PRE IMO 2012 — Teoria dei Numeri (P)

Titolo nota 22/05/2012

$\boxed{N.5}$ $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_na_1$ prog. arit. (non costante)

p. es. crescente

$n = 2k$ pari $\quad a_1a_2 < a_2a_3 < a_3a_4 < \dots \; a_{2k-1}a_{2k} < a_{2k}a_1$

$a_1 < a_3 < a_5 < \dots < a_{2k-1} < a_1$

$n = 2k+1$ dispari ?

$b_1b_2 = 1, \; b_2b_3 = 2, \dots, \; \boxed{b_{2k+1}b_1 = 2k+1}$

$x \in \mathbb{R}_+ \quad b_1 = x, \; b_2 = \frac{1}{x}, \; b_3 = 2x, \; b_4 = \frac{3}{2x}, \; b_5 = \frac{8}{3}x$

$= \frac{2 \cdot 4}{3}x$

$$b_{2i} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2i-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2i-2)} \frac{1}{x}$$

$$b_{2i+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2i)}{1 \cdot 3 \cdots (2i-1)} x$$

$$\frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} x^2 = 2k+1$$

$$x = \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}}$$

$a_i = b_i \sqrt{(2k+1)!}$ $\longrightarrow$ propr. arit. dei b_i

$=$ prog arit. degli a_i

Si verifica che :

$$a_{2i} = b_{2i}\sqrt{(2k+1)!} = (1\cdot 3 \cdot \ldots (2i-1))\,(2i \cdot \ldots \cdot 2k)$$

$$a_{2i+1} = b_{2i+1}\sqrt{(2k+1)!} = (2 \cdot \ldots 2i)\,((2i+1)\ldots(2k+1))$$

Es. : $n = 2k+1 = 5$

$a_1 = 1\cdot 3\cdot 5 = 15$ $\qquad a_2 = 1\cdot 2\cdot 4 = 8$

$a_3 = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$ $\qquad a_4 = 1\cdot 3\cdot 4 = 12$

$a_5 = 2\cdot 4\cdot 5 = 40$

$a_1 a_2 = 120 \qquad a_2 a_3 = 240 \qquad a_3 a_4 = 360$

$a_4 a_5 = 480 \qquad a_5 a_1 = 600$

[Sol alternativa: induzione $2k-1 \to 2k+1$]

N6

$$f(a) + f(b) = f(a+b+pab) \qquad \forall a,b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

$$f(0) + f(1) = f(1) \implies f(0) = 0$$

$$\boxed{A_{i+1} = 1 + A_i + pA_i} \qquad \approx (a+1)(b+1)$$

$A_i = \frac{B_i}{p}$

$$\frac{B_{i+1}}{p} = 1 + \frac{B_i}{p} + p\frac{B_i}{p}$$

$$B_{i+1} = p + B_i + pB_i = p + (1+p)B_i$$

$B_i = C_i - 1$

$$C_{i+1} - 1 = p + (1+p)(C_i - 1) = -1 + (1+p)C_i$$

$$C_{i+1} = (1+p)C_i$$

$$\underline{C_i = (1+p)^i} \to B_i = (1+p)^i - 1 \to \boxed{A_i = \frac{(1+p)^i - 1}{p}}$$

$$f(A_i) + f(1) = f(1 + A_i + pA_i) = f(A_{i+1})$$

Per induzione: $f(A_i) \equiv i \cdot \underbrace{f(1)} \pmod{p^n}$

$A_i \equiv A_j \pmod{p^n} \qquad (i > j)$

$(1+p)^{i-j} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}} \qquad \underline{|i-j| < p^n} \qquad \nu_p(i-j) \leq n-1$

$$\nu_p\left((1+p)^{i-j} - 1\right) = 1 + \nu_p(i-j) \leqslant n$$

se $p \neq 2$ gli A_i formano un set completo di residui $\pmod{p^n}$.

$p \equiv 1 (2)$ vi sono p^n funzioni (1 per ogni possibile scelte di $f(1) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$)

$A_{i+1} = 1 + A_1 + pA_i \implies A_{i+j} = A_i + A_j + pA_iA_j$

(semplice calcolo).

$p = 2. \quad n = 1$ il discorso è analogo, $\#\{f\} = 2$.

$p = 2 \quad n > 1 \qquad (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$ non è ciclico $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$

(Lemma di Hensel: $a \in (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$ $\begin{cases} +5^k \\ -5^k \end{cases}$)

$$A_i = \frac{(1+2)^i - 1}{2} = \frac{3^i - 1}{2} \qquad A_i \equiv \{1, 0\} \pmod 4$$

$A_i \equiv A_j \pmod{2^n} \implies i \equiv j \pmod{2^{n-1}}$

$$\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} = \{A_i \mid 0 \leq i < 2^{n-1}\} \cup \{-1 - A_i \mid 0 \leq i < 2^{n-1}\}$$

unione disgiunta
di due insiemi di 2^{n-1} elementi

$A_i = -1 - A_j \qquad 0 \leq i, j < 2^{n-1}$
impossibile mod 4.

$$\underline{f(1)} = 2c$$

$$f(A_{2^{n-1}}) \equiv 2^{n-1} \cdot f(1) \equiv f(0) \pmod{2^n}$$

$$2f(-1) = f(-1)+f(-1) = f((-1)+(-1)+2(-1)^2) = f(0) = 0$$

$$\underline{f(-1)} = \varepsilon\, 2^{n-1} \qquad \varepsilon \in \{0,1\}$$

$$\begin{cases} f(A_i) = i \cdot f(1) = 2ic \\ f(\underline{-1-A_i}) = 2ic + \varepsilon\, 2^{n-1} \quad \boxed{\cdot} \end{cases}$$ sono effettive soluzioni dell'eq. funz.

(a,b)

$a, b \in \{A_i\}$ ok

$a \in \{A_i\}$ $b \in \{-1-A_i\}$ $\longrightarrow$ verifica

$a, b \in \{-1-A_i\}$ $\longrightarrow$ verifica

$$\#\{f\} = \underset{\text{scelta di } \varepsilon}{2} \cdot \underset{\text{modi di scegliere } c}{2^{n-1}} = 2^n.$$

$$f(A_i) + f(-1-A_j) \overset{?}{=} f(A_i + (-1-A_j) + 2A_i(-1-A_j))$$

$$2ic + 2jc + \varepsilon\, 2^{n-1} \overset{?}{=} f\Big(\underbrace{\tfrac{3^i-1}{2} + (-1) - \tfrac{3^j-1}{2} + 2\,\tfrac{3^i-1}{2}\Big(-\tfrac{3^j-1}{2}-1\Big)}\Big)$$

$$A_{i+j} = A_i + A_j + 2A_iA_j$$

$\boxed{\cdot}$ $$f(-A_i-1) = f(A_i - 1 + 2(-1)(A_i))$$
$$= f(A_i) + f(-1)$$
$$= 2ic + \varepsilon\, 2^{n-1}.$$

N7. $\forall k \geq 1$ esistono infinite soluzioni $(a,b) \in \mathbb{N}_0^2$ di:

- $(a+1)^2 + \dots + (a+k)^2 = b^2 + (b+1)^2 + \dots + (b+k)^2$.

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $k a^2 + k(1+k)a = (k+1)b^2 + k(1+k)b$

$$\boxed{k\,(2a+(1+k))^2 - (k+1)(2b+k)^2 = k\cdot(k+1).}$$

$a=0 \quad b=0$ è sol.

k dispari $\to$ $k \mid b \quad b = kc$

$(2a+k+1)^2 - k(k+1)(2c+1)^2 = (k+1)$

k pari $\to$ $(k+1) \mid a$

$$\boxed{m^2 - (k\cdot(k+1))\,n^2 = (k+1)}$$

ammette infinite sol in $\mathbb{N}_0^2$

Ammette una soluzione $(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$

L'equazione di Pell

$A^2 - D B^2 = 1$, se $D > 0$ non è un quadrato, ammette infinite soluzioni

$D = k(k+1) \notin \square$

$$\boxed{A^2 - k(k+1)B^2 = 1 \quad \text{ammette infinite sol } (A,B) \in \mathbb{N}_0^2}$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{k(k+1)}] = \{ a + b\sqrt{k(k+1)} \}$$

$$N(a + b\sqrt{k(k+1)}) = (a + b\sqrt{k(k+1)})(a - b\sqrt{k(k+1)})$$

$$= a^2 - k(k+1)b^2$$

N è moltiplicativa

$\heartsuit \quad N\left(m+\sqrt{k(k+1)}\,n\right) = k+1$

$\omega \quad N\left(A+\sqrt{k(k+1)}\,B\right) = 1$

$C+\sqrt{k(k+1)}\,D \qquad C, D \in \mathbb{N}_0$

$\forall r \geq 1 \quad N\left(\overbrace{\left(m+\sqrt{k(k+1)}\,n\right)\left(A+\sqrt{k(k+1)}\,B\right)^r}\right)$

$= \quad k+1$

k dispari $\to$

$k \mid (2k+b)^2 \quad \overset{NO}{\Rightarrow} \quad k \mid (2k+b)$

$k = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots$

—— Curiosamente, $365 = 13^2+14^2 = 10^2+11^2+12^2$.

Oss. Esiste ~~una~~ sol. con numeri consecutivi?

$(m+k)^2 + \ldots + (m+1)^2 = m^2 + (m-1)^2 + \ldots + (m-k)^2$

$k(k+1)m \qquad = m^2 - k(k+1)m$

$m^2 = 2k(k+1)\,m$

$m = 2k(k+1) \quad \boxed{\text{SOL.}}$

$k=2 \to 12$

$\boxed{\text{N. 8}}$ $\quad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad n$ dispari >0.

$f(x) - f(y) \mid x^n - y^n \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}$

Oss. Vanno bene le funzioni del tipo:

$$f(x) = \pm x^d + c \qquad d \mid n, \; c \in \mathbb{Z}.$$

Mi basta trovare tutte le funzioni t.c. $f(0)=0$.

Sostituzione : $(x,y) \to (p,0)$ $\quad p$ primo

$$f(p) \mid p^n$$

Divisori di p^n : $\pm p^a$ $\quad 0 \le a \le n$ $\quad$ FINITI

Primi INFINITI

$\Downarrow$

$\exists$ un sottoinsieme di primi $\mathcal{P}$ infinito per cui

$$f(p) = \pm p^d \qquad (0 \le d \le n)$$

Per simmetria, posso supporre che il segno sia $+$

$d=0$? $\quad p_1 \ne p_2 \in \mathcal{P}$ $\quad \underbrace{f(p_1)-f(p_2)}_{0=1-1} \mid p_1^n - p_2^n \ne 0$

Divido n per d : $n = qd + r$, $\quad 0 \le r < d$.

$x \in \mathbb{Z}$ intero qualsiasi, $\quad p \in \mathcal{P}$

$$f(p) - f(x) = p^d - f(x) \mid p^n - x^n$$

$$p^n = p^r (p^d)^q$$

$$p^n - x^n = p^r (p^d)^q - x^n = p^r f(x)^q - x^n \equiv 0 \pmod{p^d - f(x)}$$

Per p grande,

$$|p^r f(x)^q - x^n| < |p^d - f(x)|$$

Ne segue $\quad p^r f(x)^q - x^n = 0 \quad$ (se $x \neq 0$)

$\Rightarrow p^r$ costante $\Rightarrow r = 0 \qquad$ DIVISIBILITÀ

(OPPURE $\quad x = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \qquad p^d - 1 \mid p^n - 1$)*

$$f(x)^q = (x^d)^q$$

n dispari
q dispari

radice q-esima

$$f(x) = x^d$$

(tornando alle ipotesi $\pm$, $f(0)=0$
ottengo le soluzioni $\quad f(x) = \pm x^d + c$).

* Se $f(x) \mid g(x)$ per infiniti valori interi k -
allora $f(n) \mid g(n) \quad \forall n$