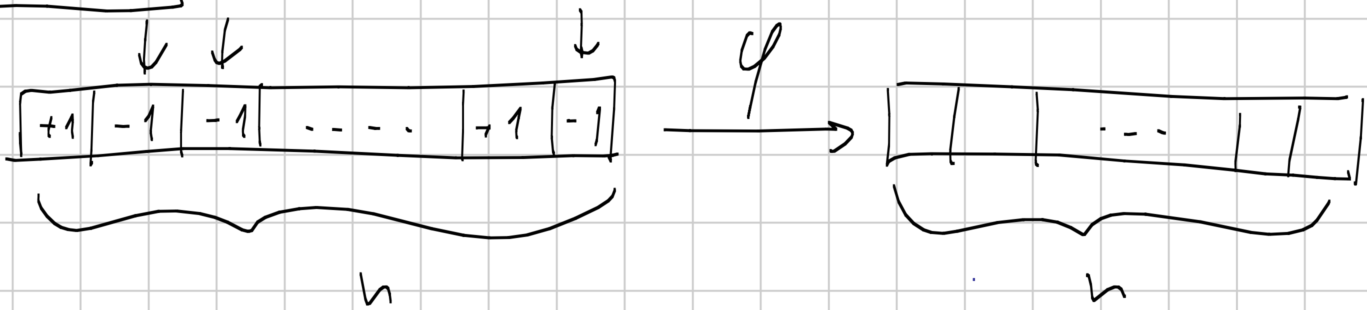
PRE IMO 2012 — COMBINATORIA (P)

Titolo nota 21/05/2012

PROB. 5



$$\varphi(S_1 \cdot S_2) = \varphi(S_1)\cdot\varphi(S_2)$$

$$\varphi\Big(\overbrace{(x_1, \dots, x_n)}^{S_1}\Big) = \big(\underline{x_1\cdot x_2,\ x_2\cdot x_3, \dots, x_n\cdot x_1}\big)$$

$$\varphi\Big(\underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{S_2}\Big) = \big(\underline{-\ -\ -\ \ -\ -}\big)$$

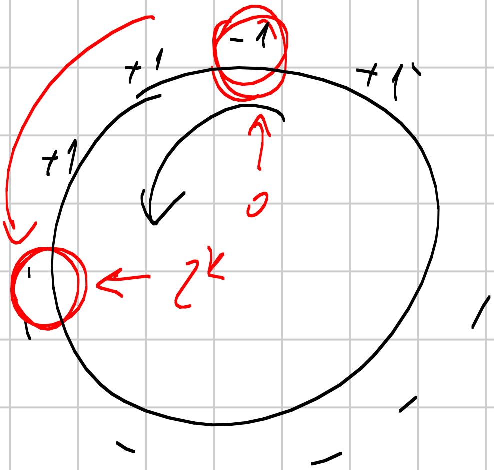
$$\varphi(S_1\cdot S_2) = \varphi\big((x_1y_1, \dots, x_ny_n)\big) =$$

$$= \big(\underline{x_1y_1x_2y_2,\ x_2y_2x_3y_3, \dots, x_ny_nx_1y_1}\big) =$$

$$= \varphi(S_1)\cdot\varphi(S_2)$$

$$\varphi^{(k)}(\underline{S}) = (1, 1, \dots, 1)$$

$$\boxed{S = e_1\cdot e_2 \cdots e_k}$$



$\boxed{e}$ $\boxed{\tau_k e}$

$$\boxed{\varphi^{(2^k)}(e) = e \cdot (\tau_{2^k} e)}$$

$$\boxed{\varphi^{(2^{k+1})}(e)} = \varphi^{(2^k)}\left(\varphi^{(2^k)}(e)\right) =$$

$$= \varphi^{(2^k)}\left(e \cdot (\tau_{2^k} e)\right) =$$

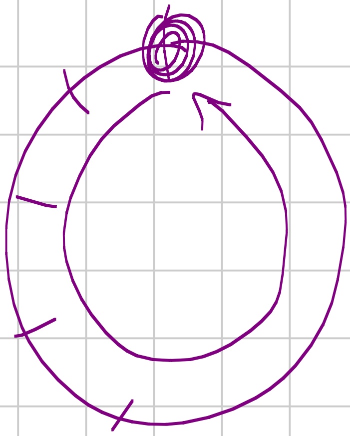
$$= \varphi^{(2^k)}(e) \cdot \varphi^{(2^k)}(\tau_{2^k} e) =$$

$$= \left(e \cdot (\tau_{2^k} e)\right) \cdot \tau_{2^k} \varphi^{2^k}(e) =$$

$$= e \cdot \tau_{2^k} e \cdot \tau_{2^k}(e \cdot \tau_{2^k} e) =$$

$$= e \cdot \cancel{\tau_{2^k} e \cdot \tau_{2^k} e} \cdot \tau_{2^{k+1}} e =$$

$$= \boxed{e \cdot \tau_{2^{k+1}} e}$$



$$\varphi^{(n)}(e) = (+1, \dots, +1)$$

$m \geq n \quad \varphi^{(m)}(e) = \varphi^{(m-n)}(1, \dots, 1) = (1, \dots, 1)$

C6.

n carte

C C . . . C C

C ~~C~~ C

S S

- n carte $\longrightarrow$ $n-3$ $\quad (n \geq 5)$

C ~~C~~ C C C

S S ~~C~~ C

S ~~C~~ S

C C

$n \equiv 2 \ (3) \longrightarrow$ arrivo in fondo

$n \equiv 0 \ (3) \longrightarrow$ C ~~C~~ C S S ho vinto

- magari arrivo in fondo $\Longleftrightarrow$ $n \equiv 0, 2 \ (3)$?

- cerco un INVARIANTE!

$$\underbrace{S\ \ S\ \ S}_{\text{carte scoperte alla sua sx}}\ \underset{i}{C} \qquad a_i = (-1)^{\#S \text{ alla sua sinistra}}$$

$$I = \sum_{i \text{ coperta}} a_i \ (3) \quad \text{è INVARIANTE}$$

i			
CCC	$\longrightarrow$	SS	$-a_i - a_i - a_i$
SCS	$\longrightarrow$	CC	$-a_i - a_i - a_i$
CCS	$\longrightarrow$	SC	$-a_i - a_i - a_i$
SCC	$\longrightarrow$	CS	$-3a_i$

- quando rimango con 2 carte...
  - la parità delle scoperte non cambia!
    (# S rimane =, fa +2 o −2 a ogni mossa)

$\Rightarrow$ alla fine

$$I \text{ è } 0 \text{ o } 2.$$

- All'inizio I è n (3)

$$\Rightarrow n \equiv 0 \text{ o } 2 \ (3).$$

$\square$

5000 appassionati di cinema
si possono fare 100 gruppi di due tipi:

1) tutti hanno visto uno stesso film

2) ciascuno ha visto un film che nessun altro del gruppo ha visto.

Dim. per induzione che "$\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ appassionati si possono raggruppare in n gruppi dei due tipi" $n = 0, 1, 2$

Supponiamo la tesi vera per $n-1$, e consideriamo $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ appassionati.

Sia S un insieme minimale di film tale che ciascuno ne abbia visto almeno 1.

- $\#S \leq n$ 1° gruppo: quelli del film 1
  2° " " " 2 \ film 1
  ⋮

- $\#S > n$ Osserviamo che per ogni film di S c'è un appassionato che in S ha visto solo quello. Se no esiste un film per cui nessuno ha visto solo quello in S $\to$ lo posso togliere $\rightarrow$ assurdo per minim. di S.

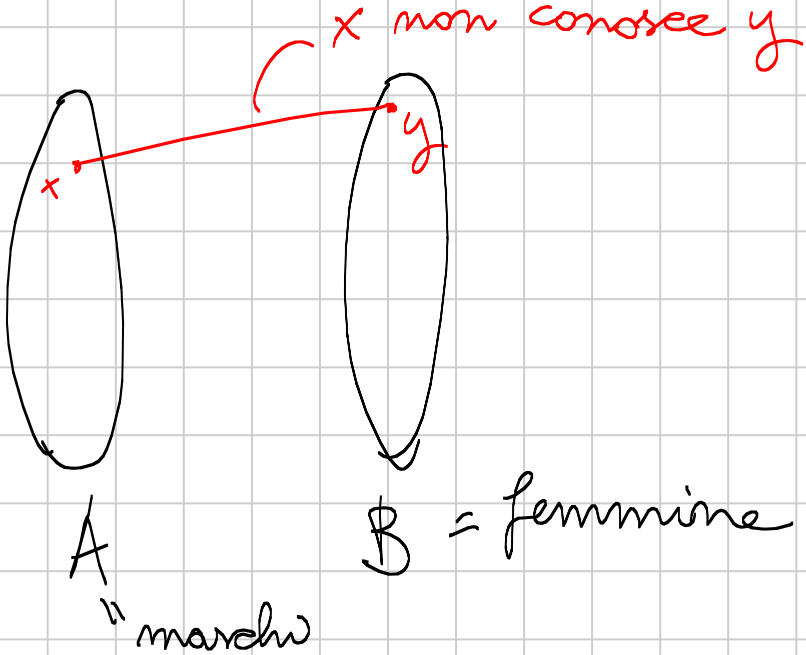
Raggruppo questi appassionati: è un gruppo del secondo tipo.

Il resto degli appassionati sono $\leq \left[\frac{n^2}{2}\right] - n \leq \frac{(k-1)^2}{2}$

Quindi questi li posso mettere in $k-1$ gruppi.

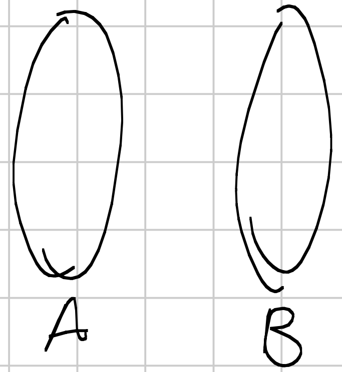
$\square$

C8



x_i ragazzo aveva a_i amiche
$\rightarrow d(x_i) = n - a_i$ e voglio scegliere $f(x_i) = 2d - a_i$ archi uscenti da x_i.

Lo stesso per le ragazze $y_1 \dots y_n$.
Voglio aver scelto $f(y_i)$ archi uscenti da y_i.



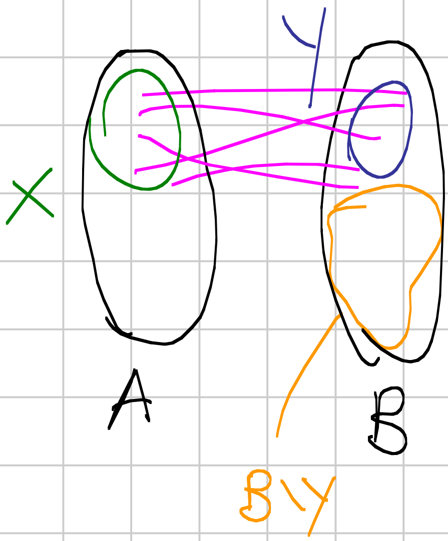
Teorema di Hall

$\forall X \subseteq A$

$|\Gamma(X)| \geq |X|$

$\iff \exists$ "perfect matching"

"f-fattore"



1 • $\sum_{x\in A} f(x) = \sum_{y\in B} f(y) = S$

2 • $\sum_{x\in X} f(x) \leq m(X,Y) + \sum_{y\in B\setminus Y} f(y)$

archi fra X e Y

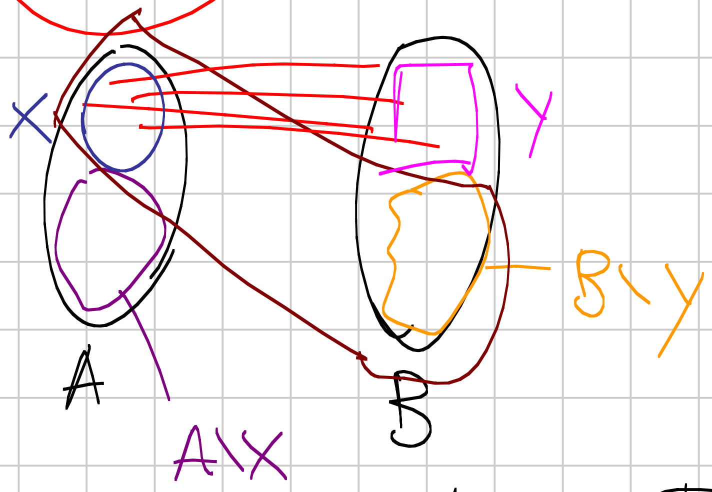
la condizione (1 + 2) é necessaria per avere un f-fattore; ma é anche sufficiente!

Per induzione su S.

- Suppongo di avere SEMPRE < nelle condizioni 2.
  Prendo un tizio in A e gli assegno uno in B; TOLGO l'arco e aggiorno f.
  Controllo che le ipotesi siano ancora verificate.

• Esiste un caso con = !

$$\underbrace{\sum_{x\in X} f(x)}_{S-\sum_{x\in A\setminus X} f(x)} = m(X,Y) + \underbrace{\sum_{y\in B\setminus Y} f(y)}_{S-\sum_{y\in Y} f(y)}$$



Scelgo in partenza TUTTI gli archi fra X e Y ; aggiorno f e a quel punto devo sistemare

$$X \longleftrightarrow B\setminus Y$$

$$Y \longleftrightarrow A\setminus X$$

problema

e se $\exists\, y\in Y \quad f(y) < \underbrace{d_X(y)}_{\text{i vicini di } y \text{ in } X}$?

NON può succedere!

$$\sum_{t\in Y\setminus\{y\}} f(t) \le \underbrace{m(Y\setminus\{y\}, X)}_{m(Y,X)-d_X(y)} + \sum_{x\in A\setminus X} f(x)$$

$$< m(Y,X) - f(y) + \sum_{x\in A\setminus X} f(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{t\in Y} f(t) < m(X,Y) + \sum_{x\in A\setminus X} f(x)$$

No!
deve essere $=$

Ci basta dimostrare che le hp sono verificate per il nostro grafo!
(conti)

$$\underset{\text{fame di amici}}{f(x)} + \underbrace{m - d(x)}_{\text{amici iniziali}} = 2d$$

Hope: $\forall X \subseteq A,\ Y \subseteq B$

$$\boxed{\sum_{x\in X} f(x) \le m(X,Y) + \sum_{y\in B\setminus Y} f(y)}$$

$$(2d-m)|X| + m(X,B) \le m(X,Y) + (2d-m)(m-|Y|) + m(A, B\setminus Y)$$

$$(2d-m)(|X|+|Y|-m) \overset{?!}{\le} m(A\setminus X, B\setminus Y)$$

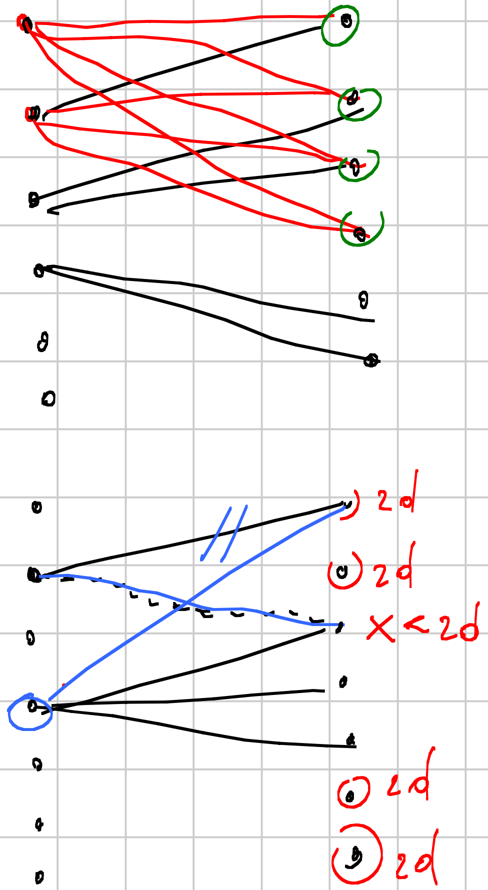
$$\underset{\alpha}{|X|} \ge \underset{\beta}{|Y|}$$

$$|A\setminus X|(m-d) = (m-|X|)(m-d)$$

$$(2d - n)(\alpha + \beta - n) \overset{?}{\leq} (n-\alpha)(n-d)$$

$\longrightarrow$ andate avanti da soli

$d = 2$



Idea: aggiungere a mano senza sforare