PRE IMO 2013 – Teoria dei Numeri – Mattino

Titolo nota 29/05/2013

Esercizio 1 k tali che

a) $\forall p$ dispari $\exists n > 0$ con $p \mid k^n - n$ $\quad p \mid k^{n+1} - (n+1)$

b) $\forall p$ dispari $\exists n > 0$ con $p \mid k^n - n^2$ $\quad p \mid k^{n+1} - (n+1)^2$

Oss. banale (vale per a) e b)): se p è dispari $p \nmid k$. $\quad k = 2^m$

a) $p \mid k^n - n \quad k^{n+1} \equiv n+1 \pmod p \quad k^{n+1} \equiv nk \pmod p$

$nk \equiv n+1$, $\quad n(k-1) \equiv 1 \quad k-1$ è invertibile mod p

$k - 1 = 2^b \quad b \geq 1$ impossibile $k = 2^b + 1$ è divisibile per un primo dispari

$b = 0 \quad \boxed{k = 2}$

$n \equiv 0 \pmod{p-1} \qquad n \equiv 1 \pmod p$

b) $\boxed{k = 2^m}$. Supponiamo che $p \mid k - 1$

$k \equiv 1 \pmod p \qquad p \mid k^n - n^2 \qquad n^2 \equiv 1 \pmod p$

$p \mid n^2 k - (n+1)^2 \qquad n^2 - (n+1)^2 \equiv 0 \pmod p$

$2n + 1 \equiv 0 \ (p) \qquad n = \frac{p-1}{2} \pmod p$

$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv 1 \pmod p \qquad (p-1)^2 \equiv 4 \pmod p$

$p = 3$

$\boxed{k - 1 = 3^t}$

$2^m = 3^t + 1 \qquad m = 2s$

$3^t = 2^{2s} - 1 = (2^s + 1)(2^s - 1)$

$s = 1 \qquad t = 1$

$\boxed{k = 4} \qquad n \equiv 0 \pmod{p-1}$

$n \equiv 1 \pmod p$

Esercizio 2

$p_1, \dots, p_n$ primi distinti

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente

$A_i = \{ f(p_i k + r_i) \mid k = 1, 2 \dots \}$ progressioni aritmetiche

$\forall i \neq j \quad \exists \; x_{ij}$ che sta in entrambe le prog. aritm.

A_i ha ragione d_i.

$$f(x_{ij} + p_i p_j) = \begin{cases} f(x_{ij}) + d_i p_j \\ f(x_{ij}) + d_j p_i \end{cases} \Rightarrow d_i p_j = d_j p_i$$

$d = d_i / p_i$ è costante

Posso risolvere:

$$x \equiv r_i \pmod{p_i}$$
$$y + i \equiv 0 \pmod{p_i}$$

$$a = x + y$$
$$f(x+y+i) = f(x) + \frac{y+i}{p_i} d_i = f(x) + dy + di$$

Esercizio 3

$$n = n_1^{a_1} n_2^{e_2} \cdots n_k^{a_k} = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1 - 1)(n_2 - 1) \cdots (n_k - 1)} - 1$$

$n_i > 3 \qquad (n_i \text{ dispari}) \qquad n = 2^m - 1$

m grande $\quad 2^m - 1 > m^3 \qquad (m \geq 10)$

$$m^3 = \left(\frac{n_1 - 1}{2}\right)^3 \cdots \left(\frac{n_k - 1}{2}\right)^3 \geq \prod_{i=1}^{k} \left\{ 4 \left(\frac{n_i - 1}{2}\right) \right\} > \prod_{i=1}^{k} n_i = n = 2^m - 1$$

Unica sol. $\quad m = 3$

Esempio: escludere $m = 8 \qquad 2^8 - 1 = 255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$

$n_1 = 15 \quad n_2 = 17 \qquad n_1 = 51 \quad n_2 = 5 \qquad n_1 = 255$

$$n = n_1^{a_1} n_2^{e_2} \cdots n_k^{a_k} = \boxed{2^{\frac{1}{2^k}(n_1 - 1)(n_2 - 1) \cdots (n_k - 1)} - 1}$$

p il più grande primo di n.

$p \leq \max\{n_i\}$

$2^t - 1$ esiste $p > t+1$ primo t.c. $p \mid 2^t - 1$

Teorema di Zsigmondy(?): $\forall a, n \ \exists p: \mathrm{Ord}_p(a) = n$

($a^n - 1$ ha un primo che $a^1-1, a^2-1, \dots, a^{n-1}-1$ non avevano)

Trovare che per $a=3$, $n=2$.

$\mathrm{Ord}_p(2) = t \Rightarrow t \mid p-1 \Rightarrow \boxed{p \geq t+1}$

$$1 + \frac{1}{2^k}(n_1 - 1)\cdots(n_k - 1) \leq p \leq \max\{n_i\}$$

Esercizio 4

$$\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$$

$n = 1$ $\quad 1 > \frac{c}{\sqrt{3}}$ $\quad c < \sqrt{3}$

$$n\sqrt{3} - \frac{c}{n\sqrt{3}} > [n\sqrt{3}] = k$$

$$\boxed{3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > 3n^2}$$

$k^2 < 3n^2$

$k^2 \neq 3n^2 - 1$

$k^2 \leq 3n^2 - 2$

Equazione di Pell

$$3n^2 - k^2 = 2$$

$n = 1 \quad k = 1$ $\qquad (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 2$

$$(2+\sqrt{3})^m (2-\sqrt{3})^m = 1$$

$$\underbrace{\left[(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^m\right]}_{x_m + \sqrt{3}y_m} \underbrace{\left[(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^m\right]}_{\leftarrow x_m + \sqrt{3}y_m} = 2$$

Se $c > 1$ $\quad 3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} \leq 3n^2 - 2$ per n grande

→ non funziona .

→ $c \leq 1$

$c = 1$ FUNZIONA $\quad 3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > 3n^2 - 2$