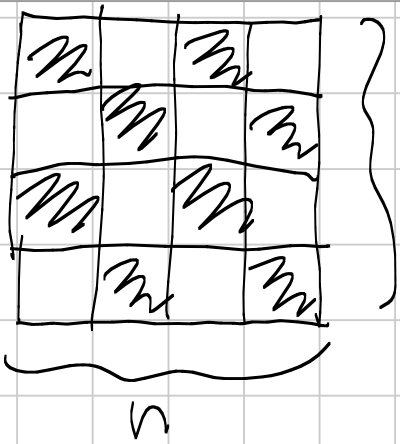
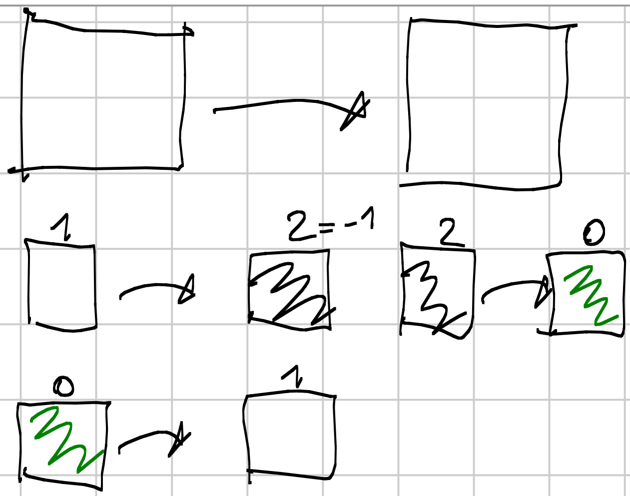
PREIMO 2013
COMBINATORIA

Titolo nota 27/05/2013

C1

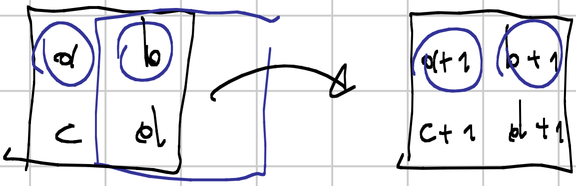




1° OSS. LE MOSSE SONO COMMUTATIVE

2° OSS. IL COLORE FINALE DI UNA CASELLA DIPENDE SOLO DAL COLORE INIZIALE E DAL NUMERO DI MOSSE CHE HANNO COINVOLTO LA CASELLA

3° OSS. TUTTO SI RIDUCE MODULO 3, ASSEGNANDO AD OGNI COLORE UNA CLASSE.

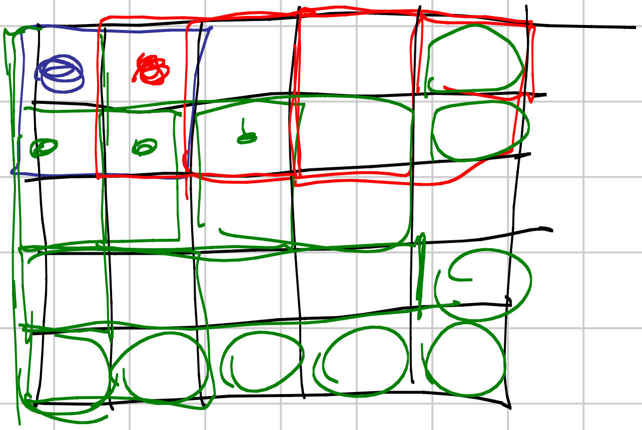


4° OSS. SCELTA UNA RIGA, LA SOMMA A SEGNI ALTERNI DELLE CASELLE È INVARIANTE PER LE MOSSE CONSENTITE

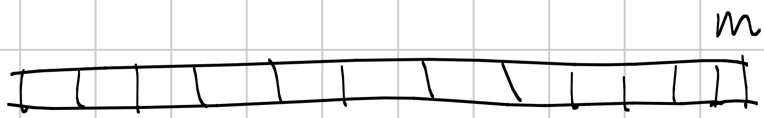
5° OSS. AFFINCHÉ n SIA BUONO $B=+1$ $N=-1$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^i}_{\text{SEGNO}} \cdot \underbrace{(-1)^i}_{\text{COLORE INIZIALE}} \equiv \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \underbrace{(-1)^{i+1}}_{\text{COLORE FINALE}} \quad (3)$$

DEVE RISULTARE $n \equiv -n \quad (3)$ OSSIA $3 \mid n$



Barbara



Alberto $1, \dots, N$ K

$k \leq N$ $\quad$ $k \leq m$

a) $m \geq N$ vince Barbara: A $n_i \to$ nella casella n_i

b) $m < N$ $\quad$ $m = 2 \quad N = 3 \quad k = 2$

$1, 2, 3$

Se Barbara ha $m < 2^k - \varepsilon$ caselle, perderà

Congettura: $\varepsilon = 1$.

Se $m < 2^k - 1$, Barbara perde:

Alberto gioca "in mezzo" $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$, $\left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$

Barbara lo scrive nella casella ℓ_1, che divide le m caselle in due intervalli, di cui uno lungo meno di $2^{k-1} - 1$.

Alberto sceglie $\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \pm \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil$ a seconda di quale direzione indica l'intervallo più corto di Barbara

$\to$ dopo k passi Barbara ha un intervallo lungo 0

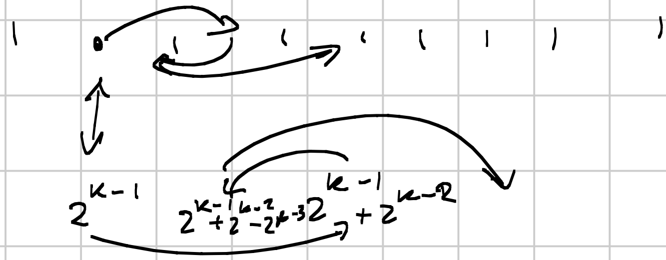
Ma Alberto ha ancora almeno un numero da scegliere in quella direzione.

Viceversa, se k non è così grande, $m \geq 2^k - 1$

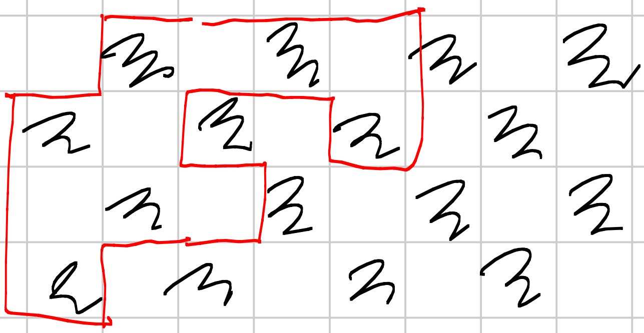
Barbara ha una strategia vincente.
Questa strategia funziona perché k è abbastanza piccolo: Barbara sceglie il multiplo di 2^{k-i-1} (alla i-esima mossa) che si trova nell'intervallo corrispondente alle scelte di Alberto:

$n_1 \dots n_i$ se $n_{\ell+1} > n_\ell$ $\quad +1$

$\qquad\qquad\quad n_{\ell+1} < n_\ell$ $\quad -1$



C3



S è la superficie di un poligono
P il perimetro
B il n° di caselle bianche
N " " " nere

$$\frac{S}{2} - \frac{P}{8} \le \frac{B}{N} \le \frac{S}{2} + \frac{P}{8}$$

1° OSS. LA TESI HA TUTTA L'ARIA DI ESSERE VERA PER UNIONI GENERICHE DI $\square$

2° OSS. WLOG $B \ge N$

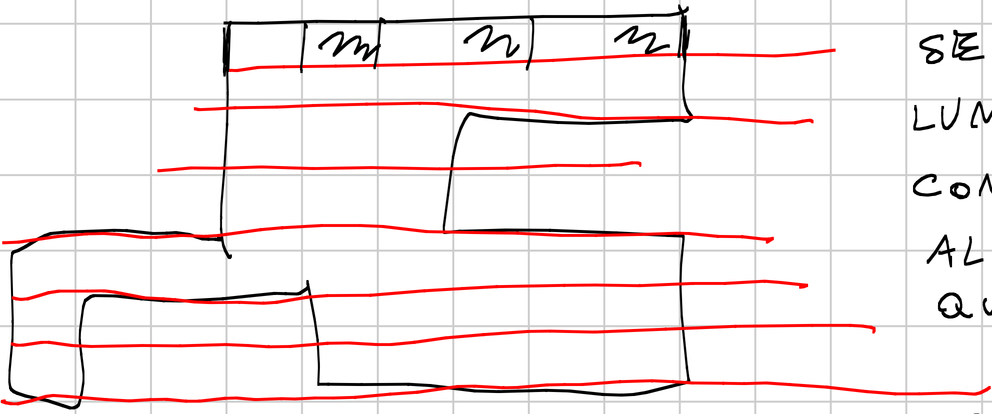
3° OSS. $\Delta = B - N \ge 0$ PER LA 2° OSS.

$$\boxed{B-N} = B+N-2N = S-2N \le S - 2\left(\frac{S}{2} - \frac{P}{8}\right) = \boxed{\frac{P}{4}}$$ DEVE ESSERE VERO

SE POI LO DIMOSTRO, ALLORA

$B = \frac{B+N}{2} + \frac{B-N}{2} \le \frac{S}{2} + \frac{P}{8}$ e lo stesso per $N \geq \frac{S}{2} - \frac{P}{8}$

5° OSS. CERCO DI ACCOPPIARE CASELLE BIANCHE E NERE



SE HO UN "SERPENTE" LUNGO ℓ, QUESTO CONTRIBUISCE AL PIÙ DI 1 ALLA QUANTITÀ $B-N$ ED ESATTAMENTE DI 2 ALLA QUANTITÀ P_V

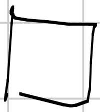
P_V È IL NUMERO DI SEGMENTI VERTICALI DEL PERIMETRO

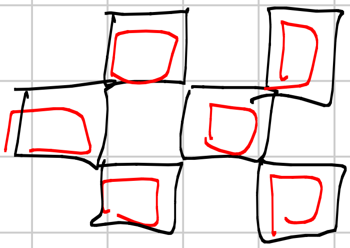
$$2 \cdot (B-N) \le P_V$$

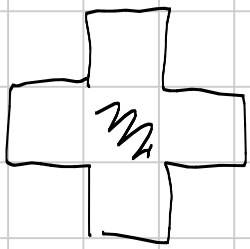
6° OSS. $\quad 2 \cdot (B-N) \le P_O$

5+6 = 7 $\quad 4(B-N) \le P_O + P_V = P$

2ª SOLUZIONE

 ← QUI HO $S = 1$, $P = 4$ $\quad B = \frac{S}{2} + \frac{P}{8}$





$S = 5$

$P = 12$ $\quad B = 4 = \frac{S}{2} + \frac{P}{8}$

RAGIONIAMO PER INDUZIONE SU N CHE VA DA 0 A B

PASSO BASE $\quad N=0 \quad$ HO SOLO CASELLE BIANCHE

$S = B \qquad P = 4B$

PASSO INDUTTIVO AGGIUNGO UNA CASELLA NERA (SENZA SFORARE!)

$S \to S+1$

$B \to B$

P DIMINUISCE AL PIÙ DI 4

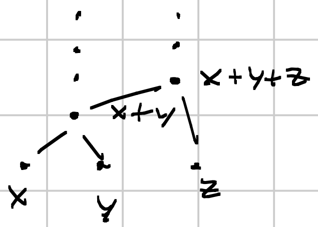
$\boxed{\frac{S}{2}+\frac{P}{8}}$ AUMENTA O RIMANE INVARIATO

S insieme di naturali di 100 cifre decimali

$x \in S$ cattivo se qualunque coppia $y, z \in S$ io prenda (anche con $y = z$) $y + z \neq x$.

Quanto vale al massimo $|S|$?

$x, y \in S$ se $x + y < 10^{100}$ e $x + y \notin S$, mi conviene metterci lui e i suoi multipli $< 10^{100}$



Congettura: tutti gli elementi di S sono così? Cioè somme e prodotti a coefficienti interi di numeri cattivi?

$x \in S$ $\begin{cases} x \text{ è cattivo} \\ x \text{ non è cattivo} \Rightarrow \exists y_1, y_2, k \in \mathbb{N} \quad x = k(y_1 + y_2) \quad y_1, y_2 \in S \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_1, y_2 < x \end{cases}$

per induzione (Base: il min S è cattivo) su $|x|$

posso supporre che $y_1 = k_1 c_1 + k_2 c_2 + \dots + k_e c_e$

$k_i \in \mathbb{N}$ c_e cattivi in S

$y_2 = \overline{k}_1 \overline{c}_1 + \dots \overline{k}_{\overline{e}} \overline{c}_{\overline{e}}$

$\Rightarrow$ anche x lo è.

Se allora $c_1 \dots c_N$ sono i numeri cattivi di S,

$S = \{ k_1 c_1 + \dots + k_N c_N \mid \text{per certe scelte di } k_i \in \mathbb{N} \}$.

$|S|$ massima $\Longleftrightarrow$ fare tutte le scelte possibili dei k_i. $0 \leq k_i \leq 9$ (ma non tutti 0)

Scelgo $c_i < \frac{10^{100}}{9}$, ma visto che $c_i \geq 10^{99}$, in realtà $\sum k_i \leq 9$. $N \leq 10$ mi conviene $N = 10$

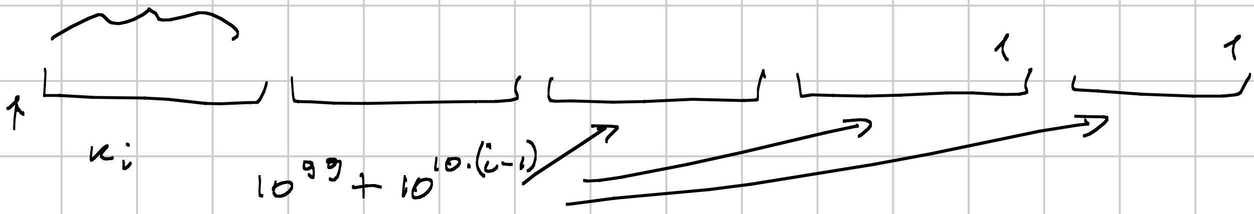
$k_1 \dots k_{10}$ $\quad \sum_{i=1}^{10} k_i \leq 9$ $\quad$ In quanti modi?

$c_{11} = 0$ $\quad \sum_{i=1}^{11} k_i = 9$ $\quad k_{11} = 9 - \sum_{i=1}^{10} k_i$

$\sum_{i=1}^{11} k_i c_i = \sum_{i=1}^{10} k_i c_i$,

2 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 → 19 posti di cui sceglierne 10 x le stanghette

$\binom{19}{10} - 1$ perché 000000 000 0 9 è vietato.



Questa è una possibile scelta per i c_i.