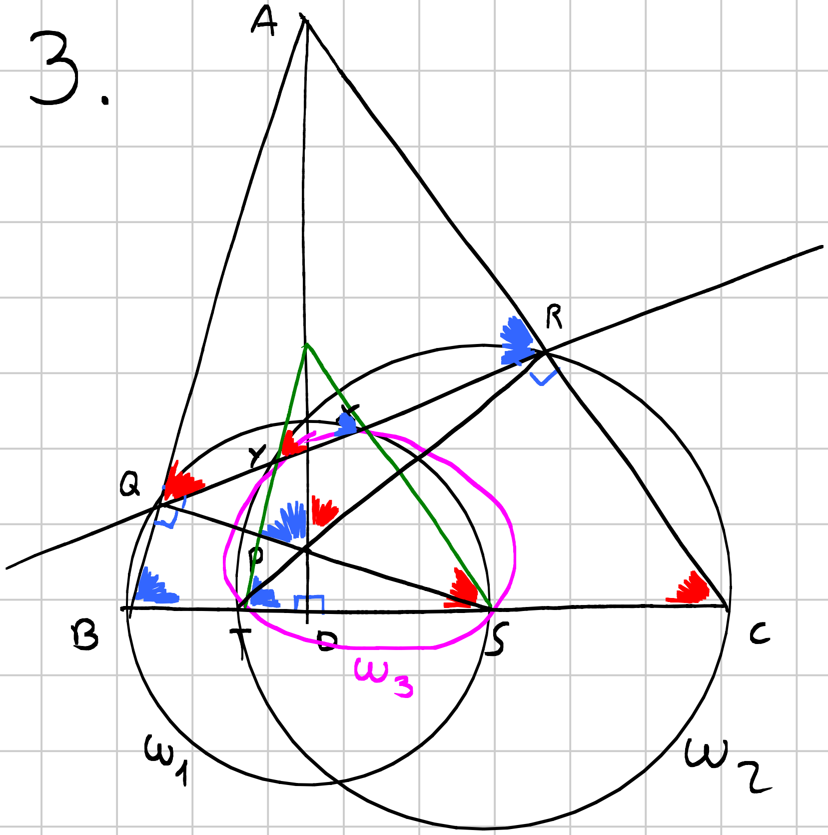
PREIMO 2013 - GM

Titolo nota 30/05/2013

3.



$D\hat{C}A = R\hat{P}A = R\hat{Q}A = \gamma$

$A\overset{\triangle}{R}Q \sim A\overset{\triangle}{B}C$

$BCRQ$ ciclico

$BSXQ$ ciclico $\rightarrow$

$\rightarrow A\hat{Q}X = B\hat{S}X$

uguale dall'altra parte

$SX \parallel AC$ $\qquad TY \parallel AB$

$TSXY$ ciclico

TY asse radic di ω_2 e ω_3

SX asse radic di ω_1 e ω_3

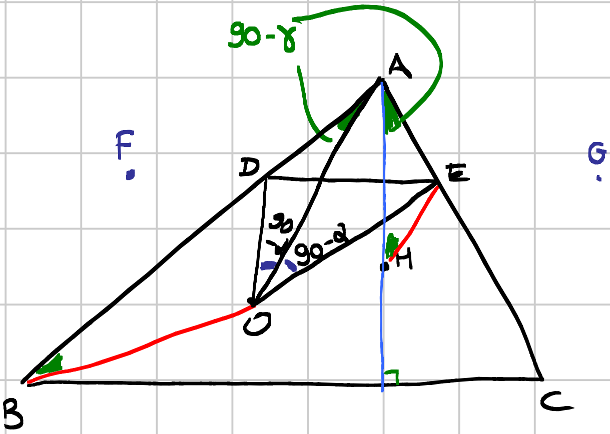
Hope $\rightarrow$ AD asse radicale di ω_1 e ω_2?

1. $AD \perp$ congiungente centri ω_1 e ω_2

2. A ha la stessa potenza su ω_1 e ω_2
vero perché $BCRQ$ ciclico

Esercizio 1

Tesi: $D\hat{O}A = E\hat{O}A$

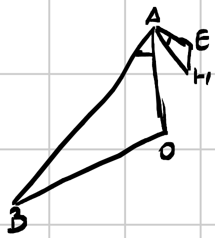


$\overset{\triangle}{AOB} \sim \overset{\triangle}{AEH}$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{AEO} \sim \overset{\triangle}{AHB}$ (perchè $B\hat{A}O = H\hat{A}E$, $\dfrac{AE}{AO} = \dfrac{AH}{AB}$)

$A\hat{O}E = A\hat{B}H = 90 - \alpha$

$\Rightarrow$ ok perchè "è simmetrico in β e γ".



Soluzione 2

Tesi: $D'\hat{A'}A = A\hat{A'}E'$.

H' = simmetrico di H rispetto ad AB.

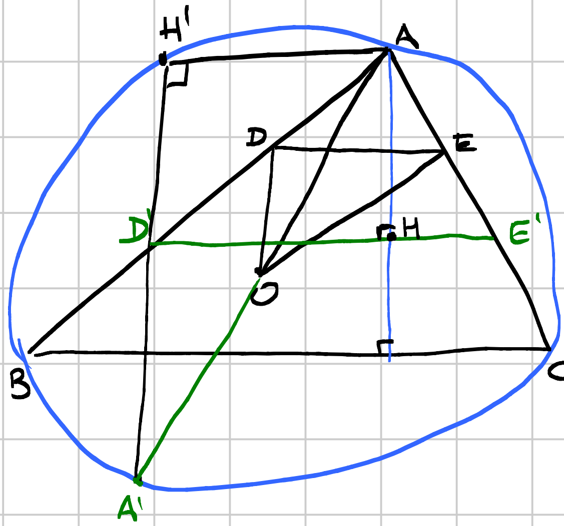
$A\hat{H'}D' = 90° = A\hat{H'}A'$

AA' è diametro

$\Rightarrow A', D', H'$ sono allineati

$A\hat{A'}H' = A\hat{C}H' = 90 - \alpha$

non dipende da β e γ!



Soluzione 3

Mostriamo che $\sin A\hat{O}D = \sin A\hat{O}E$.

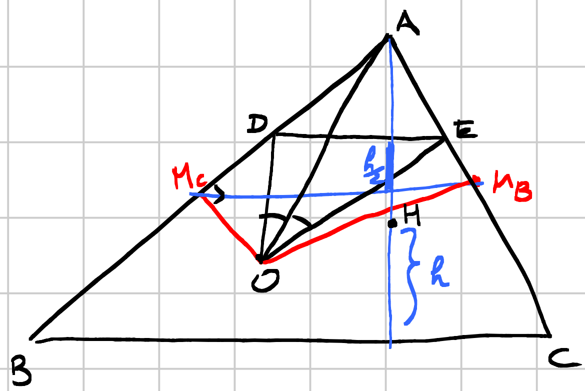
Teorema dei seni $\dfrac{AD}{\sin A\hat{O}D} = \dfrac{AO}{\sin A\hat{D}O}$ $\qquad \dfrac{AE}{\sin A\hat{O}E} = \dfrac{AO}{\sin A\hat{E}O}$

Resta da dimostrare

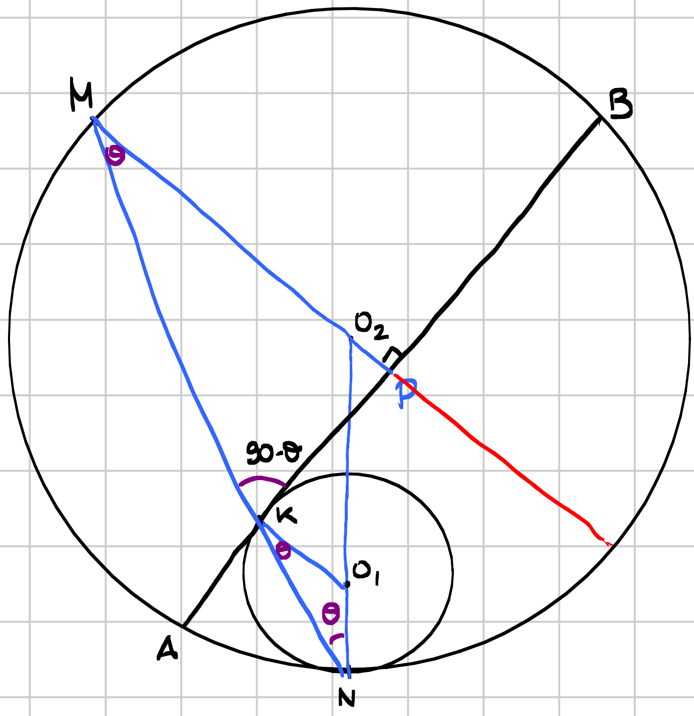
$$AD \cdot \sin A\hat{D}O = AE \cdot \sin A\hat{E}O$$

$\sin A\hat{D}O = \sin O\hat{D}M_c = \dfrac{OM_c}{OD}$

....



Esercizio 2



Oss: N, O_1, O_2 sono allineati

Oss: M pto medio arco $\widehat{AB}$.

N, K, M sono allineati.

Omotetia di centro N e fattore $\frac{r_2}{r_1}$

$\omega_1 \longrightarrow \omega_2$

$AB \longrightarrow$ parallela ad AB tangente a ω_2

$\Rightarrow K \longrightarrow M$.

Gradi di libertà: $r_1, r_2, \theta = K\hat{N}O_1$.

$MKB = 90-\theta$ (angolo limite in ω_1 che insiste su $\widehat{KN}$)

$$R_{BMK} = \frac{BM}{2\sin(90-\theta)} = \frac{BM}{2\cos\theta} \qquad (\times)$$

Dobbiamo scrivere BM in funz di θ.

P pto medio AB, allineato con M e O_2.

$$\begin{aligned} BM^2 &= BP^2 + PM^2 \\ &= BP\cdot PA + PM^2 \\ &= PM\cdot(2r_2 - PM) + PM^2 \quad \text{(potenza di } P \text{ rispetto a } \omega_2) \\ &= 2r_2\, PM. \qquad (*) \end{aligned}$$

$MK = MN - NK = 2r_2\cos\theta - 2r_1\cos\theta = 2(r_2-r_1)\cos\theta$

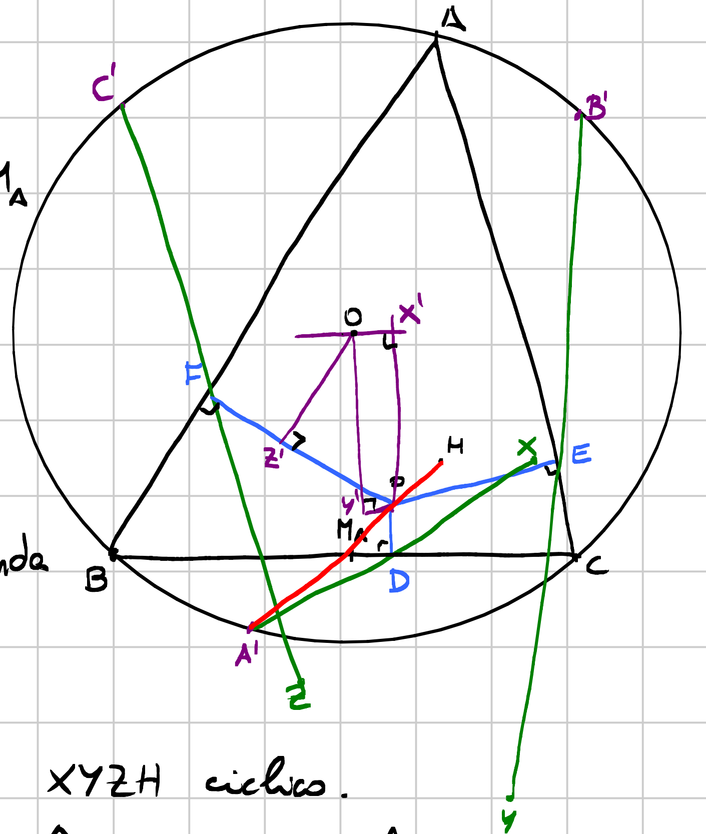
$MP = MK\cos\theta = 2(r_2-r_1)\cos^2\theta$

In $(*)$ $\quad BM^2 = 4r_2(r_2-r_1)\cos^2\theta$

Da $(\times)$ $\quad R_{BMK} = 2\sqrt{r_2(r_2-r_1)} \longrightarrow$ non dipende da θ.

Sol 2 usare la formula $R_{ABC} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4[ABC]}$. Resta da dim che $\frac{BK}{BN}$ è costante (conto).

Esercizio 4



Oss 1: $HX \parallel BC$ $\quad M_A D = \frac{1}{2} HX$.

Infatti il simmetrico di H rispetto a M_A è A' (coi vettori con origine in O,

$H = A+B+C \qquad M_A = \frac{B+C}{2}$

simmetrico di H rispetto a M_A è

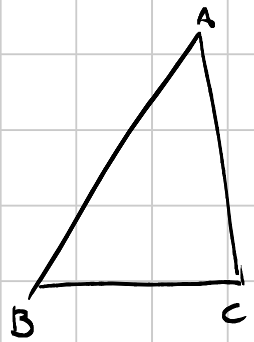
$2M_A - H = B+C-(A+B+C) = -A$)

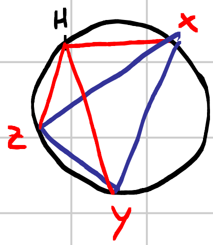
Omotetia di centro A' e fattore 2 manda

$M_A \to H \qquad D \to X$.

Oss 2 è sufficiente dimostrare che $XYZH$ ciclico.

Infatti fatta la costruzione $X\hat{Y}Z \sim A\hat{B}C$:





$Z\hat{X}Y = Z\hat{H}Y =$ "l'angolo tra ZH e HY"

$=$ "l'angolo tra AB e AC"

$= B\hat{A}C$

e cicliche.

Basta far vedere che $XYZH$ è ciclico.

Sia $X' =$ intersezione tra PD e una parallela a BC passante per O,

e cicliche.

$OX' \parallel M_A D$ e $OX' = M_A D = \frac{1}{2} HX \Rightarrow \overset{\triangle}{OX'Z'} \sim HXZ$

(con lati paralleli e riscalati di un fattore $\frac{1}{2}$)

$OX'Y'Z' \sim HXYZ$

$OX'Y'Z'$ è ciclico perché X', Y', Z' appartengono alla circonf di diametro OP.

Esercizio: per mostrare che $HXYZ$ è ciclico, sia P' = simmetrico di P rispetto a O,

O' = simmetrico di P' rispetto a $N = \frac{O+H}{2}$.

Far vedere che O' è centro della circonf per $HXYZ$.

In particolare, mostrare che l'asse di HX passa per O'.

(definire D' il simmetrico di D rispetto a M_A e mostrare $D'M_A = H_AQ$).

Es 2: complessi.