PreIMO 2012

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

F. Morandin

Pre IMO 2012 ALGEBRA mattino

Titolo nota 21/05/2012

$\boxed{1}$ $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sum x = 0 \\ \sum x^3 = 18 \\ \sum x^7 = 2058 = 6 \cdot 343 = 6 \cdot 7^3 \end{cases}$$

$x + y + z = 0 \qquad \boxed{z = -x - y}$

$z^3 = -(x+y)^3 = -x^3 - y^3 - 3xy(x+y)$

$18 = \sum x^3 = -3xy(x+y) = 3xyz \qquad \boxed{xyz = 6}$

$z^7 = z^3 \cdot z^3 \cdot z \ \ldots$

$= -(x+y)^7 = -x^7 - y^7 - 7xy\left(x^5 + 3x^4y + 5x^3y^2 + 5x^2y^3 + \ldots\right)$

$6 \cdot 7^3 = -7xy(\ \ldots\ )$

$\cancel{6} \cdot 7^2 = x\cancel{y}z\left(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4\right)$

$7^2 = \left(x^2 + xy + y^2\right)^2$

$\boxed{x^2 + xy + y^2 = \pm 7}$

$\boxed{x^2y + xy^2 = -6}$

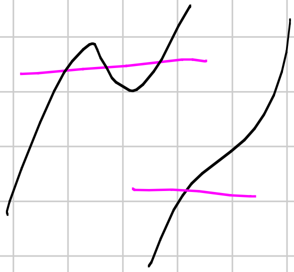
1	3	5	5	3	1		
	1	2	3	2	1		
1	2	3	2	1			
1	1	1					
	1	1	1				
		1	1	1			

$x^3 + x^2y + xy^2 = \pm 7x \qquad x^3 \mp 7x - 6 = 0$

$x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x+2)(x-3)$

$x^3 + 7x - 6$ ha una sola radice reale

$3x^2 + 7$ non ha radici reali



α, β, γ i numeri cercati

$$p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - \cancel{ax^2} + bx - c$$

$a = \alpha + \beta + \gamma = 0$

$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

$c = \alpha\beta\gamma$

$p(\alpha) = 0 \quad \alpha^3 = c - b\alpha$

$\beta^3 = c - b\beta$

$\gamma^3 = c - b\gamma$

$18 = \sum \alpha^3 = 3c \qquad c = 6 \qquad p(x) = x^3 + bx - 6$

$\sum \alpha^7 \qquad \alpha^7 = (6 - b\alpha)^2 \alpha = \alpha 36 - 12b\alpha^2 + b^2(6 - b\alpha)$

$6 \cdot 7^3 = \sum \alpha^7 = 18b^2 - 12b\sum\alpha^2 = 18b^2 + 24b^2 = 42b^2$

$\sum \alpha^2 = (\sum\alpha)^2 - 2\sum\alpha\beta = 0 - 2b$

$b^2 = 7^2 \qquad b = \pm 7$

$p(x) = x^3 + bx - 6 \qquad \alpha^3 = -b\alpha + 6 \qquad \alpha^7 = -b\alpha^5 + 6\alpha^4$

$$\sum \alpha^7 = -b\sum\alpha^5 + 6\sum\alpha^4 = -b\left(-b\sum\alpha^3 + 6\sum\alpha^2\right) + $$
$$+ 6\left(-b\sum\alpha^2 + 6\sum\alpha\right)$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a}{b+2c+d} \geq k \qquad a, b, c, d > 0$

omogenea, ciclica ma non simmetrica

tutti $= 1 \quad LHS = 1 \quad k \leq 1$

$a = 0$ altri $= 1 \quad LHS = 7/6$

$a = b = 0 \quad c = d = 1 \quad LHS = 2$

$a = c = 0 \quad b = d = 1 \quad LHS = 1$

Dimostro che $\sum_{cyc} \frac{a}{b+2c+d} \geq 1$

$$\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a}^2}{b+2c+d} \overset{!}{\geq} \frac{16}{\sum_{cyc}\left(\frac{b}{a}+2\frac{c}{a}+\frac{d}{a}\right)} \geq 1$$ HOPELESS

$$\sum \frac{1}{x} \geq \frac{4^2}{\sum x}$$

$$\boxed{\sum \frac{a^2}{x} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum x}}$$

Lemma di Titu

Disug. di BERGSTROM

$$\sum \sqrt{x}^2 \sum \frac{a^2}{\sqrt{x}^2} \geq \sum \sqrt{x}\,\frac{a^2}{\sqrt{x}} = \sum a^2$$

$$\text{LHS} \geq \frac{(\sum \sqrt{a})^2}{\sum (b+2c+d)} \geq 1$$ HOPELESS

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{ab+2ac+ad} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum (ab+2ac+ad)} \geq 1$$ HOPE

$$\left(\sum_{cyc} a\right)^2 \overset{?}{\geq} \sum_{cyc}(ab+2ac+ad) = \frac{1}{2}\sum_{sym} ab + 2ac + 2bd$$

$$\left(\sum_{cyc} a\right)^2 = \sum_{cyc} a^2 + \frac{1}{2}\sum_{sym} ab \qquad 4ab+4ac+4ad+4bc+4bd+4cd$$

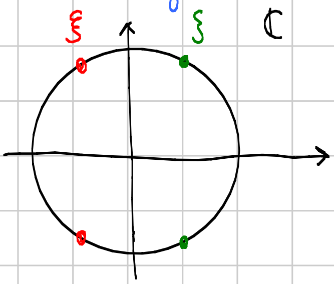
$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 2ac+2bd$$

smoothing

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+2c+d} \overset{!}{\geq} \left(\frac{\overbrace{\frac{a+c}{2}}^{x}}{b+2\frac{a+c}{2}+d} + \frac{\overbrace{\frac{b+d}{2}}^{y}}{c+2\frac{b+d}{2}+a} \right) \cdot 2 = 1$$

$\boxed{3}$ $(x^2+x+1)f(x^2-x+1) = (x^2-x+1)g(x^2+x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

sono uguali come polinomi



$$0 = \text{LHS}(\xi) = \text{RHS}(\xi) = (\overbrace{\xi^2-\xi+1}^{-2\xi})\,g(0)$$

$$g(x) = x\,g_1(x)$$

analogamente

$$f(x) = x\,f_1(x)$$

$f_1(x^2-x+1) = g_1(x^2+x+1) \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = g_1(x) = a$

1) LHS simmetrica risp a $\frac{1}{2}$, RHS simm risp a $-\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ periodico $\Rightarrow$ costante

2) $f_1(x) = \sum_0^n a_k x^k \qquad g_1(x) = \sum_0^n b_k x^k$

$$\sum_0^n a_k (x^2-x+1)^k = \sum_0^n b_k (x^2+x+1)^k$$

$$a_n x^{2n} - n a_n x^{2n-1} + \ldots = b_n x^{2n} + n b_n x^{2n-1}$$

$n=0 \quad a_0 = b_0 = a.$

3) $f_1(x) = \prod_{k=1}^n (x-\alpha_k) \qquad g_1(x) = \prod_1^n (x-\beta_k)$

$$\prod_1^n (x^2-x+1-\alpha_k) = \prod (x^2+x+1-\beta_k)$$

$(x-?)(x-??)$

somma $2n$ radici è n somma $2n$ radici è $-n$

$\boxed{4}$ hp $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = n - f(f(n-1)) & n \geq 2 \end{cases}$

ts $\{ f(n+f(n)) = n \qquad n \geq 1$

$f(n) \overset{?}{=} \lfloor \alpha n + \beta \rfloor \qquad \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \beta \overset{?}{=} \alpha$

★ $f(n+1) - f(n) = 1 - [f(f(n)) - f(f(n-1))]$

$f(n+1) - f(n) \in \{0,1\}$ per induzione
$f(n) \leq n$

$\rightarrow f(n) = f(n-1) \Rightarrow f(n+1) - f(n) = 1$

n	$f(n)$	$f(f(n))$
1	1	1
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	3	2
6	4	3
7	4	3
8	5	3
9	6	4
10	6	4
11	7	4

$$* = f(n+1+f(n+1)) - f(n+f(n)) \overset{?}{=} n+1-n = 1$$

$$n+1+f(n+1) - (n+f(n)) \in \{1,2\}$$

$$* \in \{0,1,2\}$$

Ora escludo che sia 0

$$f(n+1+f(n+1)) = f(n+f(n)) \Rightarrow f(n+1) = f(n)$$

$$n-1 \overset{ind}{=} f(n-1+f(n-1)) = f(n-1+f(n)-1) = f(n+f(n)-2)$$

$$f(n+f(n)) \overset{ind}{=} n$$

$n \quad n \quad ? \quad n-1$ $\qquad f(n+f(n)+1) = n$

$$n-1 = f(n+\underbrace{f(n)-1}_{n-1}) = n-1+f(n) - f\Big(\overbrace{f(\underbrace{n+f(n)-2}_{n-1})}^{f(n)-1}\Big) = n \quad \text{assurdo}$$

Ora escludo che sia 2

$$f(n+1) = f(n)+1$$

$$f(n+f(n)+2) = 1 + f(n+f(n)+1) = 2 + f(n+f(n)) = 2+n$$

$$f(f(n+f(n)+1)) - f(f(n+f(n))) = f(f(n+f(n)-1))$$

$$f(n+f(n)+1) = n \qquad \overset{\shortparallel}{f(n)}$$

$$f(n+f(n)+1) = n+f(n)+1 - f(f(n+f(n))) = n+1$$

$$n = f(n+f(n))$$

$$f(n) \overset{?}{=} f(f(n)+f(f(n))) = f(f(n)+n+1-f(n+1)) \begin{cases} f(n) \\ f(n+1) = f(n) \end{cases}$$

F. Morandin

Pre IMO 2012 ALGEBRA pomeriggio

Titolo nota 23/05/2012

A5. Determinare tutte le funzioni f dai reali in sé tali che

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy;$$

per ogni x, y reali.

$y = 0$ $\quad f(f(x)) = f(x) + f(x)f(0)$

Sull'immagine di f $\quad y = f(x)$: $f(y) = \alpha y$

$\alpha^2(x+y) = \alpha(x+y) + \alpha^2 xy - xy \qquad \forall x, y \in \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

$\alpha^2 = 1 \quad \alpha^2 = \alpha \quad \alpha = 1 \qquad f(x) = x$

$f(\cancel{x+y}) + f(0)\, f(x+y) = f(f(x+y)) = f(\cancel{x+y}) + f(x)f(y) - xy$

(1) $\quad f(0)f(x+y) = f(x)f(y) - xy$

$y = 1$ in (1) $\quad f(0)f(x+1) = f(x)f(1) - x$

$y = -1$ in (1) $\quad f(0)f(x-1) = f(x)f(-1) + x \qquad$ (2)

$x \leftarrow x+1$ in (2) $\quad f(0)f(x) = f(x+1)\, f(-1) + x + 1$

$f(x)f(1)f(-1) - xf(-1) = f(0)^2 f(x) - (x+1)f(0)$

$f(x)[f(0)^2 - f(1)f(-1)] = x[f(0) - f(-1)] + f(0)$

$x = 1 \quad y = -1$ in (1) $\quad f(0)^2 = f(1)f(-1) + 1$

$f(x) = x[f(0) - f(-1)] + f(0)$

$\boxed{6}$ A6. Sia $n \geq \cancel{2}\ 3$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reali positivi tali che $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dimostrare che

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}}{a_n + n - 2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

$$a_k = \frac{1}{n} \qquad LHS = n \cdot \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}{\frac{1}{n} + n - 2} = \frac{n^2 \cdot n^{-n+1}}{1 + n^2 - 2n} = \frac{n^{-n+3}}{(n-1)^2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

$$LHS = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i \neq k} a_i}{a_k + n - 2} \leq \sum_k \frac{\left(\sum_{i\neq k} a_i / n-1\right)^{n-1}}{a_k + n - 2} = \sum_k \frac{\left(\frac{1-a_k}{n-1}\right)^{n-1}}{a_k + n - 2} = \sum f(a_k)$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} \sum f(a_k) \overset{\text{Jensen}}{\geq} n\, f\left(\frac{1}{n}\sum a_k\right) = n f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{-n+3}}{(n-1)^2}$$

$$LHS \leq \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \sum_k \frac{1}{a_k + n - 2} \leq \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n}{(n-2)(n-1)^{n-3}}$$

$$n \geq 4 \qquad \frac{n}{(n-2)(n-1)^{n-3}} < 1$$

Finito $n \geq 4$

$\boxed{n=3}$ $\qquad \displaystyle\sum_{cyc} \frac{ab}{c+1} \overset{?}{\leq} \frac{1}{4} \qquad \sum_a a = 1$

$$LHS = \sum_{cyc} \frac{ab}{(a+b+2c)(a+b+c)} \overset{?}{<} \frac{1}{4}$$

$$\underbrace{(a+b+c)(a+b+2c)}_{a^2+b^2+2c^2+2ab+3bc+3ac}(a+2b+c)(2a+b+c) \overset{?}{\geq} 4\sum_c ab\,\underbrace{(a+2b+c)(2a+b+c)}_{2a^2+2b^2+c^2+5ab+3bc+3ac}$$

$$LHS = \sum_c \left(2a^4 + a^2b^2(2+2+10) + a^3b(4+5) + ab^3 \cdot 9 + a^2bc(6+15+6+3)\right)$$

$$= \sum_s \left(a^4 + 7a^2b^2 + 9a^3b + 15a^2bc\right)$$

$$RHS = \sum_s \left(8a^3b + 14a^2bc + 10a^2b^2\right)$$

$$LHS - RHS = \sum_s \left(a^4 + a^3b + a^2bc\right) - \sum_s 3a^2b^2$$

$$\sum_s \left(a^4 + a^3b + a^2bc\right) \geq \sum_s 3a^2b^2$$

$$\sum_s \left(a^3 + abc\right) \geq \sum_s 2a^2b$$

Schur

$$\sum_s \left(a^4 + a^2bc\right) \geq \sum_s 2a^3b$$

$$\sum_s \left(a^4 + a^3b + a^2bc\right) \geq \sum_s 3a^3b \geq \sum_s 3a^2b^2$$

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{(a+b+2c)(a+b+c)} \overset{?}{\leq} \frac{1}{4}$$

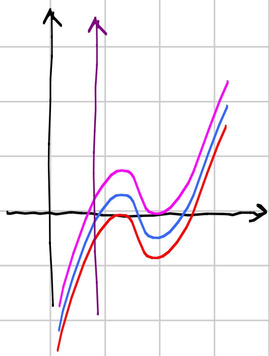
Metodo ABC o SPQ(R)

$$(*) = \underbrace{(a+b+c)(\ldots)(\ldots)(\ldots) - \sum_c ab(\ldots)(\ldots)}_{\text{polinomio in 3 var simmetrico di IV grado}} \overset{?}{\geq} 0$$

$$S = a+b+c \qquad Q = ab+bc+ca \qquad P = abc$$

$$(*) = R(P, Q, S) = \alpha \cdot S \cdot P + R_1(Q, S)$$

$$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - Sx^2 + Qx - P$$



i casi limite, se pongo $a \leq b \leq c$

sono $a = 0$, $b = c$, $a = c$

In pratica $a = 0$, $a = b$

Basta verificare la disuguaglianza originale $a=0$, $a=b$ (fatelo)

$$\sum \frac{1}{a} \geq \frac{n^2}{\sum a}$$

Viene anche di smoothing

$$\sum_{cyc} \frac{4ab}{1+c} \leq 1 \qquad ab\frac{4}{a+b+2c} \leq ab\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

$$LHS \leq \sum_{cyc}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right) = \sum_{cyc}\frac{ab+cb}{a+c} = \sum_{cyc} a = 1$$

$\boxed{7}$

A7. Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0 \\ a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=10 \end{cases}$$

con $a,b,c,d,e \in [-2,2]$.

$$p(x) = \prod_c (x-a) = \ldots = x^5 + cx^3 + dx - 2$$

$a = 2\cos\alpha$ e cicliche

$$\sum_c \cos\alpha = 0 \qquad \sum_c \cos^3\alpha \qquad \sum_c \cos^5\alpha = \frac{5}{16}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = p_3(\cos\alpha)$$

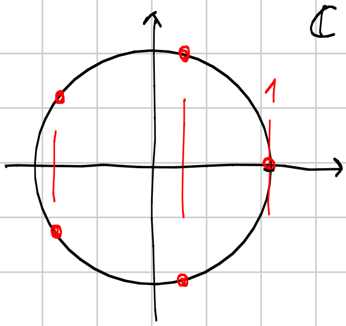
$$\cos n\alpha = 2\cos\alpha\cos((n-1)\alpha) - \cos((n-2)\alpha)$$

$$p_n(\cos\alpha) = 2\cos\alpha\, p_{n-1}(\cos\alpha) - p_{n-2}(\cos\alpha)$$

$$\boxed{p_n(x) = 2x\, p_{n-1}(x) - p_{n-2}(x)}$$ polinomi di Chebyshev

$$\boxed{\cos 5\alpha = \ldots = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha}$$

$$\sum_c \cos 5\alpha = 16\sum_c \cos^5\alpha = 5 \iff \cos 5\alpha = 1 \qquad \alpha, \beta, \gamma, \ldots$$



$\mathbb{C}$

$\sum \cos\alpha = 0$

$$(a, b, c, d, e) = \left(2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, id, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, id\right)$$

$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

che verificano

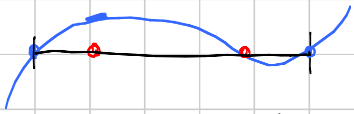
$\boxed{8}$

A8. Sia n un intero positivo. Dimostrare che esistono n reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nell'intervallo $(0, 1)$ tali che la seguente condizione è soddisfatta per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$: se un polinomio $p_i(x)$ di grado $n+1$ si annulla in $0, 1, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, allora $\max_{x\in[0,1]} |p_i(x)| = |p_i(a_i)|$.

$n = 1$ $\quad p_1$ di grado 2 $\quad p_1(x) = x(1-x)a$ è max in $\frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}$

$n = 2$



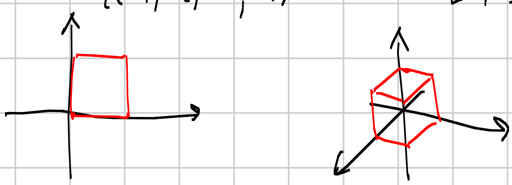
$a_0 = 0 \qquad a_{n+1} = 1$

$$p_i(a_i) = (a_i - a_0)(a_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{(a_i - a_i)} \cdot \ldots \cdot (a_i - a_{n+1})$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{0\le i<j\le n+1} |a_i - a_j|$$

$$f : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \in [0,1] \ \forall i\}$ chiuso e limitato



$\exists\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tale che f è max in quel punto

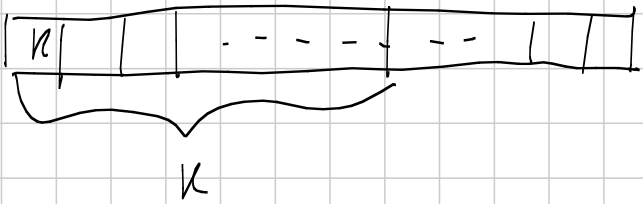
$$f(a_1, a_2, \ldots, \underset{\downarrow}{\overset{a_i}{x}}, \ldots, a_n) = |p_i(x)| \cdot |q(a_1, \ldots, a_n)|$$

Osservazione, nessuno degli a_i è sul bordo, perché $f = 0$ sul bordo

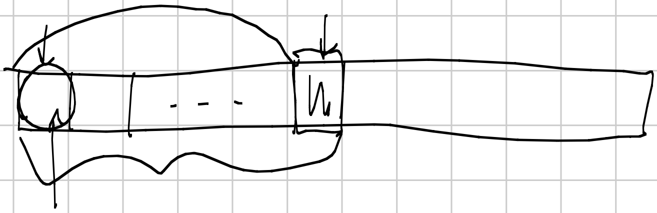
PREIMO 2012 – COMBINATORIA (M)

Titolo nota 21/05/2012

PROB. 1

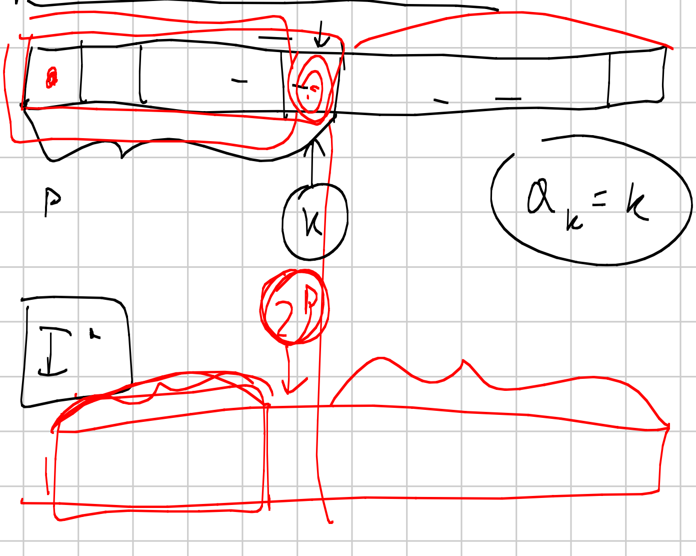


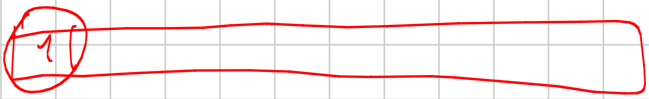
Periodo ?



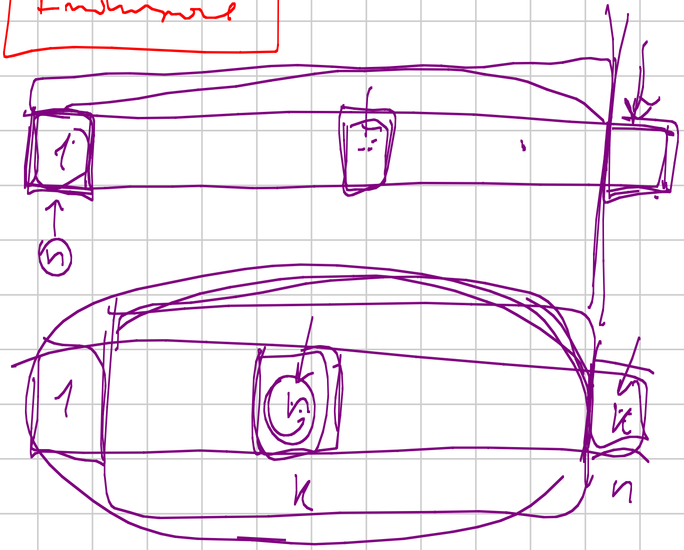
max a_1

Sol. con invarianti





Induzione



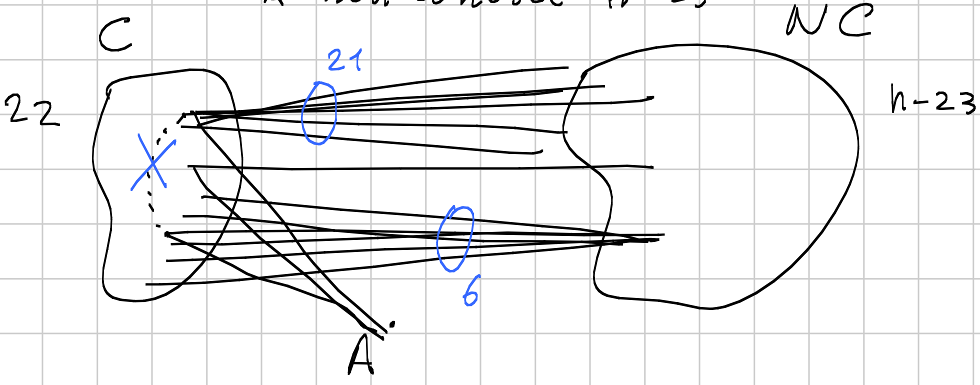
Festa con n invitati

- ciascuno conosce 22 altri
- se 2 si conoscono, nessuno li conosce entrambi
- se 2 <u>non</u> si conoscono, ci sono esattamente 6 altri che li conoscono entrambi.

A

A conosce 22

A non conosce $n-23$

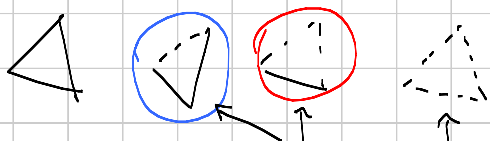


quelli di C non si conoscono tra di loro ma conoscono A $\Rightarrow$ ciascuno conosce 21 di quelli di NC

quelli di NC conoscono esattamente 6 di quelli di C ciascuno

Quindi in totale $21 \cdot 22 = 6 \cdot (n-23) \Rightarrow n = 100$.

Tutti i sottoinsiemi di 3 invitati:



$\binom{n}{3}$

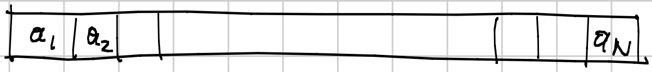
0 $\quad$ 6 ·

$$6 \, \frac{(n-23) \cdot n}{2} = \binom{22}{2} \cdot n$$

Prob. 3

N

A, B



$a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

A dice $c_1 \dots c_i \dots \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
B può sostituire quello che vuole degli a_j con c_i.
(deve sostituirne 1)
B vince se realizza una successione monotona non decrescente.
Quando può vincere B?
Sempre.

fino al primo indice $k+1$ per cui $a_{k+1} < a_k$

B: $a_1 \dots \dots \qquad a_N \longrightarrow a_1 \dots a_k \, \infty \, \infty \, \infty \dots \infty_N$

succ. "ombra"

$A \to c_1$ $\qquad$ B mette c_1 al posto che gli spetta secondo la successione "ombra":

- se $c_1 < a_1$ sost. c_1 a a_1
- se $c_1 = a_1 = a_2 = \dots = a_i$ $\quad c_1 < a_{i+1}$ sost. c_1 a a_{i+1}
- se $c_1 > a_i$ "finiti" sost. il primo "∞" con c_1

La successione ombra è sempre monotona non decrescente e a ogni passo è più "piccola" nel senso dell'ordinamento lessicografico.

Ma ogni coordinata finita può diminuire solo un numero finito di volte $\Rightarrow$ dopo al più $\sum_{i=1}^{k} a_i + 1$ passi sostituisco almeno un "∞".

Ora per ricorrenza dopo un numero finito di passi avrò sostituito tutti gli "∞". A quel punto la successione "ombra" diventa uguale a quella vera, che è quindi monotona non decrescente.

$\boxed{\text{Prob. 4}}$

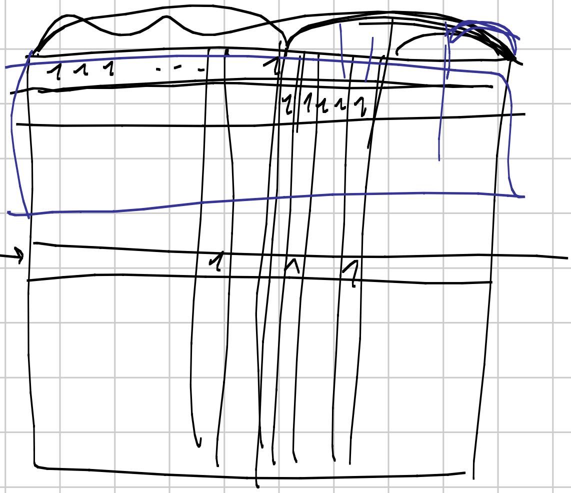
$\boxed{1000 \times 1000}$

1) $\exists^{\text{mo}}$ 10 righe t.c. se mi restringo ad esse ogni colonna ha almeno un 1.

2) $\exists^{\text{no}}$ 10 colonne t.c. se mi restringo ad esse ogni riga ha almeno uno 0

$\boxed{\sim(2)}$ $\forall$ scelta di 10 colonne restringendomi ho sempre una riga di 10 "1".

$$\boxed{\frac{1}{1000}\binom{1000}{10}}$$



$$\binom{1000}{10} \qquad \boxed{S} \qquad \boxed{\sim_S} \qquad \boxed{\binom{500}{10}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1000}\binom{1000}{10}} \overset{?}{\geq} \binom{500}{10}$$

$$\frac{1}{1000}\cdot\underbrace{\frac{1000}{500}\cdot\frac{999}{499}\cdot\frac{998}{498}\cdot\ldots\cdot\frac{991}{491}} \overset{?}{\geq} 1$$

$$\frac{1}{1000}\cdot 2^{10} > 1$$

$$\frac{1}{1000}\cdot\binom{\overset{250}{500}}{10} \overset{?}{\geq} \binom{\overset{125}{250}}{10}$$

$$\frac{1}{1000}\cdot\underbrace{\frac{500}{250}\cdot\frac{499}{249}\cdots\cdots\frac{491}{241}}_{>2^{10}} \overset{?}{\geq} 1$$

$$> 1$$

500	250	125	63	32	16	8	0
1	2	3	4	5	6	7	8

$$\frac{1}{1000} \cdot \frac{125}{63} \cdot \frac{124}{62} \cdot \frac{123}{61} -$$

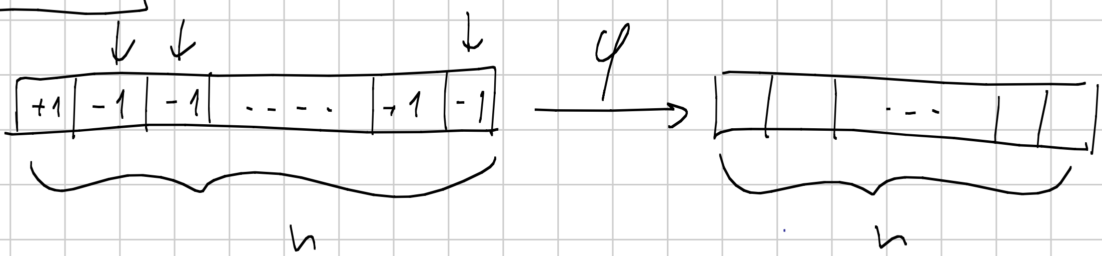
$-$

2^{20}

PRE IMO 2012 — COMBINATORIA (P)

Titolo nota 21/05/2012

PROB. 5



$$\varphi(S_1 \cdot S_2) = \varphi(S_1)\cdot\varphi(S_2)$$

$$\varphi(\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{S_1}) = (x_1\cdot x_2,\ x_2\cdot x_3, \dots, x_n\cdot x_1)$$

$$\varphi(\underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{S_2}) = (- - - \quad - -)$$

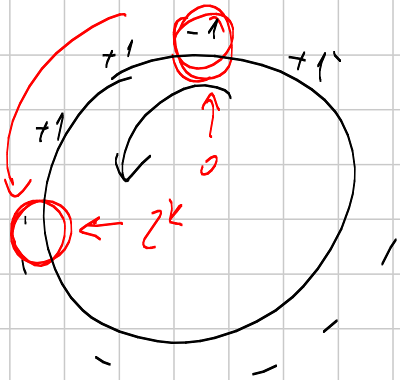
$$\varphi(S_1\cdot S_2) = \varphi((x_1y_1, \dots, x_ny_n)) =$$

$$= (x_1y_1x_2y_2,\ x_2y_2x_3y_3, \dots, x_ny_nx_1y_1) =$$

$$= \varphi(S_1)\cdot\varphi(S_2)$$

$$\varphi^{(k)}(\underline{S}) = (1,1,\dots,1)$$

$$\boxed{S = e_1\cdot e_2 \cdots e_k}$$



$\boxed{e}$ $\boxed{\tau_k e}$

$$\boxed{\varphi^{(2^k)}(e) = e \cdot (\tau_{2^k} e)}$$

$$\boxed{\varphi^{(2^{k+1})}(e)} = \varphi^{(2^k)}\left(\varphi^{(2^k)}(e)\right) =$$

$$= \varphi^{(2^k)}\left(e \cdot (\tau_{2^k} e)\right) =$$

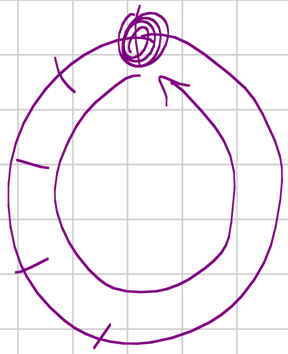
$$= \varphi^{(2^k)}(e) \cdot \varphi^{(2^k)}\left(\tau_{2^k} e\right) =$$

$$= \left(e \cdot (\tau_{2^k} e)\right) \cdot \tau_{2^k} \varphi^{(2^k)}(e) =$$

$$= e \cdot \tau_{2^k} e \cdot \tau_{2^k}\left(e \cdot \tau_{2^k} e\right) =$$

$$= e \cdot \cancel{\tau_{2^k} e \cdot \tau_{2^k} e} \cdot \tau_{2^{k+1}} e =$$

$$= \boxed{e \cdot \tau_{2^{k+1}} e}$$



$$\varphi^{(n)}(e) = (\pm 1, \dots, \pm 1)$$

$$m \geq n \quad \varphi^{(m)}(e) = \varphi^{(m-n)}(1, \dots, 1) = (1, \dots, 1)$$

C6.

n carte

C C . . . C C

C $\cancel{C}$ C

S S

- n carte $\longrightarrow$ $n-3$ $(n \geq 5)$

C $\cancel{C}$ C C C

S S $\cancel{C}$ C

S $\cancel{C}$ S

C C

$n \equiv 2\ (3) \rightarrow$ arrivo in fondo

$n \equiv 0\ (3) \longrightarrow$ C $\cancel{C}$ C SS ho vinto

- magari arrivo in fondo $\Longleftrightarrow$ $n \equiv 0, 2\ (3)$?

- cerco un INVARIANTE!

S S S C
$a_i = (-1)^{\#S \text{ alla sua sinistra}}$
carte scoperte alla sua sx

$$I = \sum_{i \text{ coperta}} a_i \ (3) \quad \text{é INVARIANTE}$$

CCC → SS		$-a_i - a_i - a_i$
SCS → CC		$-a_i - a_i - a_i$
CCS → SC		$-a_i - a_i - a_i$
SCC → CS		$-3a_i$

- quando rimango con 2 carte ...
  - la parità delle scoperte non cambia!
    (# S rimane =, fa +2 o −2 a ogni mossa)

⇒ alla fine

I é 0 o 2.

- All'inizio I é n (3)
  ⇒ $n \equiv 0$ o 2 (3).

□

5000 appassionati di cinema
si possono fare 100 gruppi di due tipi:

1) tutti hanno visto uno stesso film

2) ciascuno ha visto un film che nessun altro del gruppo ha visto.

Dim. per induzione che "$\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ appassionati si possono raggruppare in n gruppi dei due tipi" $n = 0, 1, 2$

Supponiamo la tesi vera per $n-1$, e consideriamo $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ appassionati.

Sia S un insieme minimale di film tale che ciascuno ne abbia visto almeno 1.

$\#S \le n$ 1° gruppo: quelli del film 1
2° " " " " 2 \ film 1
⋮

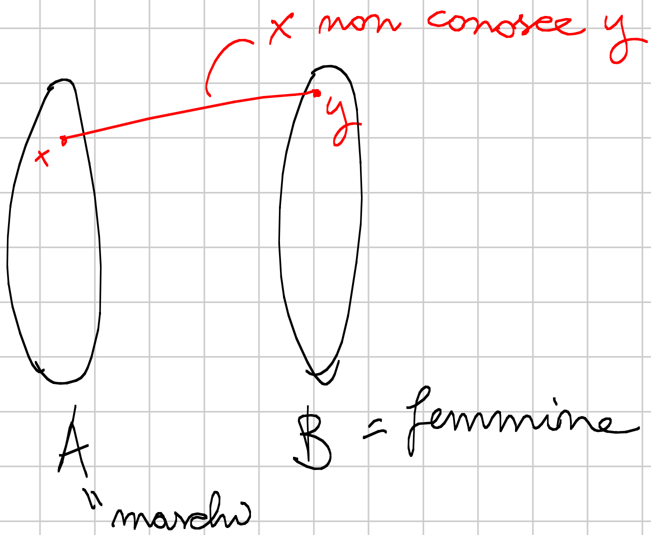
$\#S > n$ Osserviamo che per ogni film di S c'è un appassionato che in S ha visto solo quello. Se no esiste un film per cui nessuno ha visto solo quello in $S \to$ lo posso togliere $\to$ assurdo per minim. di S.

Raggruppo questi appassionati: è un gruppo del secondo tipo.

Il resto degli appassionati sono $\leq \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor - n \leq \frac{(k-1)^2}{2}$

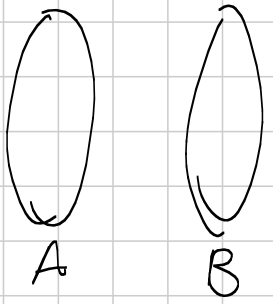
Quindi questi li posso mettere in $k-1$ gruppi. $\square$

C8



x_i ragazzo aveva a_i amiche
$\to$ $d(x_i) = n - a_i$ e voglio scegliere
$f(x_i) = 2d - a_i$ archi uscenti
da x_i.
Lo stesso per le ragazze $y_1 \dots y_n$.
Voglio aver scelto $f(y_i)$ archi
uscenti da y_i.

Teorema di Hall

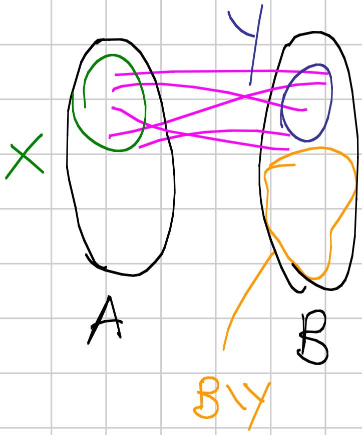


$\forall X \subseteq A$

$|\Gamma(X)| \geq |X|$

$\iff \exists$ "perfect matching"

"f-fattore"



1 • $\sum_{x \in A} f(x) = \sum_{y \in B} f(y) = S$

2 • $\sum_{x \in X} f(x) \leq m(X,Y) + \sum_{y \in B \setminus Y} f(y)$

archi fra X e Y

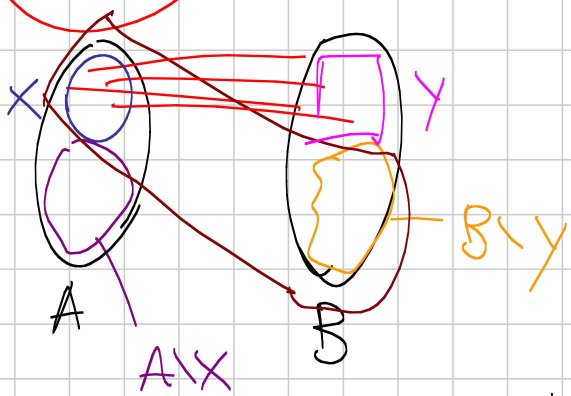
la condizione (1 + 2) è necessaria per avere un f-fattore; ma è anche sufficiente!

Per induzione su S.

- Suppongo di avere SEMPRE $<$ nelle condizioni 2.
  Prendo un tizio in A e gli assegno uno in B; TOLGO l'arco e aggiorno f.
  Controllo che le ipotesi siano ancora verificate.

- Esiste un caso con = !

$$\underbrace{\sum_{x\in X} f(x)}_{S-\sum_{x\in A\setminus X} f(x)} = m(X,Y) + \underbrace{\sum_{y\in B\setminus Y} f(y)}_{S-\sum_{y\in Y} f(y)}$$



Scelgo in partenza TUTTI gli archi fra X e Y, aggiorno f e a quel punto devo sistemare

$$X \longleftrightarrow B\setminus Y$$

$$Y \longleftrightarrow A\setminus X$$

problema

e se $\exists\, y\in Y \quad f(y) < \underbrace{d_X(y)}_{\text{i vicini di } y \text{ in } X}$?

NON può succedere!

$$\sum_{t\in Y\setminus\{y\}} f(t) \le \underbrace{m(Y\setminus\{y\}, X)}_{= m(Y,X) - d_X(y)} + \sum_{x\in A\setminus X} f(x)$$

$$< m(Y,X) - f(y) + \sum_{x\in A\setminus X} f(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{t\in Y} f(t) < m(X,Y) + \sum_{x\in A\setminus X} f(x)$$

No!
deve essere =

Ci basta dimostrare che le hp sono verificate per il nostro grafo!
(conti)

$$f(x) + \underbrace{n - d(x)}_{\text{amici iniziali}} = 2d$$

forme di amici

Hope: $\forall X \subseteq A,\ Y \subseteq B$

$$\boxed{\sum_{x\in X} f(x) \leq m(X,Y) + \sum_{y\in B\setminus Y} f(y)}$$

$$(2d-n)|X| + m(X,B) \leq m(X,Y) + (2d-n)(n-|Y|) + m(A, B\setminus Y)$$

$$(2d-n)(|X|+|Y|-n) \overset{?!}{\leq} m(A\setminus X, B\setminus Y)$$

$$\underset{\alpha}{|X|} \geq \underset{\beta}{|Y|}$$

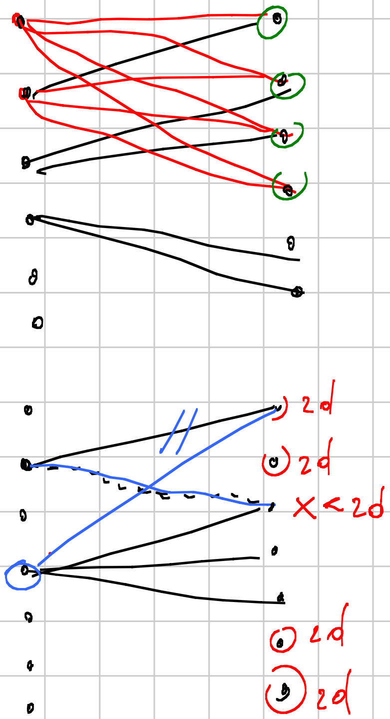
$$|A\setminus X|(n-d) = (n-|X|)(n-d)$$

$$(2d-n)(\alpha+\beta-n) \overset{?}{\leq} (n-\alpha)(n-d)$$

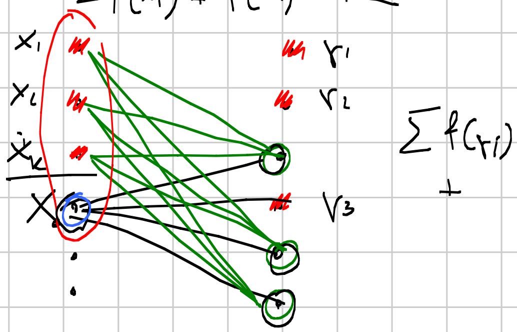
$\rightarrow$ andate avanti da soli

$d = 2$

Idea: aggiungere a mano senza sforare

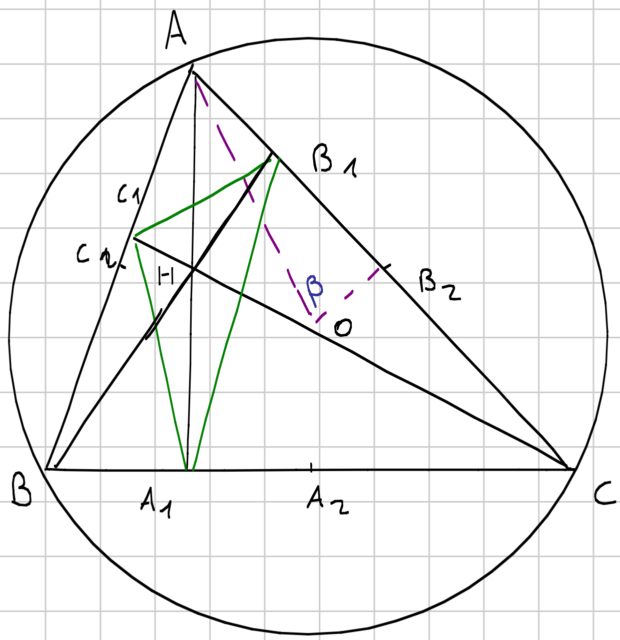


$$\overbrace{\sum f(x_i) + f(x) - 1}\ <$$



GEOMETRIA MATTINA - PREIMO 12

Titolo nota 24/05/2012



O e H coniugati isogonali

$B\hat{A}H = C\hat{A}O$

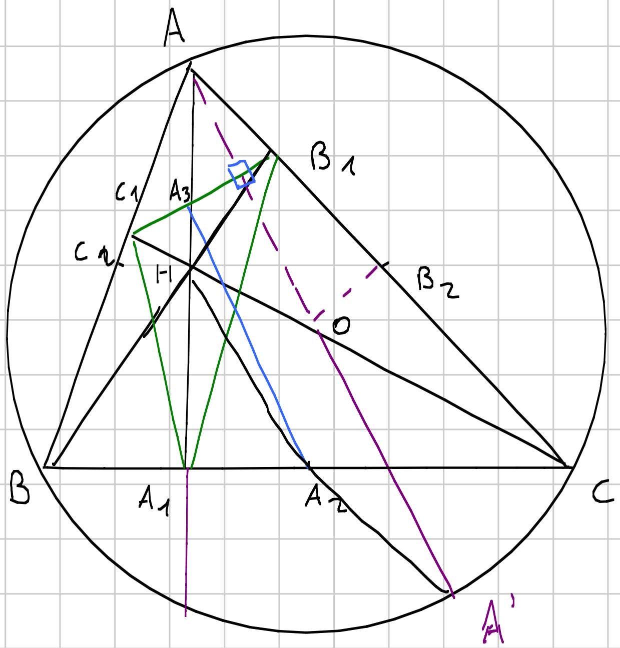
$90-\beta \qquad 90-\beta$

$AO \perp B_1C_1$

$ABC \to AB_1C_1$

$AH \to AO$

$AO \perp B_1C_1$!!

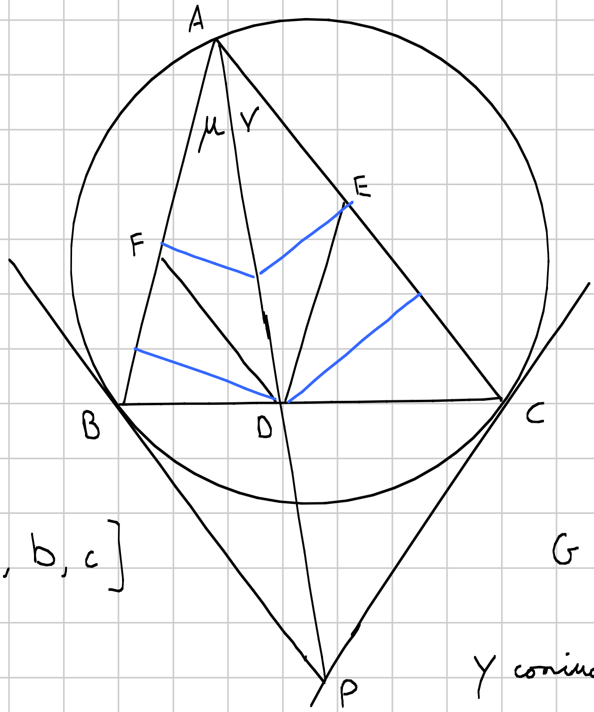


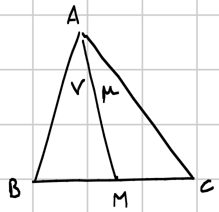
A_2 p.to medio $A'H$

omotetia di centro H e fattore $\frac{1}{2}$

$A' \to A_2$

$\ell(AO) \to \ell(A_2A_3)$





AP simmediana

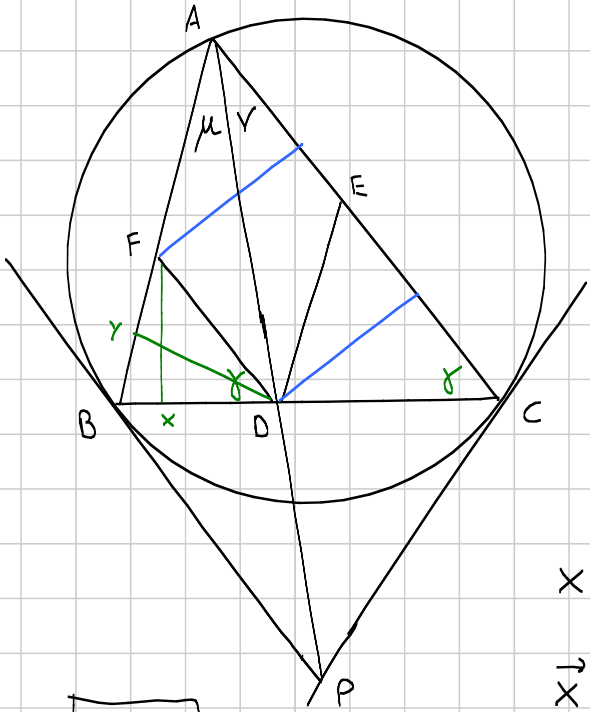
$X = [\alpha, \beta, \gamma]$

$D[0, b, c]$

$G = \left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right]$

Y coniug. isog. di $X \to Y = \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right]$

L pt. di Lemoine $\to L = [a, b, c]$



$D = [0, kb, kc]$

$F = \left[kc \cdot \frac{c}{a}, kb, 0\right]$

$\frac{Fx}{\sin\gamma} = \frac{DY}{\sin\alpha}$ $\qquad Fx = DY \cdot \frac{c}{a}$

$F = [c^2, ab, 0]$

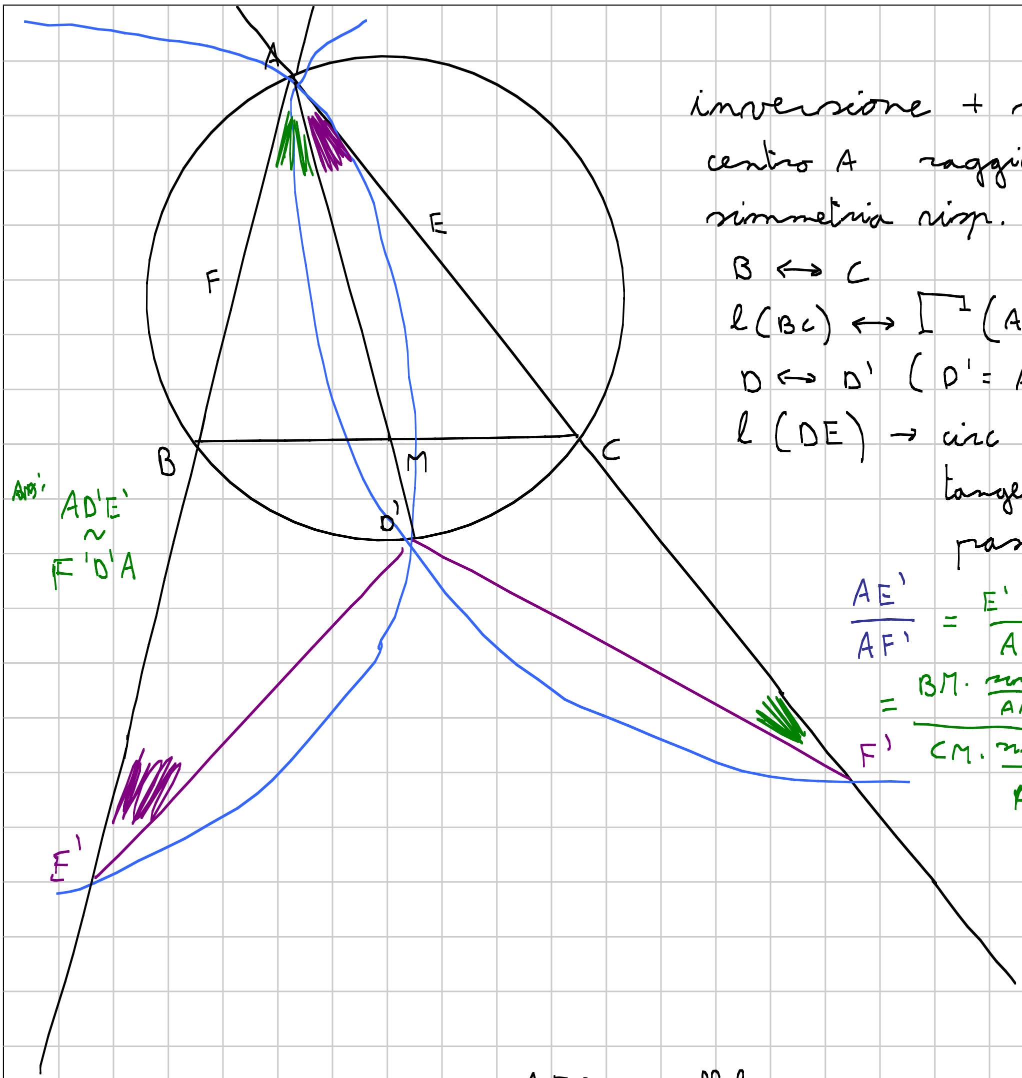
$X = [\alpha, \beta, \gamma]$

$$\vec{X} = \frac{a\alpha \vec{A} + b\beta \cdot \vec{B} + c\gamma \vec{C}}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

$\boxed{\vec{A} = 0}$

$$\vec{F} = \frac{ac^2 \vec{A} + ab^2 \vec{B}}{ac^2 + ab^2} = \frac{b^2 \vec{B}}{b^2 + c^2}$$

$$AF \cdot AB = \vec{F} \cdot \vec{B} = \frac{b^2}{b^2+c^2} \vec{B} \cdot \vec{B} = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$$



inversione + simmetria

centro A raggio $\sqrt{bc}$

simmetria risp. bisettrice

$B \leftrightarrow C$

$\ell(BC) \leftrightarrow \Gamma(ABC)$

$D \leftrightarrow D'$ $(D' = AM \cap \Gamma(ABC))$

$\ell(DE) \to$ circ passante per A tangente a AC passante per D'

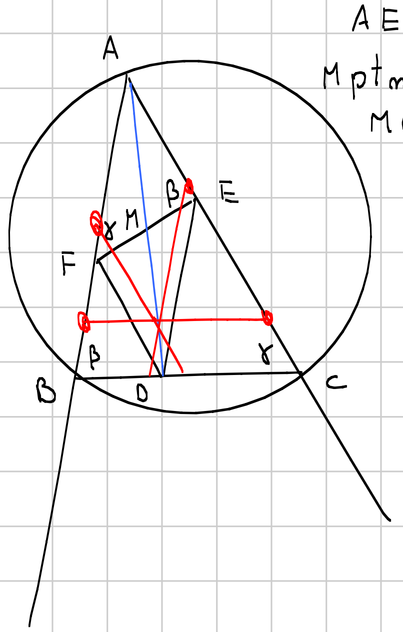
$AD'E' \sim F'D'A$

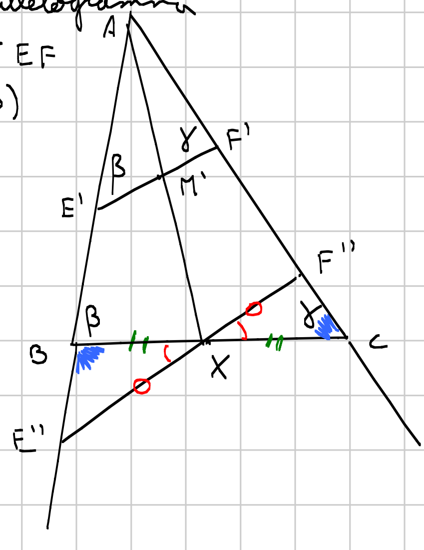
$$\frac{AE'}{AF'} = \frac{E'D'}{AD'} = \frac{\sin B\hat{A}M}{\sin C\hat{A}M} = \frac{BM\cdot\frac{\sin\beta}{AM}}{CM\cdot\frac{\sin\gamma}{AM}} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$$

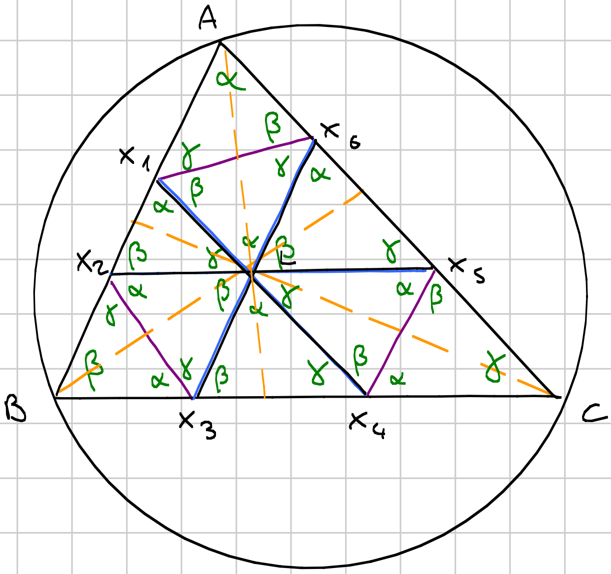
AEDF parallelogramma

M pt medio di EF

$M \in \ell(AD)$





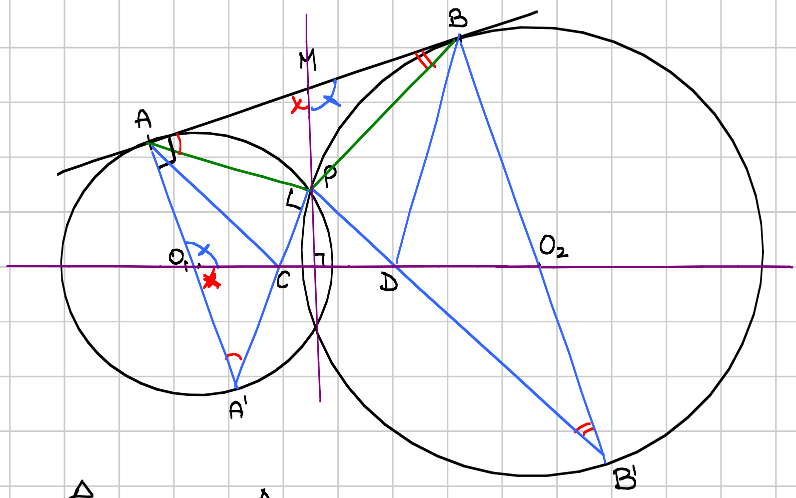


$X_1 X_2 X_5 X_6$ ciclici

$X_2 \widehat{X_3} X_6 = \gamma = X_2 \widehat{X_5} X_6$

X centro della circ. di Lemoine

X pt medio di OL



Claim: $A\overset{\triangle}{A'}C \sim A\overset{\triangle}{P}B$.

M pto medio di AB $\leadsto$ M sta sull'asse radicale

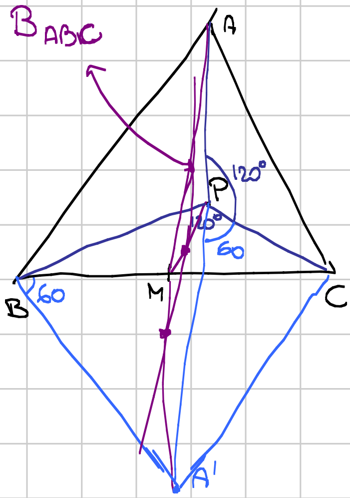
$\times$ + $\frown$ $\Rightarrow$ $O_1\overset{\triangle}{A'}C \sim M\hat{A}P$

$$\frac{AA'}{A'C} = 2\frac{A'O_1}{A'C} = 2\,\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AP}$$

$\Rightarrow$ tesi

Sol 2: Rotazione + omotetia.

Es 3



Sol 1:

Idea: A, P, A' sono allineati.

Dim: $A'BPC$ è ciclico $\Rightarrow 60° = A'\hat{B}P = \hat{A'PC}$

$\Rightarrow A'\hat{P}C + C\hat{P}A = 180°$.

$\frac{B+C}{2} = M$ è l'origine

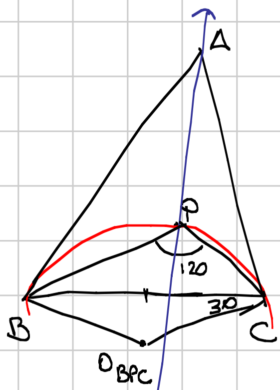
$$O_{BPC} = \text{Baric}_{A'BC} = \frac{A'+B+C}{3} = \frac{A'}{3}$$

$$B_{BPC} = \frac{P}{3}$$

$$B_{ABC} = \frac{A}{3}$$

allineati perchè lo erano A, P, A'

Sol 2



Origine in P.

dove $\omega^{12} = 1$

$A = 1 \qquad B = \mu\omega^4 \qquad C = \lambda\omega^{-4}$

$$B_{BPC} = \frac{\mu\omega^4 + \lambda\omega^{-4}}{3}$$

$$B_{ABC} = \frac{1 + \mu\omega^4 + \lambda\omega^{-4}}{3}$$

$$O_{BPC} = c + \frac{(b-c)}{\sqrt{3}}\omega = \lambda\omega^{-4} + \frac{\mu\omega^4 - \lambda\omega^{-4}}{\sqrt{3}}\omega$$

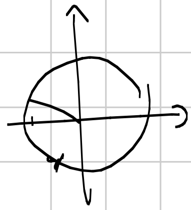
Sono allineati?

In generale a, b, c sono all $\Leftrightarrow a - b = \alpha(c-b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{3} \overset{?}{=} \alpha\left(\underbrace{\lambda\omega^{-4} + \frac{\mu\omega^4 - \lambda\omega^{-4}}{\sqrt{3}}\omega - \frac{\mu\omega^4 + \lambda\omega^{-4}}{3}}_{z}\right)$$

$$\operatorname{Im} z = -\lambda \frac{\sqrt{3}}{2} + \cancel{\frac{1}{2\sqrt{3}}\mu} + \frac{\lambda}{\sqrt{3}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}\mu} + \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}\lambda$$

$$= 0$$

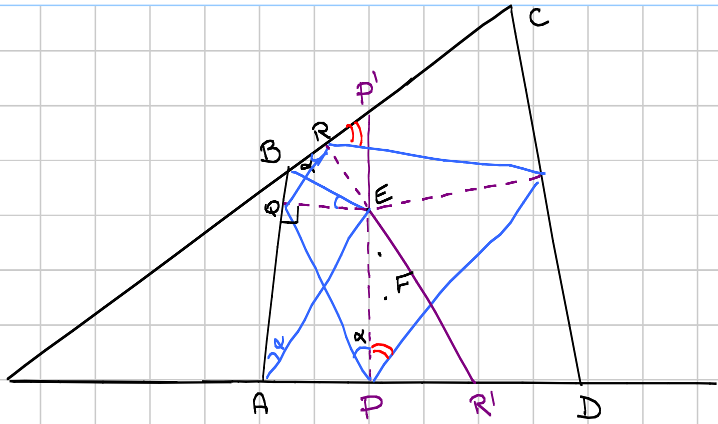


$\square$

PRE IMO 2012 – GEOMETRIA (P)

Titolo nota 24/05/2012

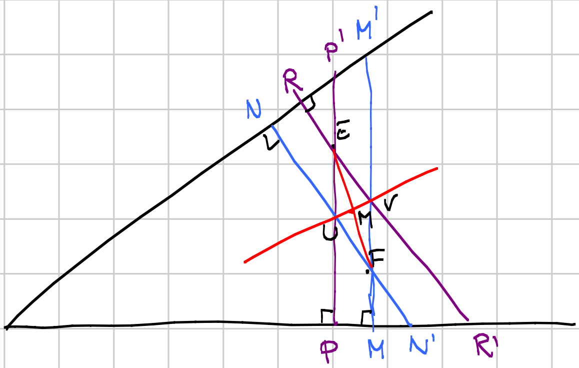
Es 5



Step 1: le proiez di E sui lat. di ABCD sono concicliche. (ω_E è la circo)

Step 2: $P' \in \omega_E$

$P'PQR$ è ciclico $(P'\hat{P}Q = \alpha = Q\hat{R}B)$



ω_F passa per $MNM'N'$

ω_E passa per $PRP'R'$.

Tesi: M pto medio EF sta sull'asse radicale di ω_E, ω_F.

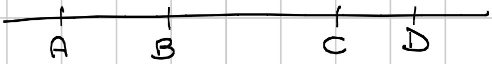
$M \in UV$. Vediamo che U, V stanno sull'asse radicale:

$UP \cdot UP' \overset{?}{=} UN \cdot UN'$ ok, $PP'NN'$ ciclico –

Es 6

Binapporti

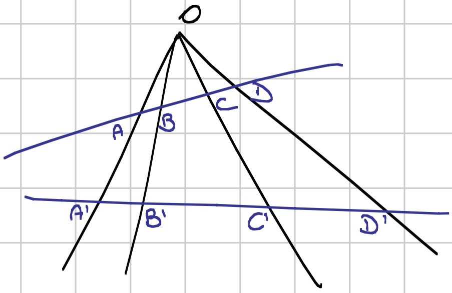
$$(A,B\,;\,C,D) = \frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$$



- segmenti con segno
- ordinati in qualunque modo
- pti ∞

Fatti

$(A,B\,;\,C,D) = (A',B'\,;\,C',D')$



Dim

$$\frac{AC}{\sin A\hat{O}C} = \frac{OC}{\sin O\hat{A}C}$$

$$\frac{BC}{\sin B\hat{O}C} = \frac{OC}{\sin O\hat{B}C}$$

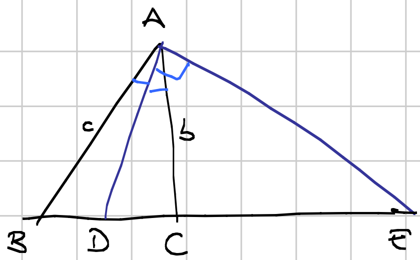
$$\frac{BD}{\sin B\hat{O}D} = \frac{OD}{\sin O\hat{B}C}$$

$$\frac{AD}{\sin A\hat{O}D} = \frac{OD}{\sin O\hat{A}D}$$

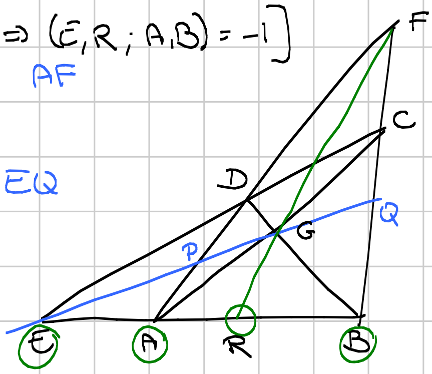
$$\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD} = \ldots =$$ espressione negli angoli in O.

Oss: $(B,C\,;\,D,E) = -1$.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} = \frac{BE}{CE}.$$



Oss: $(E, G; P, Q) = -1$ $\quad [\Rightarrow (E, R; A, B) = -1]$



proietto da B su AF

$$(E, G; P, Q) = (A, D; P, F)$$

proietto da C su EQ

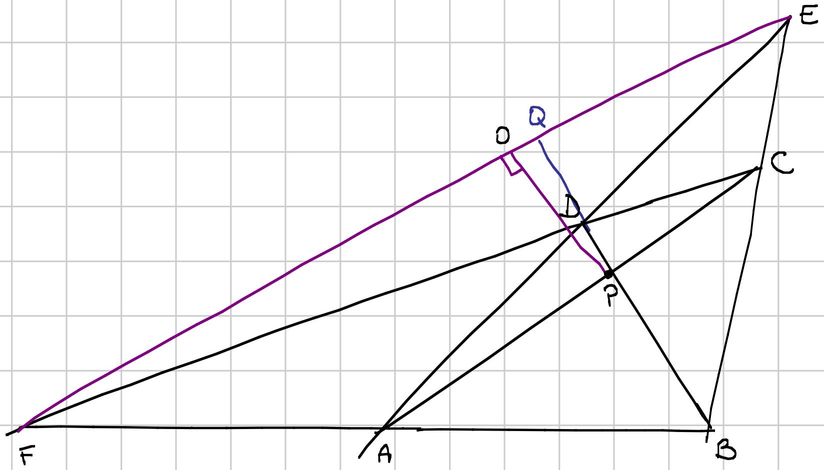
$$= (G, E; P, Q)$$

$$= \frac{GP \cdot EQ}{GQ \cdot EP}$$

$$= [(E, G; P, Q)]^{-1}$$

$$(E, G; P, Q) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

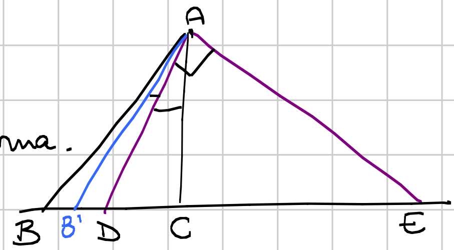
(ex: se il birapp è 1, due pti coincidono)



Claim: OP è bisettrice di $B\hat{O}D$ e di $A\hat{O}C$.

$Q = EF \cap BD$.

$(B,D;P,Q) = -1$. (quadrilatero ACEF, B)



Oss: $(B,C;D,E) = -1$ +

$D\hat{A}E = 90°$ $\Rightarrow$

AD è bis interna e AE è bis esterna.

Dim:

Sia B' t.c.

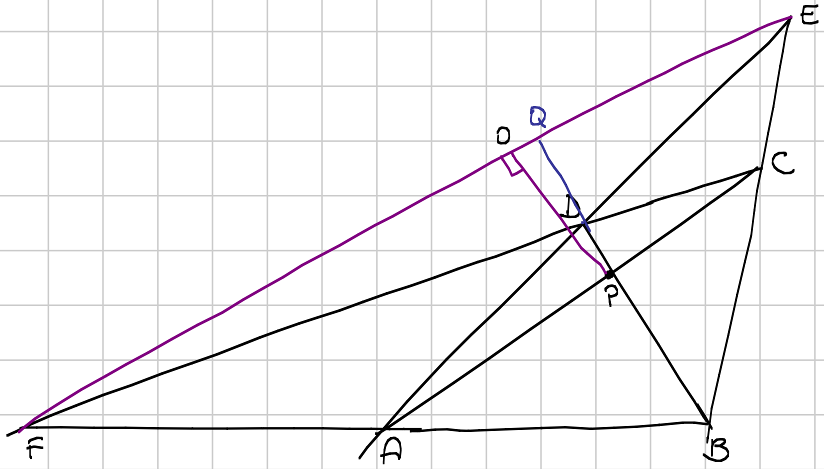
$B'\hat{A}D = D\hat{A}C$

AE è bis esterna di $AB'C$.

$(B',C;D,E) = -1$

$\Rightarrow$ $B' = B$.

Sol 2



Menelao su $B\hat{D}E$ con P, A, C

$$\frac{BC}{CE} \cdot \frac{EA}{AD} \cdot \frac{DP}{PB} = -1$$

Ceva su $B\hat{D}E$ con F

$$\frac{BC}{CE} \cdot \frac{EA}{AD} \cdot \frac{DQ}{QB} = 1$$

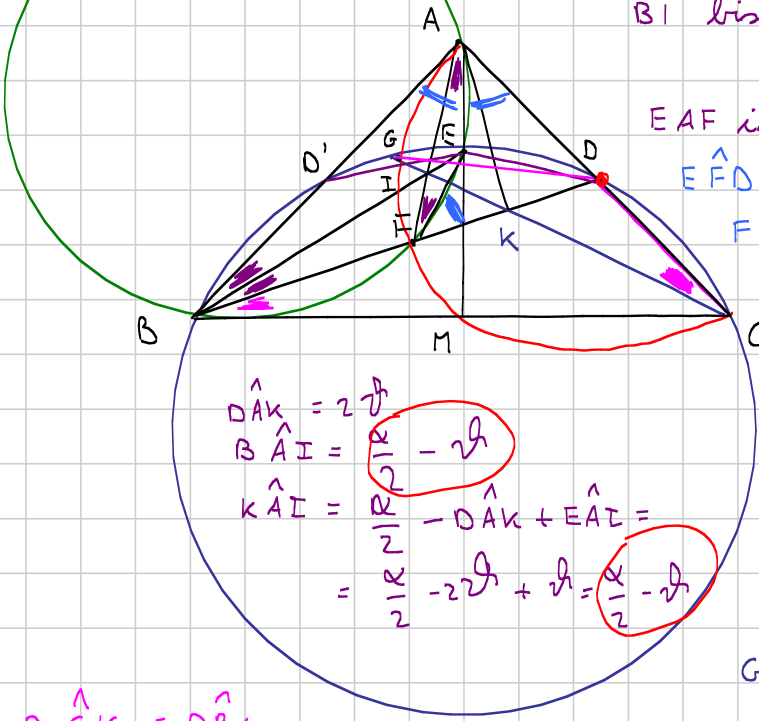
$$\Rightarrow \quad \frac{DP}{PB} = \frac{DQ}{QB} = k$$

P, Q stanno sulla arco di Apollonio con rapp k.
Siccome $P\hat{O}Q = 90^\circ$ anche O ci sta.

$$\frac{DP}{PB} = \frac{DO}{OB}$$

$\Leftrightarrow$ OP bisettrice.

$\measuredangle\ \vartheta$



Th: I incentro di ABK

BI bisettrice $A\hat{B}K$

EAF isoscele

$E\hat{F}D = B\hat{A}E = D\hat{A}E$

FDA isoscele

$DA = DF = DM = DC = DG$

AF asse radicale

BE " "

$I = AF \cap BE$

$\Downarrow$ centro radicale

CI asse rad

$G = \ \cap$

$D\hat{A}K = 2\vartheta$

$B\hat{A}I = \frac{\alpha}{2} - \vartheta$

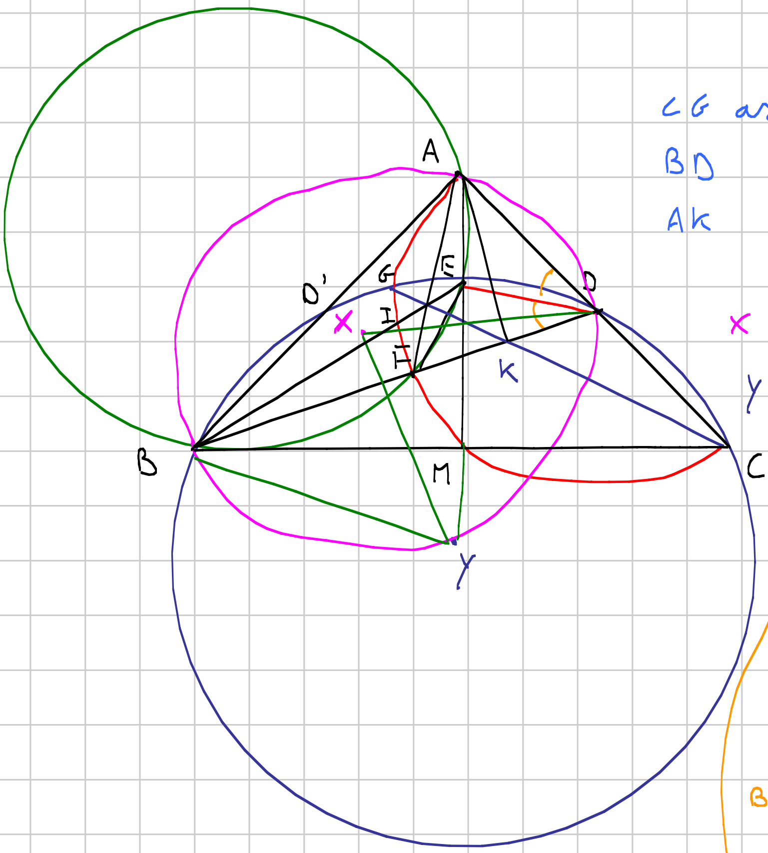
$K\hat{A}I = \frac{\alpha}{2} - D\hat{A}K + E\hat{A}I = \frac{\alpha}{2} - 2\vartheta + \vartheta = \frac{\alpha}{2} - \vartheta$

$D\hat{C}K = D\hat{B}C$

$\overset{\triangle}{DCK} \sim \overset{\triangle}{DBC}$

$\overset{\triangle}{DAK} \sim \overset{\triangle}{DBA}$

$DK \cdot DB = DC^2 = DA^2$



CG asse radicale

BD " "

AK " "

X centro cfr

Y " "

BYDA ciclico

$B\hat{Y}E = 2 \cdot B\hat{D}E$

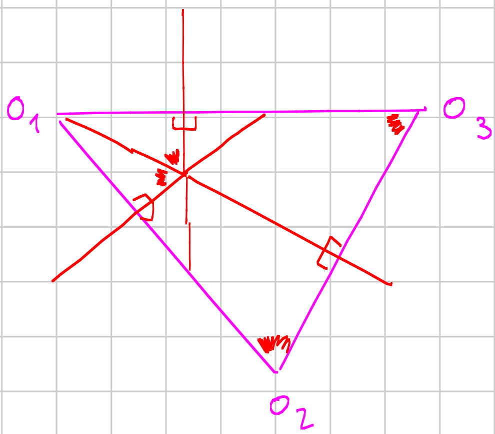
AEF isoscele

ADF isoscele

DE bisettrice di $F\hat{D}A$

$B\hat{D}E = \frac{1}{2} B\hat{D}A$

$B\hat{Y}E = B\hat{Y}A = B\hat{D}A$



PreIMO 2012 – Teoria dei Numeri (M)

Titolo nota 22/05/2012

$\nu_p(n) \doteq \max\{h : p^h \mid n\}$

N1. $a, m > 0$ $\quad \nu_2(n!) \equiv a \pmod m$

$m = 2^s \cdot d$ $\qquad d \equiv 1\ (2)$

$\nu_2(n!) \equiv \begin{cases} a \pmod{2^s} \\ a \pmod d \end{cases}$

$\underbrace{\nu_2(n!) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor}$ $\longrightarrow$ $\boxed{n - \nu_2(n!) = \text{numero di "1" nella rapp binaria di } n \quad (n \text{ pari})}$

1011010
(1)01101
(1)0110
(1)011
...

(mod d) $\quad \exists k \quad 2^k \equiv 1 \quad (d)$

n	$n - \nu_2(n!)$	$\nu_2(n!) \pmod d$
2^k	1	0

+1 $\quad \cdot 2^k$

−1 $\quad +2$

$\tilde{n}$: $\quad \nu_2(\tilde{n}!) \equiv a\ (d)$

$\tilde{n} \to 2^{kh} + \tilde{n}$ $\quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} +0 & \nu_2(\tilde{n}!)\ (d) \\ +1 & \nu_2(\tilde{n}!)\ (2^s) \end{matrix}$

$\tilde{\tilde{n}}$: $\quad \nu_2(\tilde{\tilde{n}}!) \equiv a \pmod m$.

Ingredienti: Th. Cinese del Resto,

$$\nu_p(n!) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \frac{n - (\text{somma cifre in base } p)}{p-1}$$

N2. $\quad m = k(k+1)$ che consiste di due blocchi decimali identici di n cifre

$n=3 \qquad \underbrace{741}\,741 = \underbrace{741} \cdot 1001$

$m = k(k+1) = (10^n+1)\cdot A \qquad \underline{10^{n-1} \leq A < 10^n}$

visto che n non è una potenza di 2

$$10^n+1 = \boxed{p\cdot q} \qquad (p,q)=1$$

$$\left(10^{2^s\cdot d}+1\right) = \underbrace{(10^{2^s}+1)\cdot(\text{robe})}$$

$$\gcd\left(10^{2^s}+1,\ 10^{2^s\cdot(d-1)} - 10^{2^s\cdot(d-2)} + \dots + (-1)^d\right)$$

$$\gcd\left(10^{2^s}+1,\ \underbrace{(-1)^{d-1} - (-1)^{d-2} + (-1)^{d-3} - \dots}\right)$$

$$\gcd\left(10^{2^s}+1,\ \text{robe}\right) \leq d$$

$\begin{cases} k_1 \equiv 0 \ (p) \\ k_1 \equiv -1 \ (q) \end{cases} \qquad k(k+1) \equiv 0 \ (10^n+1) \qquad k(k+1) = (10^n+1)\cdot A$

$\begin{cases} k_2 \equiv -1 \ (p) \\ k_2 \equiv 0 \ (q) \end{cases} \qquad 0 < k_1, k_2 \leq 10^n$

$$\boxed{k_1 + k_2 \equiv -1 \ (10^n+1)}$$

$$k \doteq \max(k_1, k_2) \geq 5\cdot 10^{n-1}$$

$$k(k+1) \geq 25\cdot 10^{2n-2}$$

$$\frac{k(k+1)}{10^n+1} \geq 25\cdot 10^{n-2} = \frac{1}{4}10^n$$

$m = k(k+1)$ soddisfa le richieste del problema.

almeno $2^{\omega(10^n+1)}$ soluzioni, in generale.

N3.

N. 3 $\quad x_1 = 1 \quad y_1 = 2$

$$\cdot \quad x_{n+1} = 22y_n - 15x_n$$
$$y_{n+1} = 17y_n - 12x_n$$

$$y_n = \frac{1}{22}(15x_n + x_{n+1}) \qquad y_{n+1} = \frac{1}{22}(15x_{n+1} + x_{n+2})$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 9x_n \quad .$$

Analogamente $\quad y_{n+2} = 2y_{n+1} - 9y_n$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 29 \quad \to$ tutti dispari

$y_1 = 2 \quad y_2 = 22 \quad \to$ tutti $\equiv 2 \pmod 4$

infiniti termini pos. e neg.

$$x_{n+3} = 2(2x_{n+1} - 9x_n) - 9x_{n+1} = -5x_{n+1} - 18x_n$$

$x_n, y_n \equiv 0 \pmod 7$ per $n = 1999^{1945}$?

$x_1 = 1, \quad x_2 = 29 \equiv 1 \quad x_3 \equiv 0$

$x_4 \equiv 5 \quad x_5 \equiv 3 \quad x_6 \equiv 3$

$x_n \equiv x_{n+1} \longrightarrow x_{n+2} \equiv 0 \quad x_{n+3} \equiv 5x_n$

$x_{n+4} \equiv 3x_n \quad x_{n+5} \equiv 3x_n$

$x_n \equiv 0 \pmod 7 \iff n \equiv 3 \pmod 4$

$1999^{1945} \equiv 3 \pmod 4$

Per y_n è falso $(\forall n)$ Supponiamo, per assurdo, che sia vero.

$y_n \equiv 0 \pmod 7$

$y_{n-1} \equiv y_{n-2}$

$y_{n-3} \equiv 4y_{n-1}$

$y_{n-4} \equiv 0$

$A_{n+2} = c A_{n+1} + d A_n$

il suo periodo modulo p divide $|\mathbb{F}_{p^2}^*| = \underline{p^2-1}$

$y_n \not\equiv 0 \ (7)$

vi basta verificare i primi 48 termini.

$$w_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 22 \\ -12 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M w_n$$

$$w_{n+2} = M^2 w_n$$

$\boxed{\text{Cayley-Hamilton}}$: il poly char di $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è quello di M, ossia $\det(M - \lambda I)$

$\underline{w_{n+2} - c\, w_{n+1} - d\, w_n} \overset{//}{=} 0$ ha polinomio char $x^2 \overset{?}{-} cx - d$

$$x^2 - \mathrm{Tr}\, M \cdot x + \det M$$

$$x^2 - 2x + 9 \qquad \text{polychar di } M$$

$w_{n+1} = M w_n$ $\qquad \boxed{M^2 - cM - dI = 0}$

$w_{n+2} = M^2 w_n$ $\qquad (M^2 - cM - dI)\, w_n =$

N.4 Remind.

p primo $(\neq 2)$ $\qquad n = p^r m \qquad h = p^s k \qquad r > 0$

$$(m, p) = (k, p) = 1$$

$$p^{r+s} \,\|\, (1+n)^h - 1 = (\underbrace{1 + p^r m}_{})^{p^s k} - 1$$

e il numero a destra è divisibile per almeno un altro primo q $(\neq p)$.

$$3^x 7^y + 1 = a^d \qquad x,y \geq 0 \quad a,d > 1$$

$\boxed{d \text{ dispari}}$

$$a^d - 1 = (a-1)(a^{d-1} + \dots + a + 1)$$

$\underline{1^\circ \text{ caso}}$ $\quad 3 \cdot 7 \mid a-1$

$3 \mid d \qquad a^3 - 1 \mid a^d - 1$

$a^3 - 1$ ha dei fattori primi $\neq 3, 7$

non va bene

$7 \mid d \qquad a^7 - 1 \mid a^d - 1 \quad \rightarrow$ come sopra

$\underline{2^\circ \text{ caso}}$ $\quad a - 1 = 7^\beta \qquad \beta \geq 1$

La potenza di 3 non compare in $a^d - 1$

$$a^d - 1 \equiv (-1)^d - 1 \equiv -2 \pmod 3$$

Basta il ragionamento per il primo 7.

$\underline{3^\circ \text{ caso}}$ $\quad a - 1 = 3^\alpha \qquad \alpha \geq 1$

$a^d - 1$ NON PUÒ ESSERE una potenza di 3

L'unico ordine possibile di a mod 7 è 3.

$3 \mid d \qquad a^3 - 1 \mid a^d - 1$

Controlliamo ~~d~~ dapprima $a^3 - 1$

Vorremmo $\quad a^3 - 1 = 3^{\alpha+1} 7^\gamma$

Calcolo: $\quad a^3 = (1 + 3^\alpha)^3 = 1 + 3^{\alpha+1} + 3^{2\alpha+1} + 3^{3\alpha}$

Semplificando, si ha $\quad 1 + 3^\alpha + 3^{2\alpha-1} = 7^\gamma$

$7^{\gamma} = (1+2\cdot 3)^{\gamma} = 1 + 2\gamma \cdot 3 + \dots$

$\alpha = 1 \quad 1+3+3 = 7 \quad$ OK

$\alpha > 1 \quad \alpha < 2\alpha - 1$ la potenza più piccola a sinistra è 3^{α}

$\Rightarrow 3^{\alpha-1} \mid \gamma \quad \Rightarrow 3^{\alpha-1} \leq \gamma$

$7^{\gamma} \geq 7^{3^{\alpha-1}} \gg 1 + 3^{\alpha} + 3^{2\alpha-1}$ NO.

$\alpha = 1$ O.K $\qquad 4^3 - 1 = 3^2 \cdot 7$

Infine ; $a - 1 = 1 \quad a = 2$

$2^d - 1 \equiv 0 \ (3)$? NO (d dispari)

$2^d - 1 \equiv 0 \ (7)$? $d = 3 \qquad 2^3 - 1 = 7$

$2^d - 1 = 7^{\beta}$ con $\beta > 1$?

NO, PER IL REMIND.

PRE IMO 2012 — Teoria dei Numeri (P)

Titolo nota 22/05/2012

$\boxed{N.5}$ $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_1$ prog. arit. (non costante)

p. es. crescente

$n = 2k$ pari $\quad a_1 a_2 < a_2 a_3 < a_3 a_4 < \dots \; a_{2k-1} a_{2k} < a_{2k} a_1$

$a_1 < a_3 < a_5 < \dots < a_{2k-1} < a_1$

$n = 2k+1$ dispari ?

$b_1 b_2 = 1, \; b_2 b_3 = 2, \; \dots, \; \boxed{b_{2k+1} b_1 = 2k+1}$

$x \in \mathbb{R}_+ \quad b_1 = x, \; b_2 = \frac{1}{x}, \; b_3 = 2x, \; b_4 = \frac{3}{2x}, \; b_5 = \frac{8}{3}x$

$= \frac{2 \cdot 4}{3} x$

$$b_{2i} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2i-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2i-2)} \frac{1}{x}$$

$$b_{2i+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2i)}{1 \cdot 3 \cdots (2i-1)} x$$

$$\frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} x^2 = 2k+1$$

$$x = \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}}$$

$a_i = b_i \sqrt{(2k+1)!}$ $\rightarrow$ propr. arit. dei b_i

= prog arit. degli a_i

Si verifica che :

$$a_{2i} = b_{2i}\sqrt{(2k+1)!} = (1\cdot 3 \cdots (2i-1))\,(2i \cdots 2k)$$

$$a_{2i+1} = b_{2i+1}\sqrt{(2k+1)!} = (2 \cdots 2i)\,((2i+1) \cdots (2k+1))$$

Es. : $n = 2k+1 = 5$

$a_1 = 1\cdot 3\cdot 5 = 15$ $\quad a_2 = 1\cdot 2\cdot 4 = 8$

$a_3 = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$ $\quad a_4 = 1\cdot 3\cdot 4 = 12$

$a_5 = 2\cdot 4\cdot 5 = 40$

$a_1 a_2 = 120 \qquad a_2 a_3 = 240 \qquad a_3 a_4 = 360$

$a_4 a_5 = 480 \qquad a_5 a_1 = 600$

[Sol alternativa: induzione $2k-1 \to 2k+1$]

N6

$$f(a) + f(b) = f(a+b+pab) \qquad \forall a,b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

$$f(0) + f(1) = f(1) \implies f(0) = 0$$

$$\boxed{A_{i+1} = 1 + A_i + pA_i} \qquad \approx (a+1)(b+1)$$

$A_i = \frac{B_i}{p}$

$$\frac{B_{i+1}}{p} = 1 + \frac{B_i}{p} + p\,\frac{B_i}{p}$$

$$B_{i+1} = p + B_i + pB_i = p + (1+p)B_i$$

$B_i = C_i - 1$

$$C_{i+1} - 1 = p + (1+p)(C_i - 1) = -1 + (1+p)C_i$$

$$C_{i+1} = (1+p)C_i$$

$$\underline{C_i = (1+p)^i} \to B_i = (1+p)^i - 1 \to \boxed{A_i = \frac{(1+p)^i - 1}{p}}$$

$$f(A_i) + f(1) = f(1 + A_i + pA_i) = f(A_{i+1})$$

Per induzione: $f(A_i) \equiv i \cdot \underline{f(1)} \pmod{p^n}$

$A_i \equiv A_j \pmod{p^n} \qquad (i > j)$

$(1+p)^{i-j} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}} \qquad \underline{|i-j| < p^n} \qquad \nu_p(i-j) \leq n-1$

$$\nu_p\left((1+p)^{i-j} - 1\right) = 1 + \nu_p(i-j) \leq n$$

se $p \neq 2$ gli A_i formano un set completo di residui $\pmod{p^n}$.

$p \equiv 1 (2)$ vi sono p^n funzioni (1 per ogni possibile scelta di $f(1) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$)

$A_{i+1} = 1 + A_1 + pA_i \implies A_{i+j} = A_i + A_j + pA_iA_j$ (semplice calcolo).

$p = 2$. $n = 1$ il discorso è analogo, $\#\{f\} = 2$.

$p = 2 \quad n > 1 \qquad (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$ non è ciclico $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$

(Lemma di Hensel: $a \in (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^* \begin{cases} +5^k \\ -5^k \end{cases}$)

$A_i = \dfrac{(1+2)^i - 1}{2} = \dfrac{3^i - 1}{2} \qquad A_i \equiv \{1, 0\} \pmod 4$

$A_i \equiv A_j \pmod{2^n} \implies i \equiv j \pmod{2^{n-1}}$

$$\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} = \{A_i \mid 0 \leq i < 2^{n-1}\} \cup \{-1 - A_i \mid 0 \leq i < 2^{n-1}\}$$

unione disgiunta di due insiemi di 2^{n-1} elementi

$A_i = -1 - A_j \qquad 0 \leq i, j < 2^{n-1}$
impossibile mod 4.

$$f(1) = 2c$$

$$f(A_{2^{n-1}}) \equiv 2^{n-1} \cdot f(1) \equiv f(0) \pmod{2^n}$$

$$2f(-1) = f(-1) + f(-1) = f((-1)+(-1)+2(-1)^2) = f(0) = 0$$

$$\underline{f(-1)} = \varepsilon 2^{n-1} \qquad \varepsilon \in \{0,1\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(A_i) = i \cdot f(1) = 2ic \\ f(\underline{-1-A_i}) = 2ic + \varepsilon 2^{n-1} \quad \boxed{\cdot} \end{array}\right]$$ sono effettive soluzioni dell'eq. funz.

(a, b)
- $a, b \in \{A_i\}$ ok
- $a \in \{A_i\}$ $b \in \{-1-A_i\}$ $\longrightarrow$ verifica
- $a, b \in \{-1-A_i\}$ $\longrightarrow$ verifica

$$\#\{f\} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

$\uparrow$ scelte di ε — modi di scegliere c

$$f(A_i) + f(-1-A_j) \overset{?}{=} f(A_i + (-1-A_j) + 2A_i(-1-A_j))$$

$$2ic + 2jc + \varepsilon 2^{n-1} \overset{?}{=} f\Big(\underbrace{\tfrac{3^i-1}{2} + (-1) - \tfrac{3^j-1}{2} + 2\,\tfrac{3^i-1}{2}\Big(-\tfrac{3^j-1}{2}-1\Big)}\Big)$$

$$A_{i+j} = A_i + A_j + 2A_iA_j$$

$$\boxed{\cdot} \quad f(-A_i-1) = f(A_i - 1 + 2(-1)(A_i))$$
$$= f(A_i) + f(-1)$$
$$= 2ic + \varepsilon 2^{n-1}.$$

N7. $\forall k \geq 1$ esistono infinite soluzioni $(a,b) \in \mathbb{N}_0^2$ di:

- $(a+1)^2 + \ldots + (a+k)^2 = b^2 + (b+1)^2 + \ldots + (b+k)^2$.

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $k a^2 + k(1+k) a = (k+1) b^2 + k(1+k) b$

$$\boxed{k\,(2a+(1+k))^2 - (k+1)\,(2b+k)^2} = \boxed{k \cdot (k+1)}.$$

$a=0$ $b=0$ è sol.

k dispari $\longrightarrow k \mid b$ $\quad b = kc$

$$(2a+k+1)^2 - k(k+1)\,(2c+1)^2 = (k+1)$$

k pari $\longrightarrow (k+1) \mid a$

$$\boxed{\underline{m}^2 - (k\cdot(k+1))\,\underline{n}^2 = (k+1)}$$

ammette infinite sol in $\mathbb{N}_0^2$

Ammette una soluzione $(\underline{m},\underline{n}) \in \mathbb{N}_0^2$

L'equazione di Pell

$$A^2 - D B^2 = 1,$$

se D non è un quadrato, ammette infinite soluzioni

$D = k(k+1) \notin \square$

$$\boxed{A^2 - k(k+1)\,B^2 = 1}$$

ammette infinite sol $(A,B) \in \mathbb{N}_0^2$

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{k(k+1)}\right] = \left\{ a + b\sqrt{k(k+1)} \right\}$$

$$N\left(a + b\sqrt{k(k+1)}\right) = \left(a + b\sqrt{k(k+1)}\right)\left(a - b\sqrt{k(k+1)}\right) = a^2 - k(k+1)\,b^2$$

N è moltiplicativa

$$\heartsuit \quad N\left(m+\sqrt{k(k+1)}\,n\right) = k+1$$

$$\spadesuit \quad N\left(A+\sqrt{k(k+1)}\,B\right) = 1$$

$$\forall r \geq 1 \qquad N\Big(\overbrace{\left(m+\sqrt{k(k+1)}\,n\right)\left(A+\sqrt{k(k+1)}\,B\right)^r}^{C+\sqrt{k(k+1)}\,D \qquad C,D\in\mathbb{N}_0}\Big)$$

$$= \quad k+1$$

k dispari $\rightarrow$

$$k \mid (2k+b)^2 \quad \overset{NO}{\Longrightarrow} \quad k \mid (2k+b)$$

$$k = p_1^{q_1}\cdot p_2^{q_2}\cdot \ldots$$

—— Curiosamente, $365 = 13^2+14^2 = 10^2+11^2+12^2$.

<u>Oss.</u> Esiste ~~una~~ sol. con numeri consecutivi?

$$(m+k)^2+\ldots+(m+1)^2 = m^2+(m-1)^2+\ldots+(m-k)^2$$

$$k(k+1)m \qquad = m^2 - k(k+1)m$$

$$m^2 = 2k(k+1)\,m$$

$$m = 2k(k+1) \quad \boxed{\text{SOL.}}$$

$$k=2 \rightarrow 12$$

N. 8 $\qquad f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \qquad n$ dispari >0.

$$f(x)-f(y) \mid x^n-y^n \qquad \forall x,y\in\mathbb{Z}$$

<u>Oss.</u> Vanno bene le funzioni del tipo:

$f(x) = \pm x^d + c \qquad d \mid n, \; c \in \mathbb{Z}.$

Mi basta trovare tutte le funzioni t.c. $f(0)=0$.

Sostituzione: $(x,y) \to (p,0)$ p primo

$f(p) \mid p^n$

Divisori di p^n: $\pm p^a \quad 0 \le a \le n$ FINITI

Primi INFINITI

$\Downarrow$

$\exists$ un sottoinsieme di primi $\mathcal{P}$ infinito per cui

$$f(p) = \pm p^d \qquad (0 \le d \le n)$$

Per simmetria, posso supporre che il segno sia $+$

$d=0$? $\quad p_1 \neq p_2 \in \mathcal{P} \quad \underset{\substack{\| \\ 0 = 1-1}}{f(p_1)-f(p_2)} \mid p_1^n - p_2^n \neq 0$

Divido n per d: $n = qd + r$, $0 \le r < d$.

$x \in \mathbb{Z}$ intero qualsiasi, $p \in \mathcal{P}$

$$f(p) - f(x) = \underline{p^d - f(x) \mid p^n - x^n}$$

$$p^n = p^r (p^d)^q$$

$$p^n - x^n = p^r (p^d)^q - x^n = p^r f(x)^q - x^n \equiv 0 \pmod{p^d - f(x)}$$

Per p grande,

$$|p^r f(x)^q - x^n| < |p^d - f(x)|$$

Ne segue $p^r f(x)^q - x^n = 0$ (se $x \neq 0$)

$\Rightarrow p^r$ costante $\Rightarrow r = 0$ DIVISIBILITÀ

(OPPURE $x = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ $p^d - 1 \mid p^n - 1$)*

$f(x)^q = (x^d)^q$ n dispari, q dispari

radice q-esima

$f(x) = x^d$

(tornando alle ipotesi $\pm$, $f(0) = 0$
ottengo le soluzioni $f(x) = \pm x^d + c$).

* Se $f(x) \mid g(x)$ per infiniti valori interi k allora $f(n) \mid g(n)$ $\forall n$