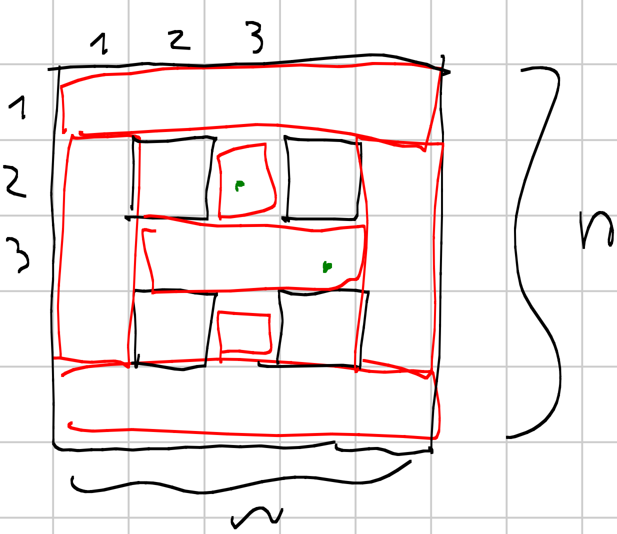
COMBINATORIA (POMERIGGIO)

Titolo nota 27/05/2013

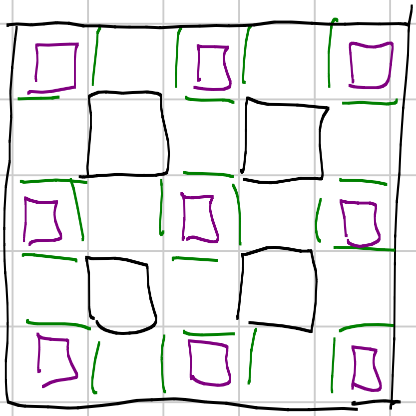
C5



SCACCHIERA $n \times n$

TOLGO LE CASELLE CON LE COORDINATE PARI

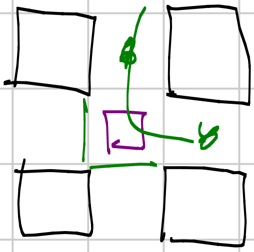
QUANTI RETTANGOLI SERVONO PER TASSELLARLA?

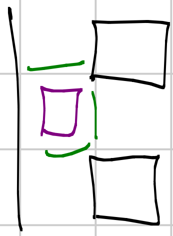


PARTO DALLA MASSIMA SUDDIVISIONE E COMINCIO A CANCELLARE SEGMENTI VERDI, SENZA CREARE DEI NON-RETTANGOLI

QUANTI SEGMENTI VERDI POSSO CANCELLARE AL MASSIMO?

PER OGNI CASELLA □ NON DI ANGOLO POSSO CANCELLARE AL PIÙ 2 SEGMENTI CONFINANTI





MANCA IL CONTO ESPLICITO ...

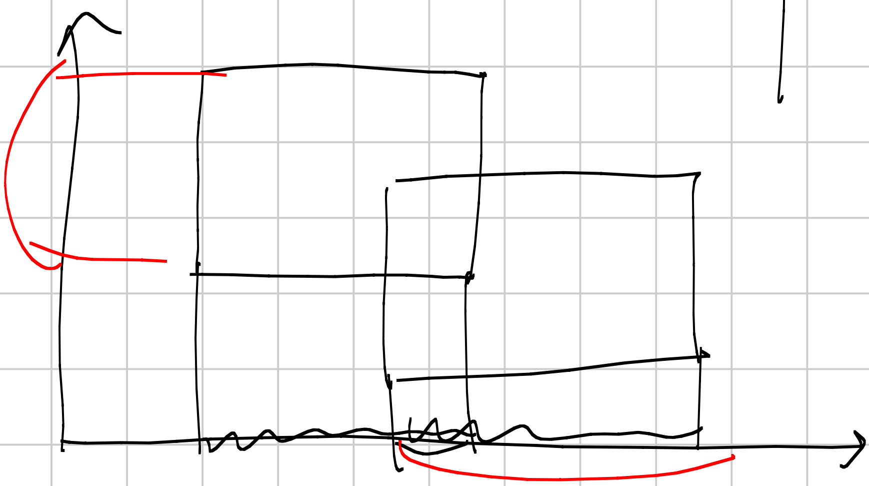
$1 + \frac{n^2}{4}$ PER n PARI $\qquad 3 + \frac{(n-1)^2}{4}$ PER n DISPARI

$\boxed{C6}$

2013 rettangoli

$K_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$

$\forall i$ K_i interseca almeno 1909



$\underbrace{[a_1, b_1], \dots, [a_{2013}, b_{2013}]}_{\mathcal{I}}$ $\leftarrow$

Lemma $\exists^{\text{no}}$ 1007 intervalli t.c. intersecano tutti gli altri.

Idem su asse y

Lemma

Dati $\overbrace{I_i = [a_i, b_i] \quad i = 1, \dots, n}^{\mathcal{I}}$ t.c. $\forall i = 1, \dots, n$ l'intervallo I_i interseca almeno ξ degli altri.
Allora $\exists^{\text{no}}$ $2\xi + 2 - n$ intervalli della famiglia $\mathcal{I}$ che intersecano tutti gli altri.

Dim

WLOG $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le a_n$

$(*)$ $\forall i \le \xi + 1$ $\quad b_i \ge a_{\xi+1} \ge a_j \ge a_i$ $\qquad I_i$ $\qquad a_{\xi+1}$ b_1

Poiché $[a_n, b_n]$ interseca almeno ξ intervalli:

$\nexists^{\text{no}}$ $\underbrace{\{i_1, i_2, \dots, i_\xi\}}_{\xi}$ t.e. $\boxed{b_{i_k} \geq a_n}$ $\forall k = 1, \dots, \xi$ (*)

$\{1, 2, 3, \dots, \xi, \xi+1, \underbrace{\xi+2, \dots, n-1}_{n-\xi-2}\}$

$\xi - (n-\xi-2) = \boxed{2\xi+2-n}$

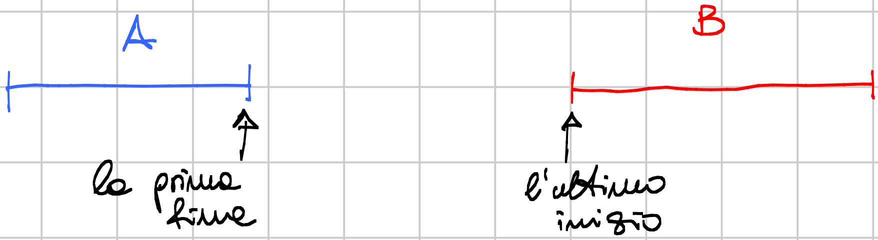
$\boxed{i_1, i_2, \dots, i_k}$

$I_{i_0} = [a_{i_j}, b_{i_j}]$

I_i $\quad i > i_j \quad i < i_j$

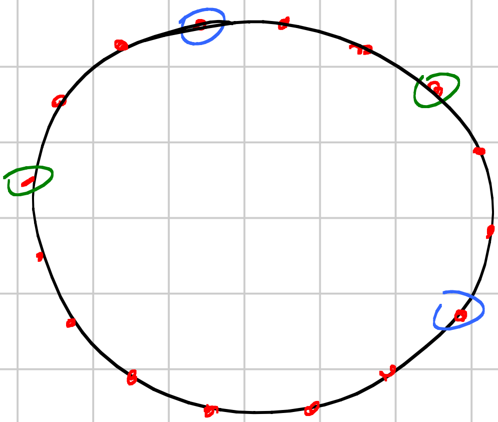
$[a_{i_1}, b_i]$

Ogni intervallo ne interseca almeno altri k.

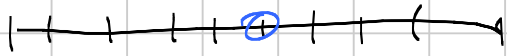


Esistono k intervalli che $\cap A$, e k che $\cap B$.

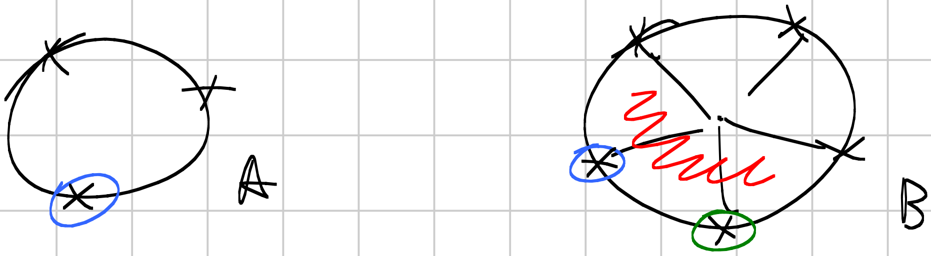
$\Rightarrow$ $2k - n + 2$ che $\cap A, \cap B$.

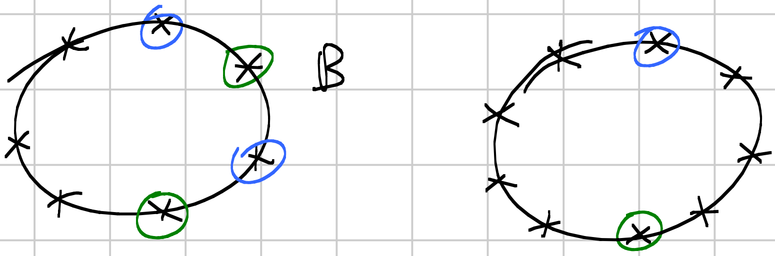


$2n+1$



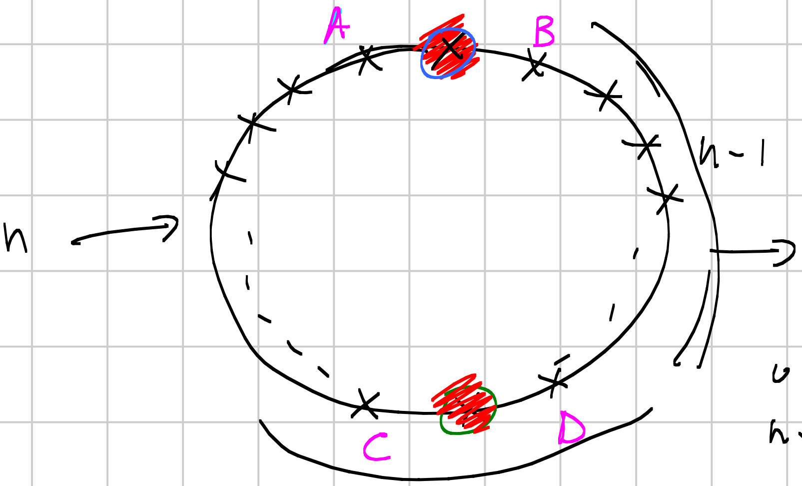
1ª Oss. Uno vince se riesce a realizzare una striscia di n punti tolti.





vince Barbara

Congettura: da 7 in poi vince Barbara giocando "lontano".

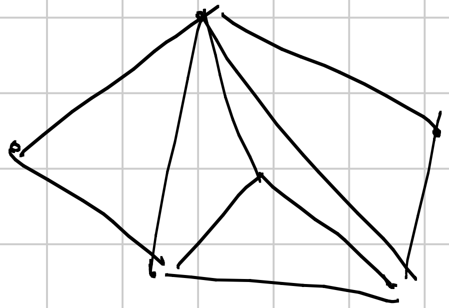


$2n-1$-agono sta ad Alberto e si vince con una striscia da $n-1$ punti tolti.

Per induzione (p. base, 5, 7) Barbara sa vincere sul $2n-1$-agono facendo una striscia da $n-1$. La striscia conterrà almeno uno tra A, B, C o D. Quindi nel $2n+1$-agono questa si attacca (o contiene) almeno uno dei due punti tolti.

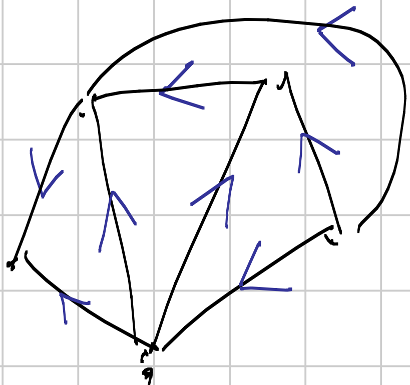
Viceversa, per vincere sul $2n+1$-agono bisogna aver fatto una striscia da $n-1$ nel $2n-1$-agono, quindi, caro Alberto, per te non c'è speranza

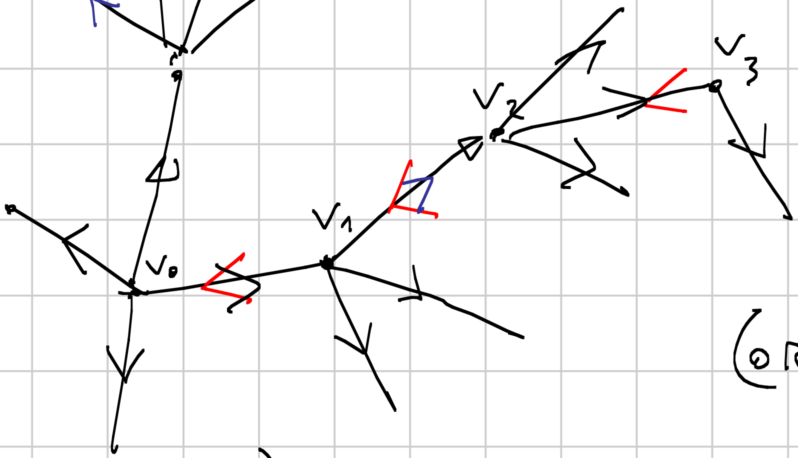
C 8



GRAFO PLANARE

È POSSIBILE ORIENTARE GLI ARCHI IN MODO CHE DA OGNI VERTICE NE ESCANO AL PIÙ TRE.





SEGUO UN PERCORSO ORIENTATO $V_0 \to V_1 \dots \to V_n$

T.C. DA V_i A V_{i+1} C'È UN ARCO (ORIENTATO DA V_i A V_{i+1})

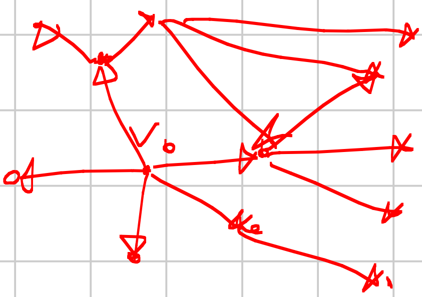
SE $\underbrace{d^+(V_0)}_{\text{N° ARCHI USCENTI}} \geq 4$ E $d^+(V_n) \leq 2$

POSSO INVERTIRE GLI ORIENTAMENTI DI TUTTO IL CAMMINO

$d^+(V_0)$ DIMINUISCE DI 1 ; $d^+(V_n)$ AUMENTA DI 1 ; $d^+(V_i)$ RIMANE UGUALE PER $0 < i < n$

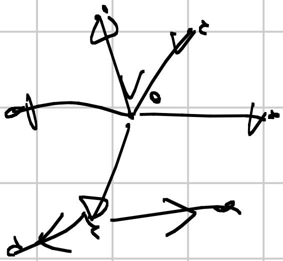
LA QUANTITÀ $\sum_{\substack{V \text{ VERTICE} \\ \text{CRITICO}}} d^+(V)$ DIMINUISCE

MA ESISTERÀ DAVVERO UN PERCORSO $V_0 \to V_1 \dots \to V_n$ CON $d^+(V_n) < 3$?



Sia S_0 L'INSIEME DEI VERTICI RAGGIUNGIBILI DA V_0 CON CAMMINI ORIENTATI

SIA E_0 L'INSIEME DEGLI ARCHI CHE ATTUALMENTE ESCONO DA UN VERTICE DI S_0



(S_0, E_0) È UN SOTTOGRAFO DEL GRAFO ORIGINALE QUINDI È PLANARE E CONNESSO

FATTO NOTO | IN UN GRAFO PLANARE CONNESSO FINITO

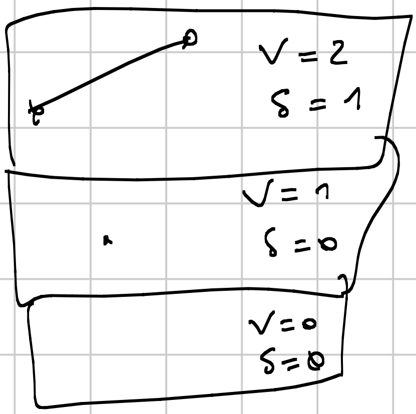
$$F + V = S + 2$$

2

n° di facce n° vertici n° di archi

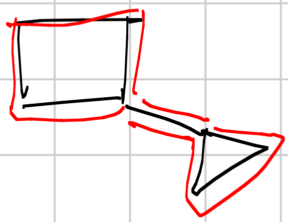
DISUGUAGLIANZA NOTA | QUASI SEMPRE IN UN GRAFO PLANARE

$$3V - 6 \geq S$$



CASI DEGENERI

SE OGNI FACCIA CONFINA CON ALMENO 3 ARCHI (CONTATI CON MOLTEPLICITÀ)



n° DI COPPIE ARCO-FACCIA CONFINANTI

SONO $2S$

SONO ALMENO $3F$

$$2S \geq 3F$$

$$|E_0| \leq 3|S_0| - 6$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{v \in S_0}} d^+(v) \leq 3|S_0| - 6$$

esiste un vertice v in S_0 con $d^+(v) \leq 3 - \frac{6}{|S_0|}$ e quindi ≤ 2