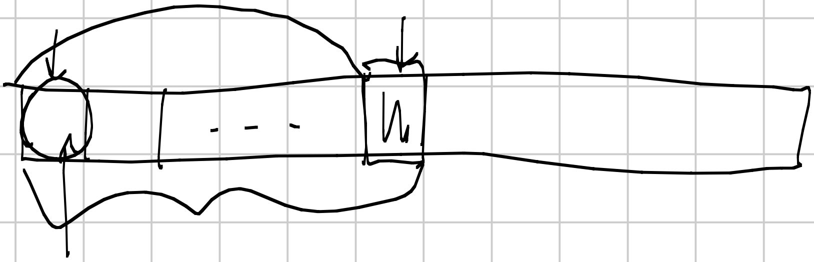
PREIMO 2012 – COMBINATORIA (M)

Titolo nota 21/05/2012

PROB. 1

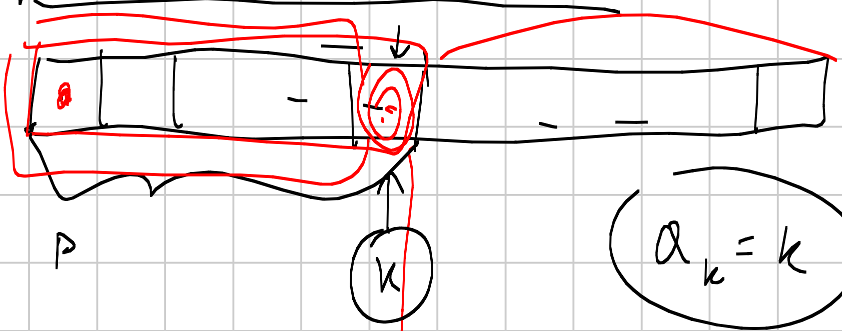


Periodo ?



max a_1

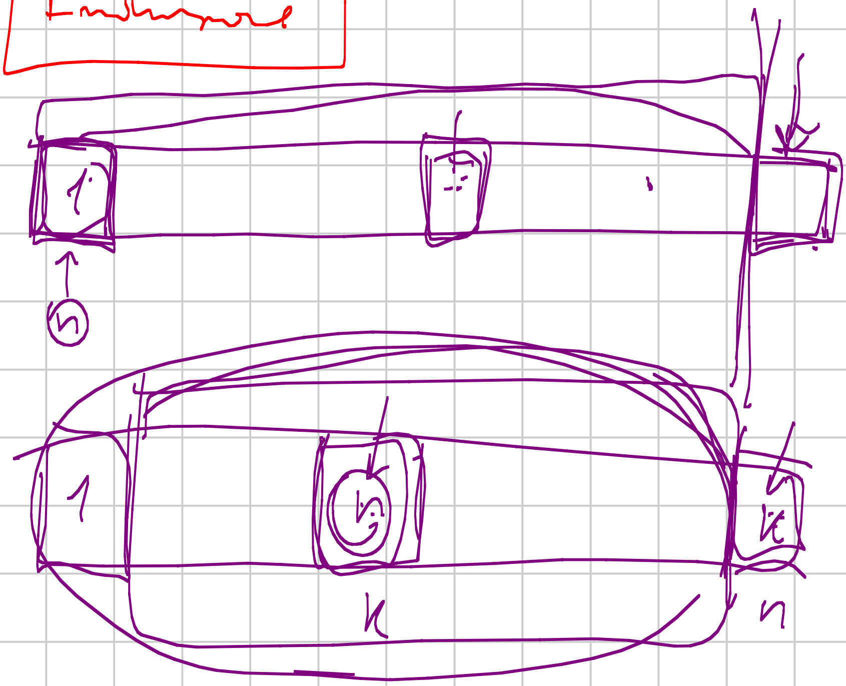
Sol. con invarianti



$a_k = k$

I'

Induzione



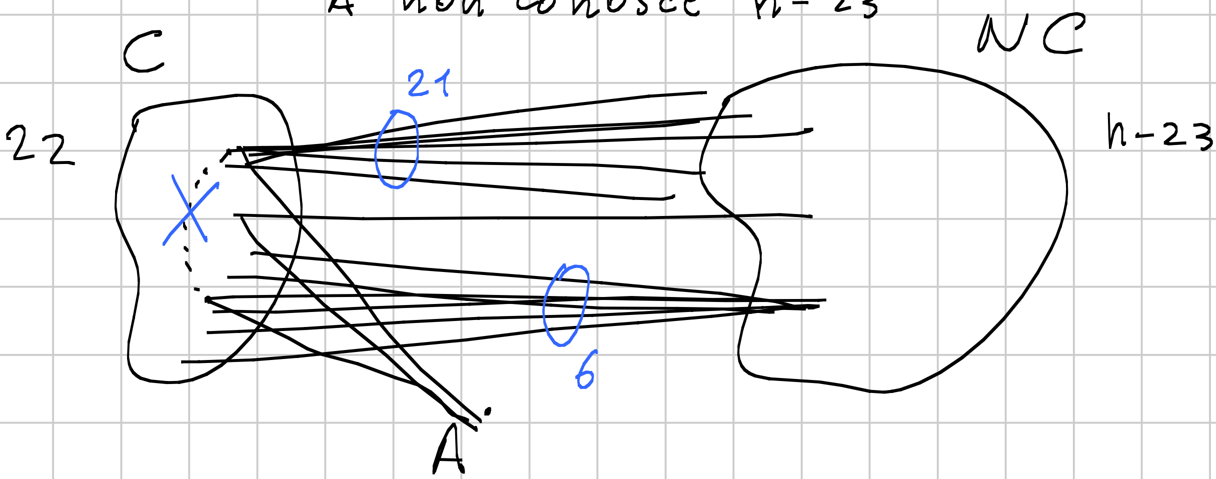
Festa con n invitati

- ciascuno conosce 22 altri
- se 2 si conoscono, nessuno li conosce entrambi
- se 2 <u>non</u> si conoscono, ci sono esattamente 6 altri che li conoscono entrambi.

A

A conosce 22

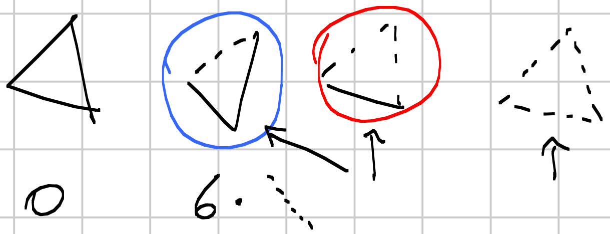
A non conosce $n-23$



quelli di C non si conoscono tra di loro ma conoscono A $\Rightarrow$ ciascuno conosce 21 di quelli di NC quelli di NC conoscono esattamente 6 di quelli di C ciascuno

Quindi in totale $21 \cdot 22 = 6 \cdot (n-23) \Rightarrow n = 100$.

Tutti i sottoinsiemi di 3 invitati:



$0 \qquad 6 \cdot$

$$\binom{n}{3}$$

$$6\,\frac{(n-23)\cdot n}{2} = \binom{22}{2}\cdot n$$

Prob. 3

A, B

$a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

A dice $c_1 \ldots c_i \ldots \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
B può sostituire quello che vuole degli a_j con c_i.
(deve sostituirne 1)
B vince se realizza una successione monotona non decrescente.
Quando può vincere B?
Sempre.

fino al primo indice $k+1$ per cui $a_{k+1} < a_k$

B : $a_1 \ldots \ldots a_N \longrightarrow a_1 \ldots a_k \;\infty\;\infty\;\infty \ldots \infty_N$

↑ succ. "ombra"

$A \to c_1$ B mette c_1 al posto che gli spetta secondo la successione "ombra":

- se $c_1 < a_1$ sost. c_1 a a_1
- se $c_1 = a_1 = a_2 = \ldots = a_i$ $c_1 < a_{i+1}$ sost. c_1 a a_{i+1}
- se $c_1 > a_i$ "finiti" sost. il primo "∞" con c_1

La successione ombra è sempre monotona non decrescente e a ogni passo è più "piccola" nel senso dell'ordinamento lessicografico.

Ma ogni coordinata finita può diminuire solo un numero finito di volte $\Rightarrow$ dopo al più $\sum_{i=1}^{k} a_i + 1$ passi sostituisco almeno un "∞".

Ora per ricorrenza dopo un numero finito di passi avrò sostituito tutti gli "∞". A quel punto la successione "ombra" diventa uguale a quella vera, che è quindi monotona non decrescente.

Prob. 4

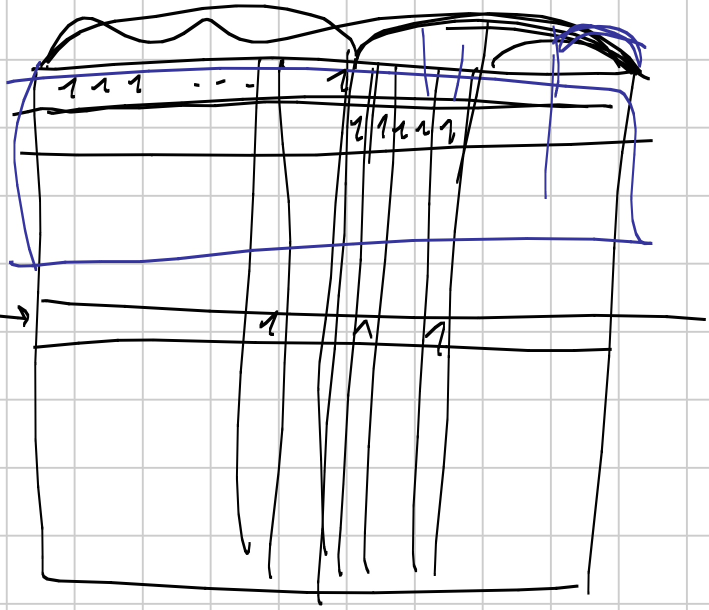
1000×1000

1) $\exists^{\text{no}}$ 10 righe t.c. se mi restringo ad esse ogni colonna ha almeno un 1.

2) $\exists^{\text{no}}$ 10 colonne t.c. se mi restringo ad esse ogni riga ha almeno uno 0

$\sim(2)$ $\forall$ scelta di 10 colonne restringendomi ho sempre una riga di 10 "1".

$$\boxed{\frac{1}{1000}\binom{1000}{10}}$$



$$\binom{1000}{10}$$

$$\boxed{S}$$

$$\boxed{\tilde{i}_S}$$

$$\boxed{\binom{500}{10}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1000}\binom{1000}{10}} \overset{?}{\geq} \binom{500}{10}$$

$$\frac{1}{1000} \cdot \underbrace{\frac{1000}{500} \cdot \frac{999}{499} \cdot \frac{998}{498} \cdot \ldots \cdot \frac{991}{491}}_{} \overset{?}{\geq} 1$$

$$\frac{1}{1000} \cdot 2^{10} > 1$$

$$\frac{1}{1000} \cdot \binom{\overset{250}{500}}{10} \overset{?}{\geq} \binom{\overset{125}{250}}{10}$$

$$\frac{1}{1000} \cdot \underbrace{\frac{500}{250} \cdot \frac{499}{249} \cdot \ldots \cdot \frac{491}{241}}_{> 2^{10}} \overset{?}{\geq} 1$$

$$> 1$$

500	250	125	63	32	16	8	0
1	2	3	4	5	6	7	8

$$\frac{1}{1000}\ \frac{124}{63}\cdot\frac{122}{62}\cdot\frac{123}{61}-\quad -$$

2^{10}