PreIMO 2013

Stampato integrale delle sessioni

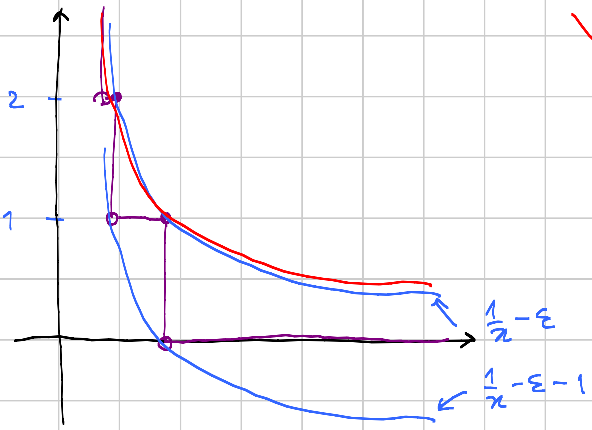
Autori vari

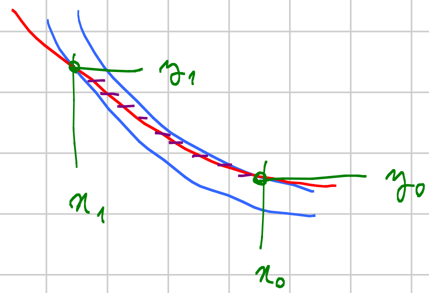
Indice

ALGEBRA

Titolo nota 28/05/2013

$\boxed{1}$ $\quad \dfrac{1}{x+\varepsilon} = \left\lfloor \dfrac{1}{x} - \varepsilon \right\rfloor \qquad \varepsilon := n^{-2}$





$a \in \{0,1\}$

$$\frac{1}{x+\varepsilon} = \frac{1}{x} - \varepsilon - a \qquad \cancel{x} = \cancel{x} + \varepsilon - (\varepsilon+a)\,x\,(x+\varepsilon)$$

$$(\varepsilon+a)x^2 + (\varepsilon+a)\varepsilon x - \varepsilon = 0$$

$$x^2 + \varepsilon x - \frac{\varepsilon}{a+\varepsilon} = 0$$

$$x_{0,1} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4\varepsilon}{a+\varepsilon}} - \varepsilon}{2}$$

$$y_{0,1} = \frac{1}{x_{0,1}+\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4\varepsilon}{a+\varepsilon}} + \varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{4}} + \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{4}} + \frac{\varepsilon}{2}} < 1$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = n$$

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ per x piccolo

$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

$$(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 < 1$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{-1} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\underbrace{\sqrt{1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{4}}}_{\sqrt{1-\frac{3}{4}\varepsilon}\ \approx\ 1-\frac{3}{8}\varepsilon} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{-1}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right)$$

$$\approx n\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \approx n - \frac{1}{2}$$

1 (2° approccio)

$$\frac{1}{x+\frac{1}{n^2}} = \left\lfloor \frac{1}{x} - \frac{1}{n^2} \right\rfloor = m$$

x positivo

$\Downarrow$

$$\boxed{m < n^2}$$

$$\frac{1}{x+\frac{1}{n^2}} = m \qquad x = \frac{1}{m} - \frac{1}{n^2}$$

$$m \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{n^2} < m+1$$

$$0 \leq \frac{n^2 m}{n^2 - m} - \frac{1}{n^2} - m < 1$$

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ m \geq 1}}{\leq} \frac{m^2}{n^2 - m} - \frac{1}{n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ m^2 < n^2}}{<} 1$$

$m = 1, 2, \ldots, n-1$

$\boxed{4}$ Soluzione furba: $p(x) = a_n x^n + \cdots\cdots + a_0$

$$q(x) = p(x+1) - p(x) = a_n \underbrace{\left((x+1)^n - x^n\right)}_{} + a_{n-1}\left((x+1)^{n-1} - x^{n-1}\right) \cdots \cdots + (a_0 - a_0)$$

$$= a_n \cdot n x^{n-1} + \text{termini di grado minore}$$

Se ho un polinomio di grado n, se applico $n+1$ volte le diff. finite ottengo il polinomio nullo. Al passo prima ho un polinomio costante $= a_n \cdot n!$

$$q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i \, p(x+i)$$

$p(x+1) - p(x)$

$p(x+2) - 2p(x+1) + p(x)$

$p(x+3) - 3p(x+2) + 3p(x+1) - p(x)$

$p(x) = x^2$

p	0	1	4	9	16	25	..
$m=1$	1	3	5	7	9		
$m=2$	2	2	2	2			
$m=3$	0	0	0				

$p(k) = 2^k$ se $k = 0, \ldots, n$ $\quad p$ di grado n

$p(n+1)$

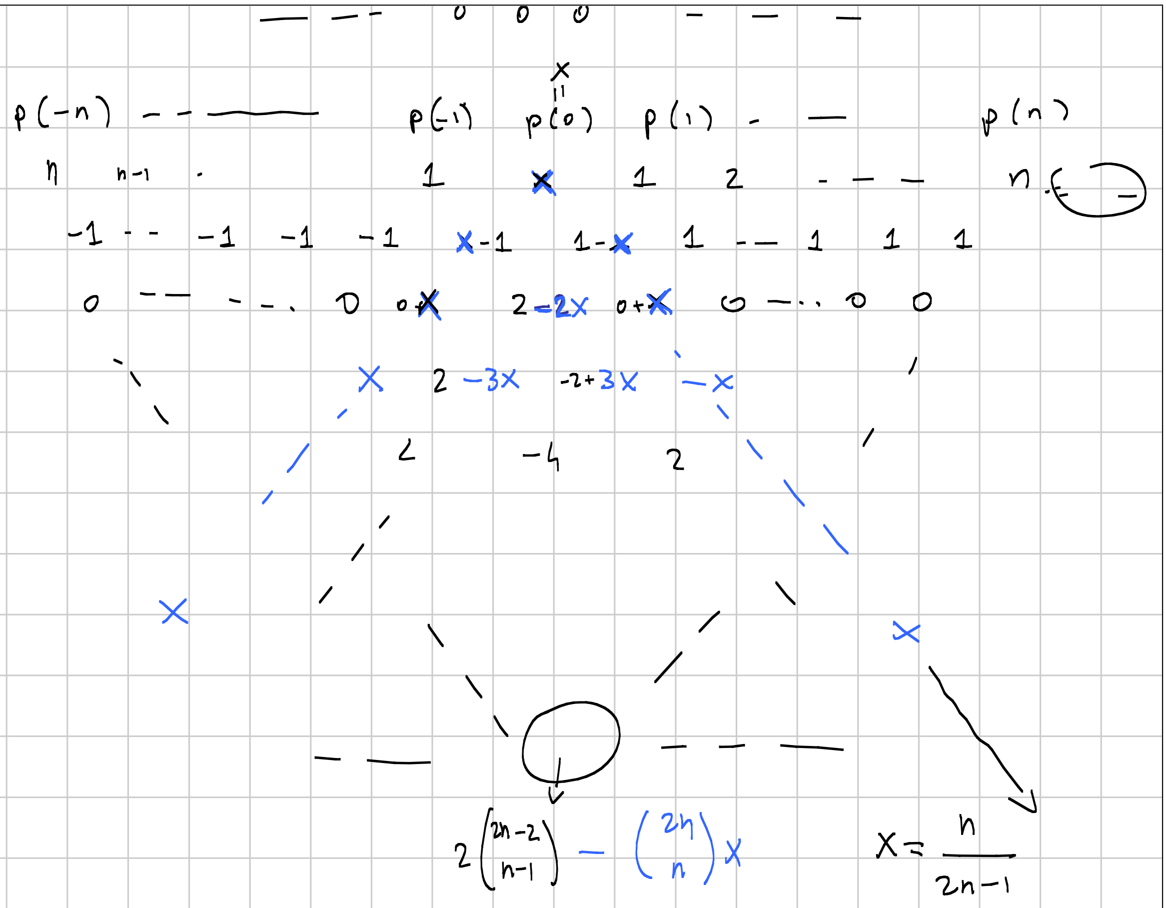
$1 \quad 2 \quad 4 \quad \ldots \quad 2^{n-1} \quad 2^n \quad 2^{n+1}-1$

$1 \quad 2 \quad \ldots \quad 2^{n-2} \quad 2^{n-1}$

$4 \quad 7$

$1 \quad 2 \quad 3$

$1 \quad 1$



Polinomi di Lagrange

$p(x_j) = y_j \qquad j = 1, 2, \dots, m \qquad \deg p = m-1$

$\exists!$ soluzione se $x_i \neq x_j \quad \forall\, i \neq j$ esiste $(\exists)$ ed è unica $(!)$

un modo: pol di Lagrange

$j = 1, \dots, m \qquad \ell_j(x) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_1}{x_j - x_1} \cdot \dots \cdot \widehat{\frac{x - x_j}{x_j - x_j}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_m}{x_j - x_m}$

$\ell_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$ delta di Kronecker

$\sum_{j=1}^{m} y_j \ell_j(x) = p(x)$

$r(x) := p(-x)$ passa per gli stessi punti + unicità $\Rightarrow r(x) = p(x)$

$p(x)$ è pari $\quad p(-x) = p(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n-2} x^{2n-2} =: q(x^2)$

$q(x)$ è un pol. di grado $n-1$ tale che $q(\underset{x_k}{k^2}) = \underset{y_k}{k} \qquad k = 1, 2, \dots, n$

$$p(0)=q(0)=\sum_{j=1}^{n} j\,\ell_j(0)=\sum_{1}^{n} j\prod_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n}\frac{0-i^2}{j^2-i^2}=\sum j\,(-1)^{n-1}\frac{(n!)^2}{j^2}\prod_{i\neq j}\frac{1}{(j+i)(j-i)}$$

$$=\sum(-1)^{n-1}\frac{(n!)^2}{j}\,\frac{j!\cdot 2j}{(j+n)!}\underbrace{\prod_{i=1}^{j-1}\frac{1}{j-i}}_{\frac{1}{(j-1)!}}\underbrace{\prod_{i=j+1}^{n}\frac{1}{j-i}}_{(-1)^{n-j}\frac{1}{(n-j)!}}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(n!)^2\frac{\cancel{j!}\,j\,2}{(j+n)!\,\cancel{(j-1)!}\,(n-j)!}$$

$$\frac{2(n!)^2}{(2n)!}\sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{n-j}(-1)^{j-1}(j-n)+n\,\frac{2(n!)^2}{(2n)!}\sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{n-j}(-1)^{j-1}$$

$$(\quad)\sum_{j=1}^{n-1}2n\binom{2n-1}{n-j-1}(-1)^{j-1}+(\quad)\sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{n-j}(-1)^{j-1}$$

$$\binom{2n-1}{n-j-1}+\binom{2n-1}{n-j}$$

$\boxed{3}$ $\quad a,b,c\geq 0 \qquad S:=a+b+c=3$

$$3\sum_{cyc}a^4+33\overset{?}{\geq}14\sum_{cyc}a^2 \qquad\qquad \sum_{cyc}a^2b=a^2b+b^2c+c^2a$$

$$3\sum_{cyc}a^4+33\frac{S^4}{3^4}\overset{?}{\geq}14\frac{S^2}{3^2}\sum_{cyc}a^2$$

$S=a+b+c$
$Q=ab+bc+ca$
$P=abc$

$$S^2=\sum_{cyc}a^2+2Q \qquad\qquad \sum_{cyc}a^2=S^2-2Q$$

$$\Big(\sum_{cyc}a^2\Big)^2=\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}a^2b^2 \qquad\qquad Q^2=\sum_{cyc}a^2b^2+\overbrace{2\sum_{cyc}abc^2}^{2PS}$$

$$\sum_{cyc}a^2b^2 = Q^2-2PS$$

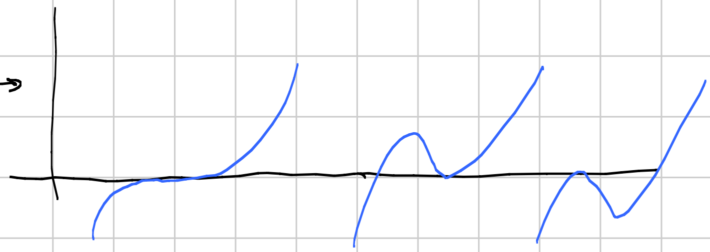
$$\sum_{cyc}a^4 = \underbrace{(S^2-2Q)^2-2Q^2+4PS}$$

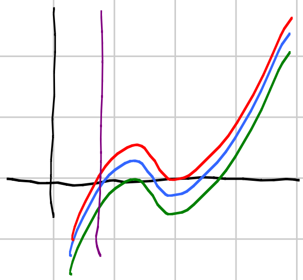
$4SP$ + roba senza $P \overset{?}{\geq} 0$

$$x^3-Sx^2+Qx-P=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$4S$ è positivo, quindi basta dimostrare la disug con P minimo

intendo P minimo fissati Q e S





Casi estremali di P : una variabile 0 oppure due uguali

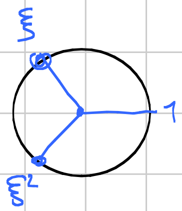
Basta (per questo problema) verificare la disug. con $a=b$

$\boxed{2}$ $$(\sqrt[3]{2}-1)^{n+3} = (a_n + \sqrt[3]{2}\, b_n + \sqrt[3]{4}\, c_n)(2 - 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1)$$
$$= (a_{n+3} + \sqrt[3]{2}\, b_{n+3} + \sqrt[3]{4}\, c_{n+3})$$

$$c_{n+3} = c_n + 3b_n - 3a_n \equiv c_n \pmod{3} \qquad + \text{ base}$$

$$(\sqrt[3]{2}-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (\sqrt[3]{2})^k$$

$$= \underbrace{\sum_{k\equiv 0} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^{k/3}}_{a_n} + \sqrt[3]{2} \underbrace{\sum_{k\equiv 1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^{\frac{k-1}{3}}}_{b_n} + \sqrt[3]{4} \underbrace{\sum_{k\equiv 2} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^{\frac{k-2}{3}}}_{c_n}$$



$$\xi(\xi\sqrt[3]{2}-1)^n = \xi\, a_n + \xi\cdot\xi\sqrt[3]{2}\, b_n + \xi\cdot\xi^2\sqrt[3]{4}\, c_n$$
$$\xi^2(\xi^2\sqrt[3]{2}-1)^n = \xi^2 a_n + \xi^2\xi^2\sqrt[3]{2}\, b_n + \xi^2\xi\sqrt[3]{4}\, c_n$$
$$(\sqrt[3]{2}-1)^n = a_n + \sqrt[3]{2}\, b_n + \sqrt[3]{4}\, c_n$$
$$\xi\alpha^n + \xi^2\beta^n + \gamma^n = 0 + 0 + 3\sqrt[3]{4}\, c_n \qquad \text{sommo}$$

$$c_n = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\left[\xi\alpha^n + \xi^2\beta^n + \gamma^n\right]$$

cerco il polinomio che ha per radici α, β, γ

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = \dots = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

$$c_{n+3} = -3c_{n+2} - 3c_{n+1} + c_n$$

$$(\sqrt[3]{2}-1)^n(\sqrt[3]{2}-1)$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$
$$x^2 = x + 1$$
$$x^2 - x - 1 \to \alpha, \beta$$
$$f_n = a\alpha^n + b\beta^n$$

ALGEBRA

Pre-IMO 2013
pomeriggio

Titolo nota 28/05/2013

ES 5 $N \in \mathbb{N}_0$ $a \in (0,1)$

Determinare $C(a,N)$ t.c.

per ogni scelta di $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ distinti

$$(1) \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^N \leq C(a,N) \sum_{i=1}^{n} a^{k_i \cdot N}$$

WLOG $k_1 < \dots < k_n$

WLOG $k_1 = 0$

$$(2) \quad a^{-Nk_1} \left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^N \leq C_a(N) \left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i N}\right) a^{-Nk_1}$$

la (1) è vera $\Leftrightarrow$ la (2) è vera

Per induzione "togliere il primo elemento".

IDEA

$n=1$ vera

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{(a^0)^N} \leq \frac{1-a^N}{(1-a)^N} \underset{\substack{\| \\ 1}}{a^{0 \cdot N}}$$

Claim

$$\boxed{C(a,N) = \frac{1-a^N}{(1-a)^N}}$$

$$(1-a)^N \overset{?}{\leq} 1 - a^N$$

$$a^N + (1-a)^N \overset{?}{\leq} \underset{\substack{\| \\ (a + (1-a))^N}}{1}$$

$\boxed{n-1 \to n}$

$$\sum_{i=1}^{n} a^{k_i} = 1 + a^{k_2} \sum_{i=2}^{n} a^{k_i - k_2}$$

$$\mathrm{LHS} = \Big(1 + a^{k_2} \overbrace{\sum_{i=2}^{n} a^{k_i - k_2}}^{S}\Big)^N =$$

$$= 1 + NS + \binom{N}{2} S^2 + \dots + N S^{N-1} + S^N$$

$$S^N = \Big(a^{k_2} \underbrace{\sum_{i=2}^{n} a^{k_i-k_2}}_{}\Big)^N \leq C(a,N) \cancel{\quad} \sum_{i=2}^{n} a^{N k_i}$$

$\|$ $n-1$ termini

$$\sum_{i=2}^{n} a^{k_i}$$

$$\sum_{i=2}^{n} a^{k_i-k_2} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{k_n-k_2} a^i}_{+\text{ termini}} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{k_n} a^i}_{\text{somma "geometrica"}} =$$

$(a \neq 1)$

$$= \frac{a^{k_n+1} - 1}{a-1} = \frac{1 - a^{k_n+1}}{1-a} \leq \frac{1}{1-a}$$

$$S = a^{k_2} \sum_{i=2}^{n} a^{k_i - k_1} \leq a \frac{1}{1-a}$$

$$a^{k_2} \leq a \; ; \; k_2 \geq 1 \quad 0 < a < 1$$

aggiungo e tolgo

$$\leq \underbrace{1 + N\frac{a}{1-a} + \binom{N}{2}\Big(\frac{a}{1-a}\Big)^2 + \dots + N\Big(\frac{a}{1-a}\Big)^{N-1} + \Big(\frac{a}{1-a}\Big)^N}_{} - \Big(\frac{a}{1-a}\Big)^N =$$

termine a termine

$$= \Big(\underbrace{1 + \frac{a}{1-a}}_{\frac{1}{1-a}}\Big)^N - \frac{a^N}{(1-a)^N} = \frac{1 - a^N}{(1-a)^N} = C(a,N)$$

Manca l'ottimalità.

Considériamo $k_1 = 0$, $k_1 = 1$, ..., $k_n = n-1$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i\right)^N} \leq C \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a^{Ni}}$$

la costante C deve verificare: (per ogni n)

$$\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)^N \leq C \, \frac{1-a^{nN}}{(1-a^N)}$$

$$C \geq \frac{(1-a^n)^N}{(1-a)^N} \frac{(1-a^N)}{1-a^{nN}} \geq C(a,N) \underbrace{\frac{(1-a^n)^N}{(1-a^{nN})}}$$

se n "tende all'infinito" $\Rightarrow$ tendono a 0

questo termine diventa arbitrariamente vicino ad 1

Dunque $C \geq k \cdot C(a,N)$ per ogni $k < 1$

$C \geq C(a,N)$

Es. n° 6

$P(x,y)$: $f(x+yf(x)) = f(f(x)) + xf(y)$

$P(0,y)$: $f(yf(0)) = f(f(0))$ $\boxed{y = \frac{f(x)-x}{f(x)}}$

2 casi : $f(0)=0$ ok. ho guadagnato $f(0)=0$

altrimenti $yf(0)$ può essere qualunque cosa

$f(\text{qualunque cosa}) = f(f(0)) = c$

Sostituisco e ottengo $c=0$.

D'ora in poi $f(0)=0$ e $f \neq 0$

$P(x,0)$: $f(x) = f(f(x))$

Quindi $f(z)=z$ se $z \in \operatorname{Im} f$.

Prendiamo c tale che $f(c)=0$

$P(c,y)$ $f(c+yf(c)) = f(f(c)) + cf(y)$

$f(c)=0$, $f(f(c)) = 0$

$0 = cf(y)$

abbiamo già escluso $f \equiv 0$, ma allora $c=0$.

---

iniettività: supponiamo che f non sia iniettiva, dunque esistono $x \neq x'$ t.c. $f(x) = f(x')$

$$f(x + y f(x)) = f(x) + x f(y)$$

pongo $x + y f(x) = x'$ $\qquad \dfrac{x' - x}{f(x)} = y$

se $f(x) \neq 0$ ok. ma l'abbiamo dimostrato prima.

$$\cancel{f(x')} = \cancel{f(x)} + x f(y)$$

$$0 = x f(y) \qquad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = x.$$

$$\cancel{f}(f(x)) = \cancel{f}(x) \qquad f(x) = x$$

$$f(x + y f(x)) = f(x) + x f(y)$$

$$f(x + f(y) f(x)) = f(x) + x f(f(y)) = f(x) + x f(y)$$

$$\cancel{x} + y \cancel{f(x)} = \cancel{x} + f(y) \cancel{f(x)}.$$

A7, marzo00/3 trovare il più piccolo $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \le M(a^2+b^2+c^2)^2$$

$\forall\ a,b,c \in \mathbb{R}$.

- $ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$ab(a^3-b^3)+bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3) =$$

$$|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)| \le M(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$(\underset{x}{a-b})^2+(\underset{y}{b-c})^2+(\underset{z}{c-a})^2+(\underset{t}{a+b+c})^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$|xyzt| \le \frac{M}{9}(x^2+y^2+z^2+t^2)^2 \qquad (x+y+z=0)$$

$|x|,\ |y|,\ |z| \qquad |x|+|y|=|z|$

$$|xy| \le \frac{z^2}{4} \qquad \sqrt{|xy|} \le \frac{|x|+|y|}{2} = \frac{|z|}{2} \le \sqrt{\frac{|x|^2+|y|^2}{2}}$$

$$|x|^2+|y|^2 \ge \frac{z^2}{2}$$

$x=-\frac{z}{2} \qquad y=-\frac{z}{2}$

$$|xyzt| \le \frac{|z^3t|}{4} \le \frac{M}{9}\left(\frac{3}{2}z^2+t^2\right)^2 \le \frac{M}{9}(x^2+y^2+z^2+t^2)^2$$

$$z^3 t \le \frac{4}{9} M \left(\frac{3}{2} z^2 + t^2\right)^2$$

$$\frac{\frac{3}{2} z^2 + \frac{1}{2} \cdot 2t^2}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2} z^2 + \frac{1}{2}\, 2t^2}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \ge \left((z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (2t^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{\frac{3}{2} z^2 + t^2}{2}\right)^2 \ge \sqrt{2}\, t z^3$$

$$\frac{4M}{9} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \qquad \boxed{M = \frac{9}{16\sqrt{2}}} \qquad \frac{1}{4\sqrt{2}} \ge \frac{t z^3}{\left(\frac{3}{2} z^2 + t^2\right)^2}$$

UNSMOOTHING $f(a, b, c) = LHS$

$a \le b \le c$

$a^2 + c^2$ fissato LHS è più grande se $a = 0$

$$f(a, b, c) \le f(0, b, \sqrt{a^2 + c^2})$$

SMOOTHING $f(a, b, c) \le f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$

N° 8 Trovare i polinomi $p(x)$ tali che

$p(a)+p(b)$ è un quadrato perfetto ogni volta che $a, b \in \mathbb{N}$, $a+b=\square$.

Lemma. Se $q(x)$ è un polinomio tale che $q(n)$ è un quadrato di un intero $\forall\, n \geq n_0$, allora $q(x)=(r(x))^2$.

$$p(x^2-a)+p(a)=q_a(x)=(r_a(x))^2$$

$\forall\, n > \sqrt{a}$ so che $q_a(n)=\square$

$$x^2-a=y$$

$$p(y)+p(a)=(r_a(\sqrt{a+y}))^2$$

$a+y \geq 0$, $a+y = x$

$$p(y)+p(a)=\left(r_1(a+y)+\sqrt{a+y}\; r_2(a+y)\right)^2$$

$$r_a(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$$

$$r_a(\sqrt{a+y}) = a_n(\sqrt{a+y})^n+\dots$$

$$a_{2i}(\sqrt{a+y})^{2i} = a_{2i}(a+y)^i \qquad a_{2i+1}(\sqrt{a+y})^{2i+1}=a_{2i+1}(a+y)^i\sqrt{a+y}$$

$$p(y)+p(a)=r_1^2(a+y)+(a+y)\,r_2^2(a+y)+\underbrace{2\sqrt{a+y}\;r_1(a+y)\,r_2(a+y)}_{\equiv 0\ *}$$

$p(y)+p(a)-r_1^2(a+y)-(a+y)\,r_2^2(a+y)$ e' un polinomio

$$\left\{ a+y\neq\left(\frac{p_1(a,y)}{p_2(a,y)}\right)^2 \qquad V_a\left(\frac{a_n y^n+\dots}{a_m y^m+\dots}\right)=2n-m \right\}$$

$* \Rightarrow\ r_1\equiv 0$ opp. $r_2\equiv 0$

1. $p(y)+p(a)=r_1^a(y+a)^2$
2. $p(y)+p(a)=(y+a)\,r_2(y+a)^2$

$p(x)=2k^2$

$(p\not\equiv c)$

(1) $p(y)+p(a)=r_1^a(y+a)^2$

$p(y)+p(b)=r_1^b(y+b)^2$

$$p(b)-p(a)=r_1^b(y+b)^2-r_1^a(y+a)^2=$$

$$=\underbrace{\left(r_1^b(y+b)-r_1^a(y+a)\right)}\underbrace{\left(\quad\right)+\left(\quad\right)}$$

$\Rightarrow$ ↯

(2)
$$p(x) + p(a) = \boxed{(a+x)\, r_a (x+a)^2},$$
$$p(x) + p(b) = \boxed{(b+x)\, r_b (x+b)^2},$$

CLAIM: $\exists\ a, b$ t.c. $(p(x)+p(a),\ p(x)+p(b)) = 1$: ogni volta che $a \neq b$.

$\deg = n$: per Bezout (polinomi) esistono due polinomi Q_1 e Q_2 di $\deg \leq n-1$ tali che

$$Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = \text{cost.}$$

$$Q_1(x)\left(p(x)+p(a)\right) + Q_2(x)\left(p(x)+p(b)\right) = \text{cost.}$$

$$\underbrace{\cancel{(Q_1(x) + Q_2(x))\, p(x)}}_{\geq n} + \underbrace{p(a)\, Q_1(x) + p(b)\, Q_2(x)}_{\deg \leq n-1} = \text{cost.}$$

$$Q_1 = -Q_2$$

$$p(a)\, Q_1 - p(b)\, Q_2 = \text{cost.}$$

$$Q_1 = -Q_2 = 1$$

$$\left(p(x) + p(a)\right) - \left(p(x) + p(b)\right) = \text{cost.}$$

0

A domani vi faccio la fine. –

$\cancel{p(x^2) = (q(x))^2}$

$P(x) = \square$ per $n \geq n_0$.

p di grado pari $\partial p = 2n$

1° $\exists A$, Q monico tale $\partial\left(P(x) - A\,Q(x)^2\right) \leq n-1$

$A = a_{2n}$ $\quad 2\, q_{n-3} \cdot a_{2n} = \boxed{}$

2° $$\sqrt{P(x)} - \sqrt{A}\,Q(x) = \frac{\overbrace{P(x) - A\,Q^2(x)}^{\partial \leq n-1}}{\underbrace{\sqrt{P(x)} + \sqrt{A}\,Q(x)}_{\partial = n}} \sim \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

$a_i = \sqrt{P(m+i)}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \binom{n}{i} (-1)^i = C$$ per m abbastanza grande

$$\sum_{i=1}^{n} q(i) \binom{n}{i} (-1)^i = n!$$ sempre

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(a_i - \sqrt{A}\,q_i)}_{\downarrow\, 0} \binom{n}{i} (-1)^i \longrightarrow 0$$ se m è abbastanza grande

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{m+i} \binom{n}{i} (-1)^i}_{\in \mathbb{N}} \longrightarrow n! \sqrt{A} \qquad \text{per } m \to \infty$$

$$a_{m+i} = \sqrt{p(m+i)} \in \mathbb{N}$$

$$a_{m+i} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{m+i} \binom{n}{i} (-1)^i = S_m \in \mathbb{N}$$

$$S_m \longrightarrow \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in \mathbb{N} \qquad n! \sqrt{A} \in \mathbb{N}$$

$$|S_m - \ell| < \frac{1}{2} \quad \text{per } m \geq m_0 \quad \Rightarrow \quad \underset{m \geq m_0}{S_m = \ell}$$

$$a_m = f(m) \qquad \forall\ m \geq m_0$$

$$\partial f \leq n$$

$$p(x) - (f(x))^2 = 0 \qquad \text{per } x = m_0,\ m_0+1,\ m_0+7,\ \ldots$$

$$p(x) = (f(x))^2 \quad \text{come poli}$$

$$p(x^2) = (q(x))^2 \qquad q(x)^2 = q(-x)^2$$

$$(q(x) - q(-x))(q(x) + q(-x)) = 0$$

$$p(x^2) = (q(x^2))^2 \qquad p(x^2) = x^2 (r(x^2))^2$$

$$p(x) = x\, r(x)^2$$

Parte II° $\quad p$ ha grado dispari

a) $p(x) + p(a) = (x+a)\, R(x+a)^2$

$p(x) + p(b) = (x+b)\, K(x+b)^2 \implies 2RR'(x+a) + R^2 = K'K(x+b) + K^2$

$2R'(x+a) + R = K(x+b)$

$= S(x+c)$

$\overset{\shortparallel}{\text{cost.}}$

b) $p(2x^2) + p(2x^2) = (Q(x))^2$

$2p(2x^2) = (Q(x))^2 \rightsquigarrow a_n \cdot 2^{n+1} = b_n^2 \overset{n \text{ dispari}}{\implies} a_n = \square$

$p(x^2) + p(3x^2) = (Q(x))^2 \rightsquigarrow (3^n+1)\, a_n = c_n^2$

$\implies 3^n + 1 = \square \qquad n$ dispari

$3^n + 1 = k^2 \qquad k = 2$

$3^n = (k-1)(k+1) \qquad \boxed{n=1}$.

II^a parte A8: p ha grado dispari.

$$p(x) + p(a) = (x+a) R(x)^2$$

$$R(x)^2 (x+a) - S(x)^2 (x+b) = p(a) - p(b)$$

$$p(x) + p(b) = (x+b) S(x)^2$$

$$p(x) + p(c) = (x+c) T(x)^2$$

$$p'(x) = R(x)^2 + 2(x+a) R' \cdot R$$

$$p'(x) = S^2 + 2(x+b) S' \cdot S$$

$$R(R + 2(x+a)R') = S(S + 2(x+b) S')$$

$$R \mid \cancel{S}(S + 2(x+b) S')$$

$$\Downarrow$$

$$R = S + 2(x+b) S'$$

$$T = S + 2(x+b) S'$$

$$R = T, \qquad (R, T) = 1$$

$$\Rightarrow \qquad R = T \equiv c$$

$$\rightsquigarrow \quad p(x) + p(a) = c(x+a) \qquad p(x) = cx$$

$$p(x) = k^2 x$$

$$p(2x^2) + p(2x^2) = Q(x) = \left(\tilde{Q}(x)\right)^2$$

$$2\,p(2x^2) = \left(\tilde{Q}(x)\right)^2$$

$\downarrow$ leading coeff.

$$2 \cdot 2^n \cdot a_n = r^2 \qquad 2^{n+1} a_n = r^2 \Rightarrow a_n = \square.$$

$$p(x^2) + p(3x^2) = \left(Q_2(x)\right)^2$$

$$(3^n + 1) = k^2 \qquad 3^n + 1 = k^2$$

$$3^n = (k-1)(k+1)$$

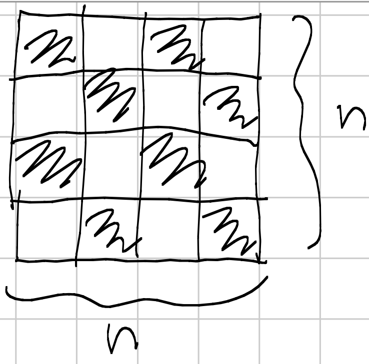
$$\boxed{n=1}$$

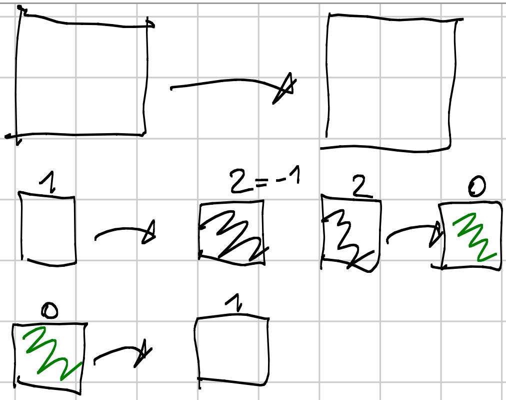
PREIMO 2013

COMBINATORIA

Titolo nota 27/05/2013

C1

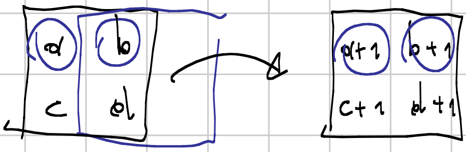




1° OSS. LE MOSSE SONO COMMUTATIVE

2° OSS. IL COLORE FINALE DI UNA CASELLA DIPENDE SOLO DAL COLORE INIZIALE E DAL NUMERO DI MOSSE CHE HANNO COINVOLTO LA CASELLA

3° OSS. TUTTO SI RIDUCE MODULO 3, ASSEGNANDO AD OGNI COLORE UNA CLASSE.

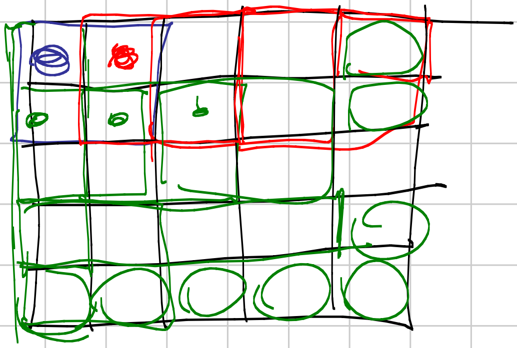


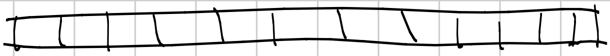
4° OSS. SCELTA UNA RIGA, LA SOMMA A SEGNI ALTERNI DELLE CASELLE È INVARIANTE PER LE MOSSE CONSENTITE

5° OSS. AFFINCHÉ n SIA BUONO $B = +1$ $N = -1$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^i}_{\text{SEGNO}} \cdot \underbrace{(-1)^i}_{\text{COLORE INIZIALE}} \equiv \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \underbrace{(-1)^{i+1}}_{\text{COLORE FINALE}} \quad (3)$$

DEVE RISULTARE $n \equiv -n \quad (3)$ OSSIA $3 \mid n$



Barbara  m

Alberto $1, \ldots, N$ K

$k \leq N$ $k \leq m$

a) $m \geq N$ vince Barbara: A $n_i \rightarrow$ nella casella n_i

b) $m < N$ $m=2$ $N=3$ $k=2$

$1, 2, 3$

Se Barbara ha $m < 2^k - \varepsilon$ caselle, perderà

Congettura: $\varepsilon = 1$.

Se $m < 2^k - 1$, Barbara perde:

Alberto gioca "in mezzo" $\left[\frac{N}{2}\right]$ $\left[\frac{m+1}{2}\right]$

Barbara lo scrive nella casella ℓ_1, che divide le m caselle in due intervalli, di cui uno lungo meno di $2^{k-1}-1$.

Alberto sceglie $\left[\frac{N}{2}\right] \pm \left[\frac{N}{4}\right]$ a seconda di quale direzione indica l'intervallo più corto di Barbara

$\rightarrow$ dopo k passi Barbara ha un intervallo lungo 0

Ma Alberto ha ancora almeno un numero da scegliere in quella direzione.

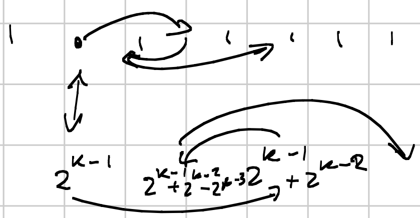
Viceversa, se k non è così grande, $m \geq 2^k - 1$

Barbara ha una strategia vincente.

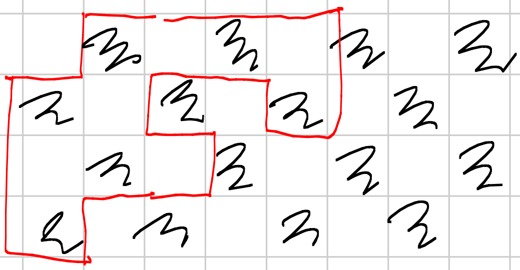
Questa strategia funziona perché k è abbastanza piccolo: Barbara sceglie il multiplo di 2^{k-i-1} (alla i-esima mossa) che si trova nell'intervallo corrispondente alle scelte di Alberto:

$n_1 \dots n_i$ se $n_{\ell+1} > n_\ell$ $+1$

$n_{\ell+1} < n_\ell$ -1



C3



S è la superficie di un poligono

P il perimetro

B il n° di caselle bianche

N ″ ″ ″ nere

$$\frac{S}{2} - \frac{P}{8} \le \begin{matrix} B \\ N \end{matrix} \le \frac{S}{2} + \frac{P}{8}$$

1° OSS. LA TESI HA TUTTA L'ARIA DI ESSERE VERA PER UNIONI GENERICHE DI □

2° OSS. WLOG $B \geq N$

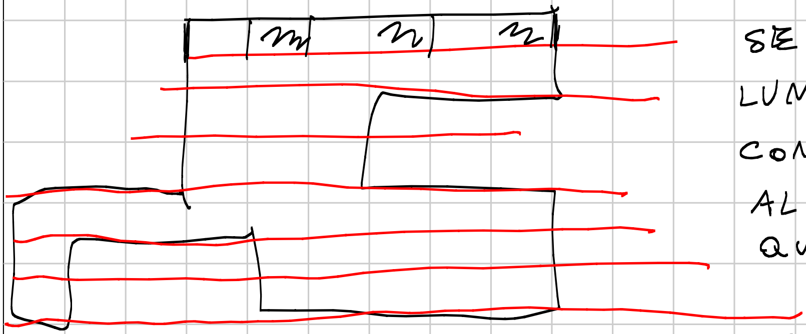
3° OSS. $\Delta = B - N \geq 0$ PER LA 2° OSS.

$$\boxed{B - N} = B + N - 2N = S - 2N \le S - 2\left(\frac{S}{2} - \frac{P}{8}\right) = \boxed{\frac{P}{4}}$$ DEVE ESSERE VERO

SE POI LO DIMOSTRO, ALLORA

$B = \frac{B+N}{2} + \frac{B-N}{2} \le \frac{S}{2} + \frac{P}{8}$ e lo stesso per $N \ge \frac{S}{2} - \frac{P}{8}$

5° OSS. CERCO DI ACCOPPIARE CASELLE BIANCHE E NERE



SE HO UN "SERPENTE" LUNGO ℓ, QUESTO CONTRIBUISCE AL PIÙ DI 1 ALLA QUANTITÀ $B-N$ ED ESATTAMENTE DI 2 ALLA QUANTITÀ P_V

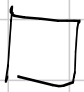
P_V È IL NUMERO DI SEGMENTI VERTICALI DEL PERIMETRO

$2\cdot(B-N) \le P_V$

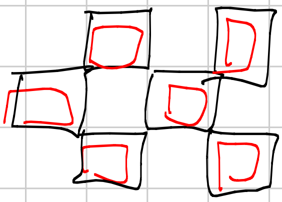
6° OSS. $2\cdot(B-N) \le P_O$

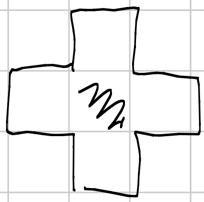
5+6=7 $4(B-N) \le P_O + P_V = P$

2ª SOLUZIONE



← QUI HO $S = 1$, $P = 4$ $B = \frac{S}{2} + \frac{P}{8}$





$S = 5$

$P = 12$ $B = 4 = \frac{S}{2} + \frac{P}{8}$

RAGIONIAMO PER INDUZIONE SU N CHE VA DA 0 A B

PASSO BASE $N=0$ HO SOLO CASELLE BIANCHE

$S = B$ $P = 4B$

PASSO INDUTTIVO AGGIUNGO UNA CASELLA NERA (SENZA SFORARE!)

$S \to S+1$

$B \to B$

P DIMINUISCE AL PIÙ DI 4

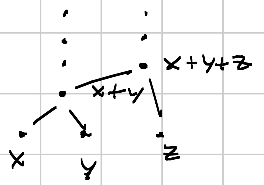
$\boxed{\frac{S}{2} + \frac{P}{8}}$ AUMENTA O RIMANE INVARIATO

S insieme di naturali di 100 cifre decimali

$x \in S$ cattivo se qualunque coppia $y, z \in S$ io prenda (anche con $y=z$) $y+z \neq x$.

Quanto vale al massimo $|S|$?

$x, y \in S$ se $x+y < 10^{100}$ e $x+y \notin S$, mi conviene metterci lui e i suoi multipli $< 10^{100}$



Congettura: tutti gli elementi di S sono così? Cioè somme e prodotti a coefficienti interi di numeri cattivi?

$x \in S$ — x è cattivo

— x non è cattivo $\Rightarrow$ $\exists y_1, y_2, k \in \mathbb{N}$ $x = k(y_1+y_2)$ $y_1, y_2 \in S$

$y_1, y_2 < x$

per induzione (Base: il min S è cattivo) su $|x|$

posso supporre che $y_1 = k_1 c_1 + k_2 c_2 + \dots + k_\ell c_\ell$ $k_i \in \mathbb{N}$ c_ℓ cattivi in S

$y_2 = \bar{k}_1 \bar{c}_1 + \dots \bar{k}_{\bar{\ell}} \bar{c}_{\bar{\ell}}$

$\Rightarrow$ anche x lo è.

Se allora $c_1 \dots c_N$ sono i numeri cattivi di S,

$S = \{ k_1 c_1 + \dots + k_N c_N \mid$ per certe scelte di $k_i \in \mathbb{N} \}$.

$|S|$ massima $\Longleftrightarrow$ fare tutte le scelte possibili dei k_i. $0 \leq k_i \leq 9$ (ma non tutti 0)

Scelgo $c_i < \frac{10^{100}}{9}$, ma visto che $c_i \geq 10^{99}$, in realtà $\sum k_i \leq 9$. $N \leq 10$ mi conviene $N=10$

$k_1 \dots k_{10}$ $\sum_{i=1}^{10} k_i \leq 9$ In quanti modi?

$c_{11} = 0$ $\sum_{i=1}^{11} k_i = 9$ $k_{11} = 9 - \sum_{i=1}^{10} k_i$

$$\sum_{i=1}^{11} k_i c_i = \sum_{i=1}^{10} k_i c_i ,$$

2 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 $\longrightarrow$ 19 posti di cui sceglierne 10 x le stanghette

$\binom{19}{10} - 1$ perché 000000 00009 è vietato.

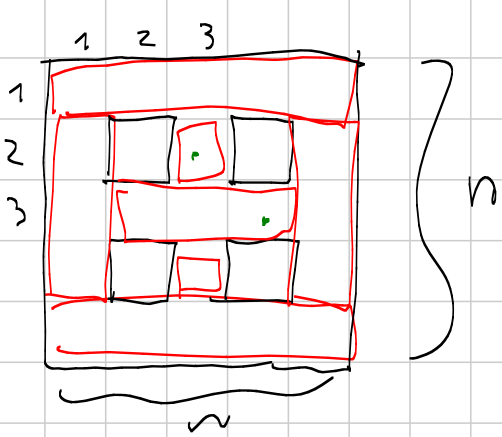
k_i $\quad 10^{99} + 10^{10\cdot(i-1)}$ $\quad$ 1 $\quad$ 1

Questa è una possibile scelta per i c_i.

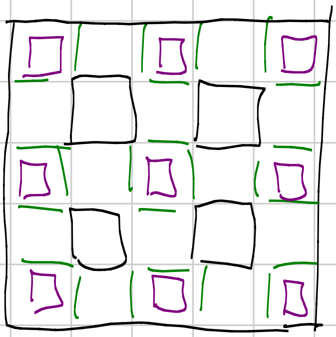
COMBINATORIA (POMERIGGIO)

Titolo nota 27/05/2013

C5



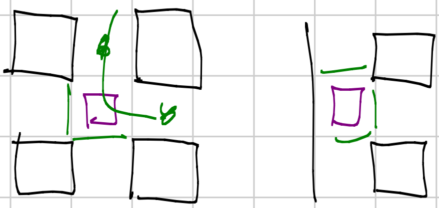
SCACCHIERA $n \times n$
TOLGO LE CASELLE
CON LE COORDINATE PARI
QUANTI RETTANGOLI
SERVONO PER
TASSELLARLA?

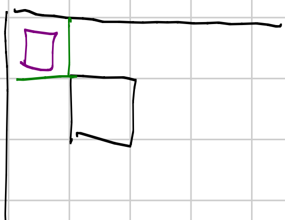


PARTO DALLA MASSIMA SUDDIVISIONE
E COMINCIO A CANCELLARE
SEGMENTI VERDI, SENZA
CREARE DEI NON-RETTANGOLI

QUANTI SEGMENTI VERDI POSSO CANCELLARE
AL MASSIMO?

PER OGNI
CASELLA □ NON DI ANGOLO
POSSO CANCELLARE
AL PIÙ 2 SEGMENTI
CONFINANTI





MANCA IL CONTO ESPLICITO...

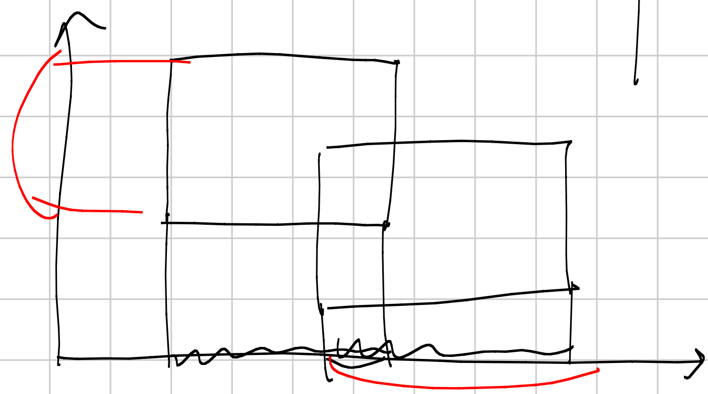
$1 + \frac{n^2}{4}$ PER n PARI $\quad$ $3 + \frac{(n-1)^2}{4}$ PER n DISPARI

C6

2013 rettangoli

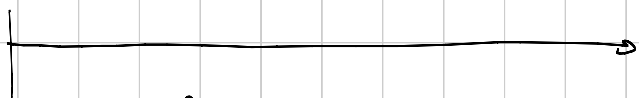
$K_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$

$\forall i$ K_i interseca almeno 1509



$\underbrace{[a_1, b_1], \dots, [a_{2013}, b_{2013}]}_{\mathcal{I}}$ $\leftarrow$ Lemma $\exists^{\text{no}}$ 1007 intervalli t.c. intersecano tutti gli altri.

Idem su asse y



<u>Lemma</u>

Dati $\underbrace{I_i = [a_i, b_i] \quad i = 1, \dots, n}_{\mathcal{I}}$ t.c. $\forall i = 1, \dots, n$ l'intervallo I_i interseca almeno ξ degli altri.
Allora $\exists^{\text{no}}$ $2\xi + 2 - n$ intervalli della famiglia $\mathcal{I}$ che intersecano tutti gli altri.

<u>Dim</u>

WLOG $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le a_n$ $\qquad I_i$

(*) $\forall i \le \xi + 1$ $\quad b_i \ge a_{\xi+1} \ge a_j \ge a_i$ $\quad$ ~~[[ ]]]]~~ $a_{\xi+1}$ b_1

Poiché $[a_n, b_n]$ interseca almeno ξ intervalli.

$\exists$ no $\underbrace{\{i_1, i_2, \dots, i_\xi\}}_{\xi}$ t.e. $\boxed{b_{i_k} \geq a_n}$ $\forall k = 1, \dots, \xi$ (1) (*)

$$\{1, 2, 3, \dots, \xi, \xi+1, \underbrace{\xi+2, \dots, n-1}_{n-\xi-2}\}$$

$$\xi - (n - \xi - 2) = \boxed{2\xi + 2 - n}$$

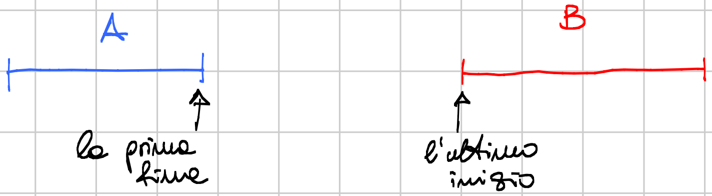
$\boxed{i_1, i_2, \dots, i_k}$

$$I_{i_0} = [a_{i_j}, b_{i_j}]$$

I_i $\quad i > i_j \quad i < i_j$

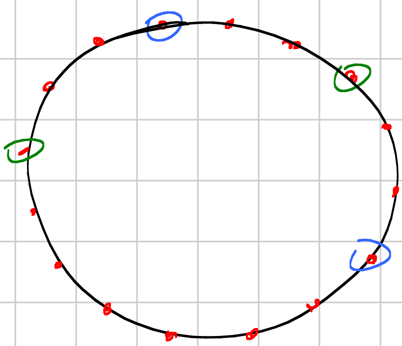
$$[a_i, b_i]$$

Ogni intervallo ne interseca almeno altri k.



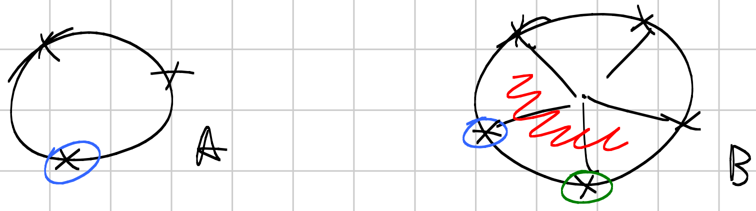
Esistono k intervalli che $\cap A$, e k che $\cap B$.

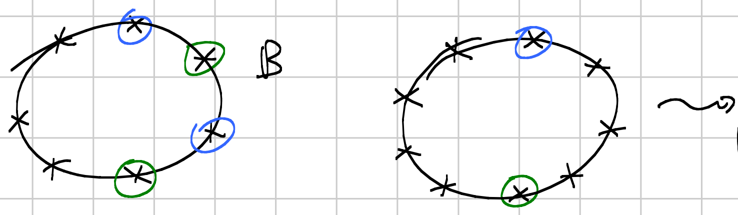
$\Rightarrow$ $2k - n + 2$ che $\cap A$, $\cap B$.



$2n+1$

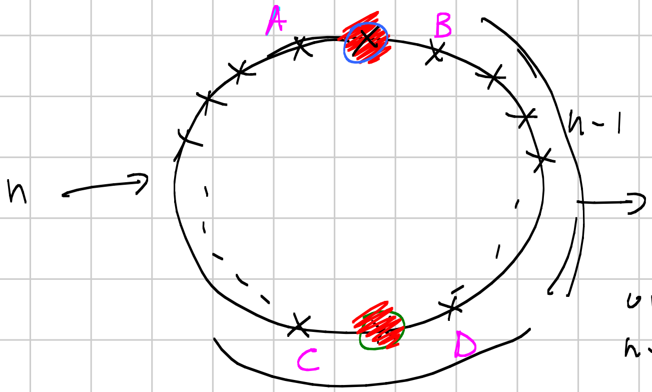
1ª Oss. Uno vince se riesce a realizzare una striscia di n punti tolti.





vince Barbara

Congettura: da 7 in poi vince Barbara giocando "lontano".

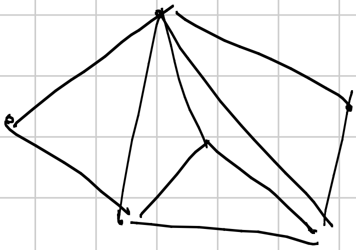


$2n-1$-agono sta ad Alberto e si vince con una striscia da $n-1$ punti tolti.

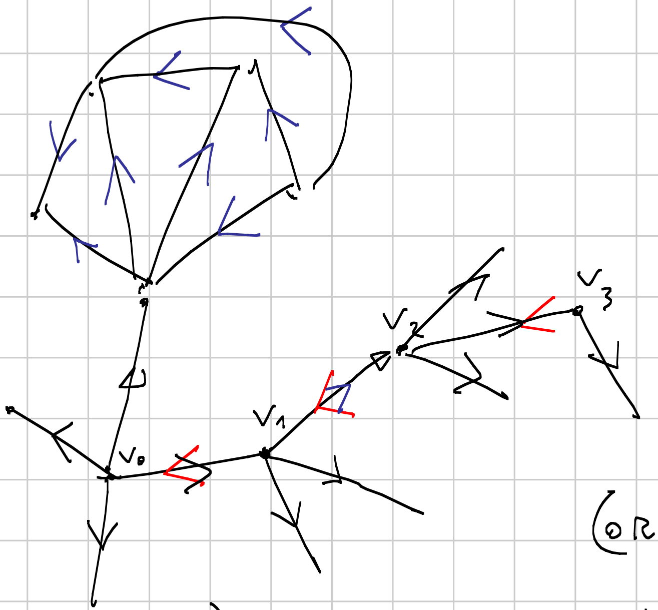
Per induzione (p. base, 5 o 7) Barbara sa vincere sul $2n-1$-agono facendo una striscia da $n-1$.
La striscia conterrà almeno uno tra A, B, C o D.
Quindi nel $2n+1$-agono questa si attacca (o contiene) almeno uno dei due punti tolti.
Viceversa, per vincere sul $2n+1$-agono bisogna aver fatto una striscia da $n-1$ nel $2n-1$-agono, quindi, caro Alberto, per te non c'è speranza

C 8

GRAFO PLANARE



È POSSIBILE ORIENTARE GLI ARCHI IN MODO CHE DA OGNI VERTICE NE ESCANO AL PIÙ TRE.



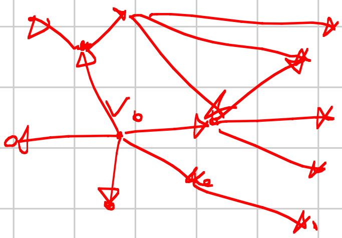
SEGUO UN PERCORSO ORIENTATO $v_0 \to v_1 \dots \to v_n$ T.C. DA v_i A v_{i+1} C'È UN ARCO (ORIENTATO DA v_i A v_{i+1})

SE $\underbrace{d^+(v_0)}_{\text{N° ARCHI USCENTI}} \geq 4$ E $d^+(v_n) \leq 2$ POSSO INVERTIRE GLI ORIENTAMENTI DI TUTTO IL CAMMINO

$d^+(v_0)$ DIMINUISCE DI 1 ; $d^+(v_n)$ AUMENTA DI 1 ; $d^+(v_i)$ RIMANE UGUALE PER $0<i<n$

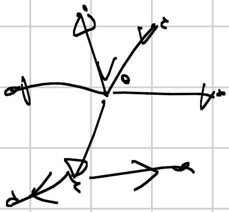
LA QUANTITÀ $\displaystyle\sum_{v \text{ VERTICE } \underline{\text{CRITICO}}} d^+(v)$ DIMINUISCE

MA ESISTERÀ DAVVERO UN PERCORSO $v_0 \to v_1 \dots \to v_n$ CON $d^+(v_n) < 3$?



Sia S_0 L'INSIEME DEI VERTICI RAGGIUNGIBILI DA v_0 CON CAMMINI ORIENTATI

SIA E_0 L'INSIEME DEGLI ARCHI CHE ATTUALMENTE ESCONO DA UN VERTICE DI S_0



(S_0, E_0) È UN SOTTOGRAFO DEL GRAFO ORIGINALE QUINDI È PLANARE E CONNESSO

FATTO NOTO | IN UN GRAFO PLANARE CONNESSO FINITO

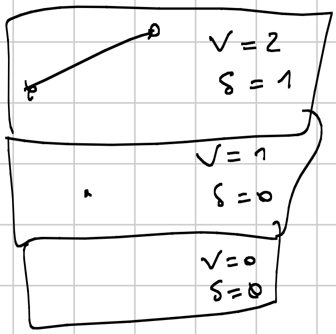
$$F + V = S + 2$$

F: n° di facce — V: n° vertici — S: n° di archi

2

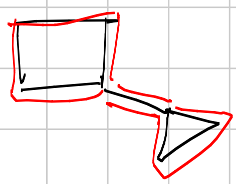
DISUGUAGLIANZA NOTA | QUASI SEMPRE IN UN GRAFO PLANARE

$$3V - 6 \geq S$$



CASI DEGENERI

SE OGNI FACCIA CONFINA CON ALMENO 3 ARCHI (CONTATI CON MOLTEPLICITÀ)



n° DI COPPIE ARCO-FACCIA CONFINANTI

SONO $2S$

SONO ALMENO $3F$

$$2S \geq 3F$$

$$|E_0| \leq 3|S_0| - 6$$

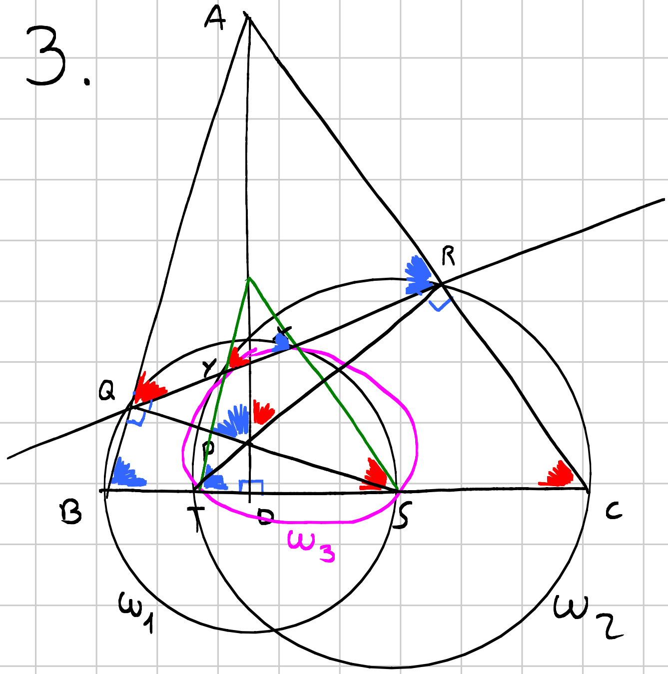
$$\sum_{v \in S_0} d^+(v) \leq 3|S_0| - 6$$

esiste un vertice v in S_0 con $d^+(v) \leq 3 - \frac{6}{|S_0|}$ e quindi ≤ 2

PREIMO 2013 - GM

Titolo nota 30/05/2013

3.



$D\hat{C}A = R\hat{P}A = R\hat{Q}A = \gamma$

$A\overset{\Delta}{R}Q \sim A\overset{\Delta}{B}C$

BCRQ ciclico

BSXQ ciclico $\rightarrow$

$\rightarrow A\hat{Q}X = B\hat{S}X$

uguale dall'altra parte

$SX \parallel AC$ $\quad TY \parallel AB$

TSXY ciclico

TY asse radic di ω_2 e ω_3

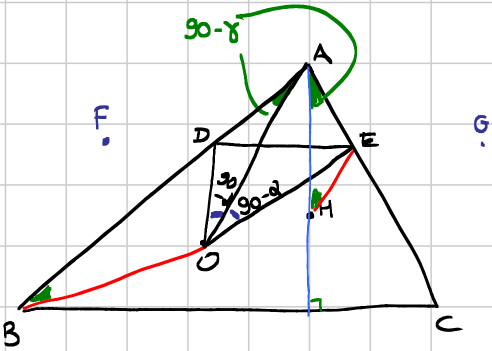
SX asse radic di ω_1 e ω_3

Hope $\rightarrow$ AD asse radicale di ω_1 e ω_2?

1. $AD \perp$ congiungente centri ω_1 e ω_2

2. A ha la stessa potenza su ω_1 e ω_2
vero perché BCRQ ciclico

Esercizio 1



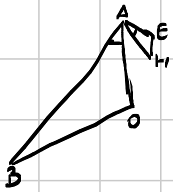
Tesi: $D\hat{O}A = E\hat{O}A$

$\overset{\triangle}{AOB} \sim \overset{\triangle}{AEH}$

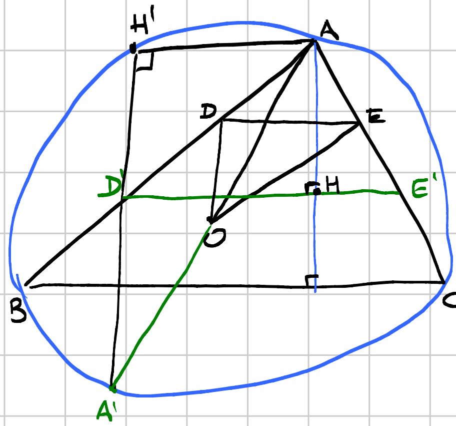
$\Rightarrow \overset{\triangle}{AEO} \sim \overset{\triangle}{AHB}$ (perchè $B\hat{A}O = H\hat{A}E$, $\frac{AE}{AO} = \frac{AH}{AB}$)

$A\hat{O}E = A\hat{B}H = 90 - \alpha$

$\Rightarrow$ ok perchè "è simmetrico in β e γ".



Soluzione 2



Tesi: $D'\hat{A'}A = A\hat{A'}E'$.

H' = simmetrico di H rispetto ad AB.

$A\hat{H'}D' = 90° = A\hat{H'}A'$ ↖ AA' è diametro

$\Rightarrow A', D', H'$ sono allineati

$A\hat{A'}H' = A\hat{C}H' = 90 - \alpha$

↳ non dipende da β e γ!

Soluzione 3

Mostriamo che $\sin A\hat{O}D = \sin A\hat{O}E$.

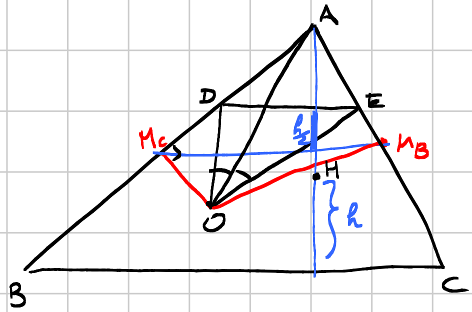
Teorema dei seni $\frac{AD}{\sin A\hat{O}D} = \frac{AO}{\sin A\hat{D}O}$ $\quad \frac{AE}{\sin A\hat{O}E} = \frac{AO}{\sin A\hat{E}O}$

Resta da dimostrare

$$AD \cdot \sin A\hat{D}O = AE \cdot \sin A\hat{E}O$$

$\sin A\hat{D}O = \sin O\hat{D}M_c = \frac{OM_c}{OD}$

....



<u>Esercizio 2</u>

<u>Oss:</u> N, O_1, O_2 sono allineati

<u>Oss:</u> M pto medio arco $\widehat{AB}$.

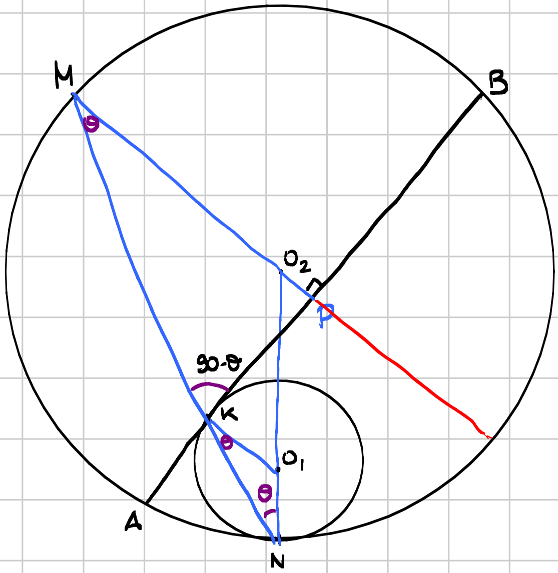
N, K, M sono allineati.

Omotetia di centro N e fattore $\frac{r_2}{r_1}$

$\omega_1 \longrightarrow \omega_2$

$AB \longrightarrow$ parallela ad AB tangente a ω_2

$\Rightarrow K \longrightarrow M$.



Gradi di libertà: $r_1, r_2, \theta = K\hat{N}O_1$.

$MKB = 90 - \theta$ (angolo limite in ω_1 che insiste su $\widehat{KN}$)

$$R_{BMK} = \frac{BM}{2\sin(90-\theta)} = \frac{BM}{2\cos\theta} \qquad (\times)$$

Dobbiamo scrivere BM in funz di θ.

P pto medio AB, allineato con M e O_2.

$$\begin{aligned} BM^2 &= BP^2 + PM^2 \\ &= BP \cdot PA + PM^2 \\ &= PM \cdot (2r_2 - PM) + PM^2 \quad \text{(potenza di } P \text{ rispetto a } \omega_2) \\ &= 2r_2 PM. \quad (*) \end{aligned}$$

$MK = MN - NK = 2r_2\cos\theta - 2r_1\cos\theta = 2(r_2 - r_1)\cos\theta$

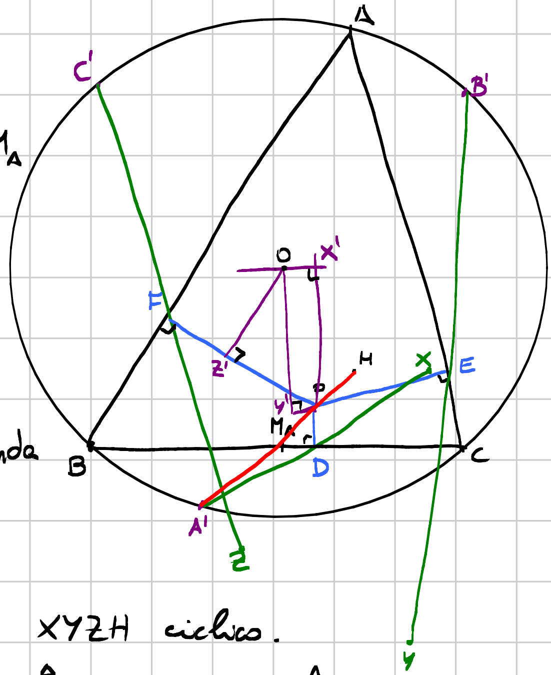
$MP = MK\cos\theta = 2(r_2 - r_1)\cos^2\theta$

In $(*)$ $\quad BM^2 = 4r_2(r_2 - r_1)\cos^2\theta$

Da $(\times)$ $\quad R_{BMK} = 2\sqrt{r_2(r_2 - r_1)} \longrightarrow$ non dipende da θ.

<u>Sol 2</u> usare la formula $R_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4[ABC]}$. Resta da dim che $\frac{BK}{BN}$ è costante (conto).

Esercizio 4



Oss 1: $HX \parallel BC$ $\quad M_AD = \frac{1}{2}HX$.

Infatti il simmetrico di H rispetto a M_A è A' (coi vettori con origine in O,

$H = A+B+C \quad M_A = \frac{B+C}{2}$

simmetrico di H rispetto a M_A è

$2M_A - H = B+C-(A+B+C) = -A$)

Omotetia di centro A' e fattore 2 manda

$M_A \to H \qquad D \to X$.

Oss 2 è sufficiente dimostrare che XYZH ciclico.

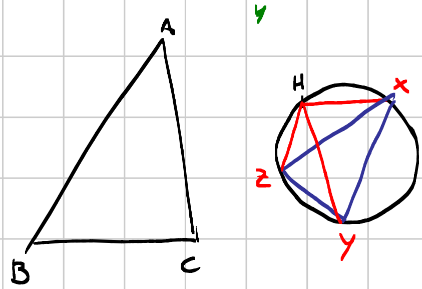
Infatti fatta la costruzione $X\hat{Y}Z \sim A\hat{B}C$:

$Z\hat{X}Y = Z\hat{H}Y =$ "l'angolo tra ZH e HY"

$=$ "l'angolo tra AB e AC"

$= B\hat{A}C$

e cicliche.



Basta far vedere che XYZH è ciclico.

Sia X' = intersezione tra PD e una parallela a BC passante per O,

e cicliche.

$OX' \parallel M_AD$ e $OX' = M_AD = \frac{1}{2}HX \Rightarrow O\hat{X}'Z' \sim HXZ$

(con lati paralleli e riscalati di un fattore $\frac{1}{2}$)

$OX'Y'Z' \sim HXYZ$

$OX'Y'Z'$ è ciclico perchè X', Y', Z' appartengono alla circonf di diametro OP.

Esercizio: per mostrare che HXYZ è ciclico, sia P' = simmetrico di P rispetto a O,

O' = simmetrico di P' rispetto a $N = \frac{O+H}{2}$.

Far vedere che O' è centro della circonf per $HXYZ$.

In particolare, mostrare che l'asse di HX passa per O'.

(definire D' il simmetrico di D rispetto a M_A e mostrare

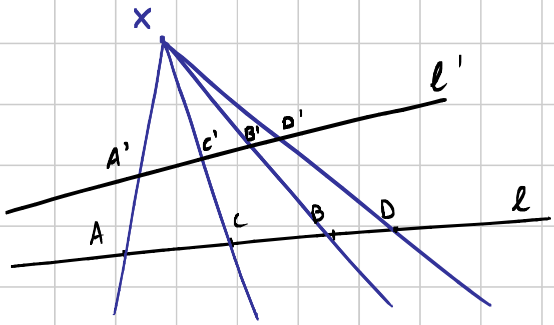
$D'M_A = H_AQ$).

Es 2 : complessi.

PREIMO 2013 - GP

Titolo nota 30/05/2013

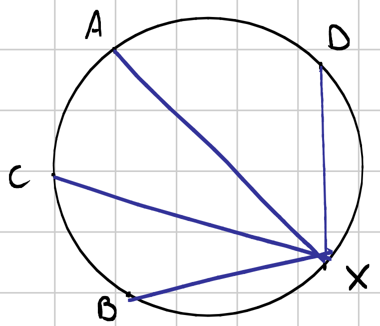
5.



$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \Big/ \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}$$

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{\sin A\hat{X}C}{\sin B\hat{X}C} \cdot \frac{\sin B\hat{X}D}{\sin A\hat{X}D}$$

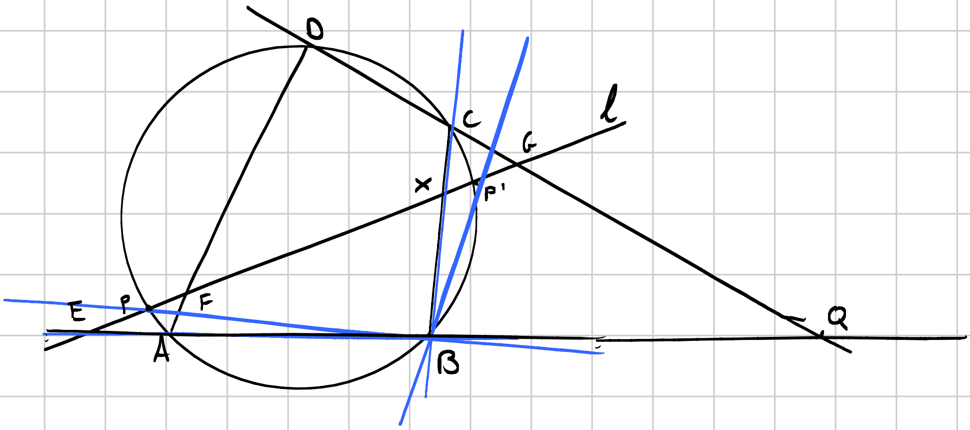
$$(A, B, C, D) = (AX, BX, CX, DX) = (A', B', C', D')$$



(AX, BX, CX, DX)

$\downarrow$

non dipende da x !!



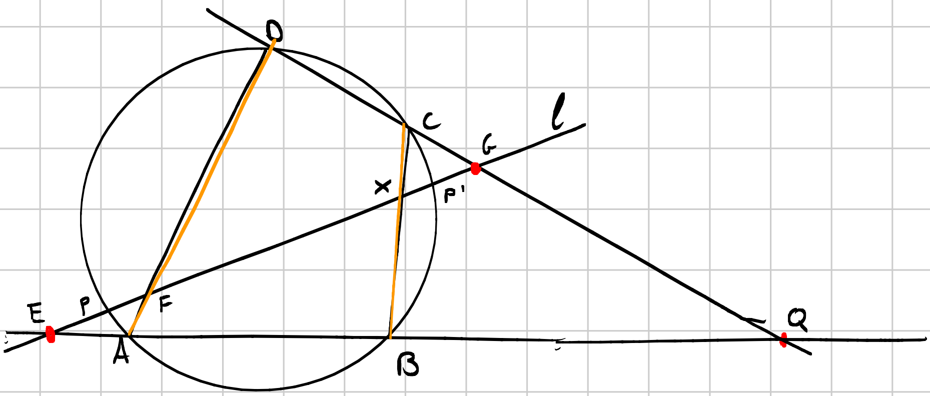
$$(P, P', A, C)_B = (P, P', A, C)_D$$

interseco con ℓ

$$\| \qquad \|$$

$$(P, P', E, X) = (P, P', F, G)$$

$$\frac{PE}{P'E}\cdot\frac{P'X}{PX} = \frac{PF}{P'F}\cdot\frac{P'G}{PG}$$



MENELAO $\quad \Delta EQG \quad$ rette AD e BC

$$\frac{EA}{AQ}\cdot\frac{QD}{DG}\cdot\frac{GF}{FE} = -1 \qquad \frac{EB}{BQ}\cdot\frac{QC}{CG}\cdot\frac{GX}{XE} = -1$$

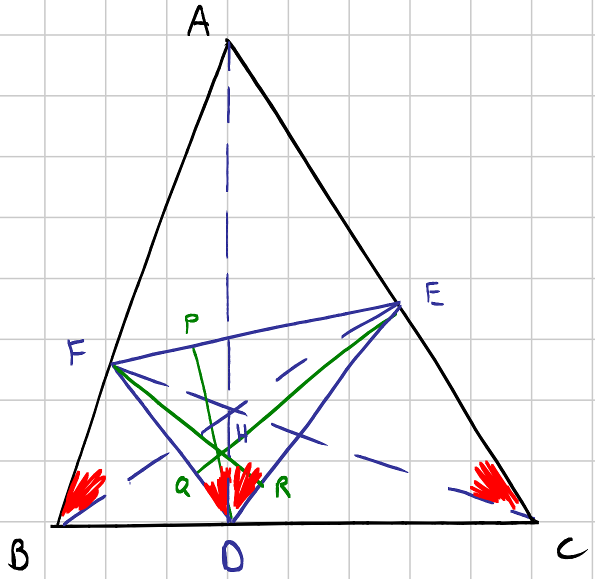
li moltiplico

$EP \cdot EP' =$

$$\frac{EA\cdot EB}{CG\cdot DG}\cdot\frac{\cancel{QD}\cdot\cancel{QC}}{\cancel{AQ}\cdot\cancel{BQ}}\cdot\frac{GF}{FE}\cdot\frac{GX}{XE} = 1$$

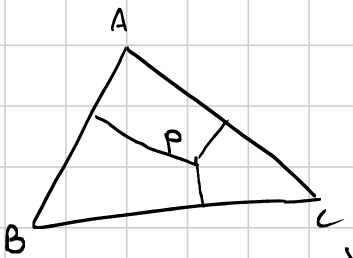
$= GP'\cdot GP$

6.



Oss 1
H incentro di DEF

Oss 2
A, B, C excentri di DEF

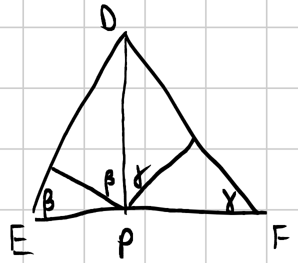


trilineari rispetto a DEF

$P = \left(d(P,BC), d(P,AC), d(P,AB)\right)$

$A(-1, 1, 1)$
e cicliche

α, β, γ angoli di DEF $\quad a = \cos\alpha$ e cicliche



$P = (0, \cos\gamma, \cos\beta) = (0, c, b)$

$r_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0$

$r_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0$

$X = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$

$P = (a_1, b_1, c_1) \qquad Q(a_2, b_2, c_2)$

$r : (b_1c_2 - b_2c_1)x + (c_1a_2 - c_2a_1)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0$

$$r_{AP}: \quad (b-c)x + by - cz = 0$$

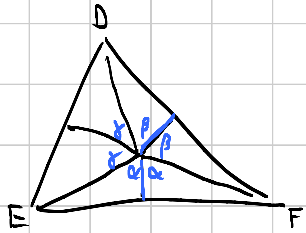
$$r_{BQ}: \quad -ax + (c-a)y + cz = 0$$

$$X = \big(bc + c(c-a),\ ac - c(b-c),\ (b-c)(c-a) + ab \big)$$

$$X = \big(\cancel{c}\,(\underline{b+c-a}),\ \cancel{c}\,(\underline{a+c-b}),\ \cancel{c}\,(\underline{a+b-c}) \big)$$

OK $\to$ AP, BQ, CR concorrono!
(trilineari di X cicliche)

$H\,(1, 1, 1)$



O circocentro di DEF

$O\,(a, b, c)$

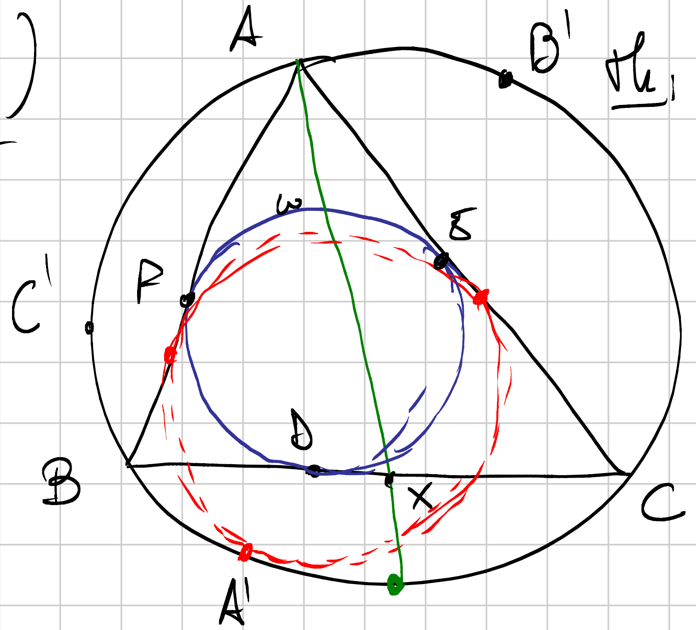
$R\cos\alpha$
$R\cos\beta$
$R\cos\gamma$

$$r_{HO}: \quad (c-b)x + (a-c)y + (b-a)z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c-a & a+c-b & a+b-c \end{pmatrix}$$

$(3^a \text{ riga}) + 2 \cdot (2^a \text{ riga}) - (a+b+c)(1^a \text{ riga}) = 0$

G7)

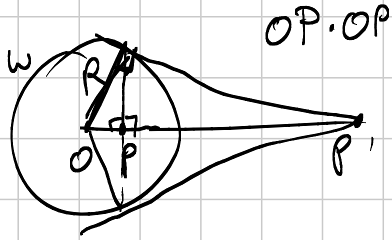


Th: $B'C'DX$ ciclico

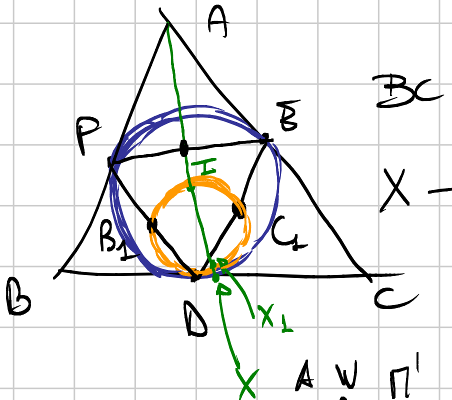
Inversione in ω

- D, E, F fissi
- $A, B, C \to$ pt. medi di EF, FD, DE.

$OP \cdot OP' = R^2$



l'inv. di P' in ω è il pt. medio della corda tra i punti di tangenza delle tangenti a ω da P'.

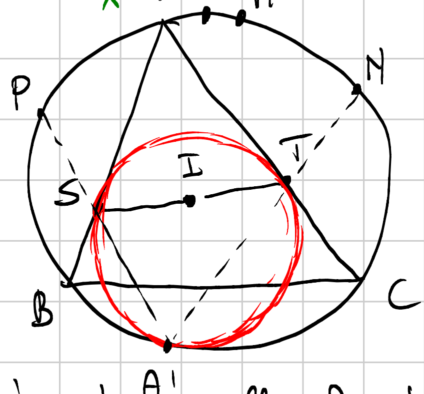


$BC \to \Gamma_a$ cfr per I, B_1, C_1

inv di B · inv di C

$X \to X_1$ = seconda intersezione di $AI = A_1 I$ e Γ_a

Oss:



$A'I$ biseca $B\widehat{A'}C$

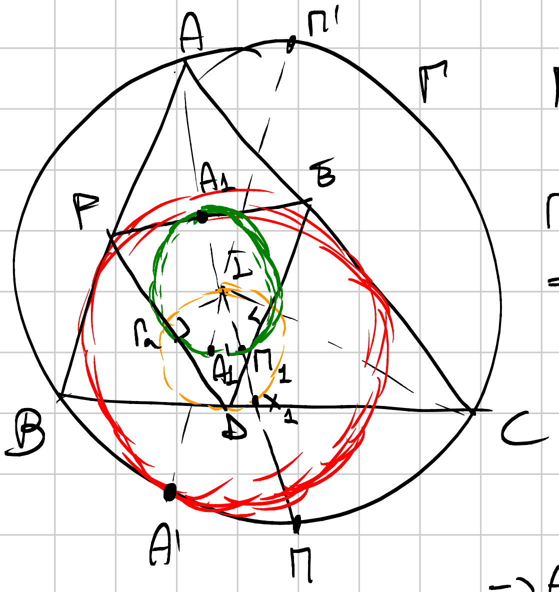
Π' = pt. medio dell'arco BC che contiene A.

$\Rightarrow A', I, \Pi'$ sono allineati.

Sotto Oss: S, I, T allineati e I pt medio ST.

P, S, A', A', T, N allineati, bisett. di $P\widehat{A'}N$ è $A'W$

W = pt medio di AM' $\Rightarrow$ AA', $A'I$ simm. risp ad AW per il lemma delle simm. $\Rightarrow$ A', I, M' allineati.



Γ_1 = cfr per i punti medi di $\overset{\Delta}{DEF}$

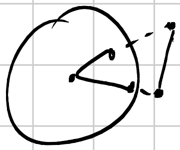
M pt medio di $\widehat{BC}$

$\Rightarrow M_1$ = seconda int. di AI con Γ_a

$A_1\hat{M_1}A_1' = I\hat{M_1}A_1' = I\hat{A'}M =$

$= M'\hat{A'}M = \frac{\pi}{2}$

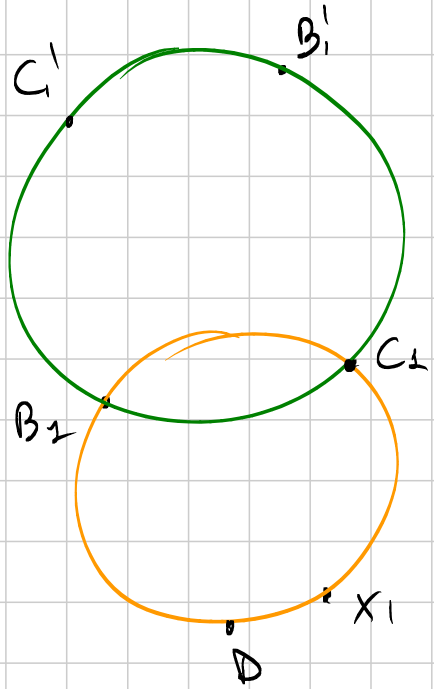
$\Rightarrow A_1'$ è diam. opp. a A_1 in Γ_1



$\Rightarrow B_1'C_1' \parallel B_1C_1$

$I\hat{X_1}D = \frac{\pi}{2} \Rightarrow X_1D \perp IX_1 - IA = IA_1 = IM_1$

$\Rightarrow X_1D \parallel B_1C_1$



B_1C_1 corda comune

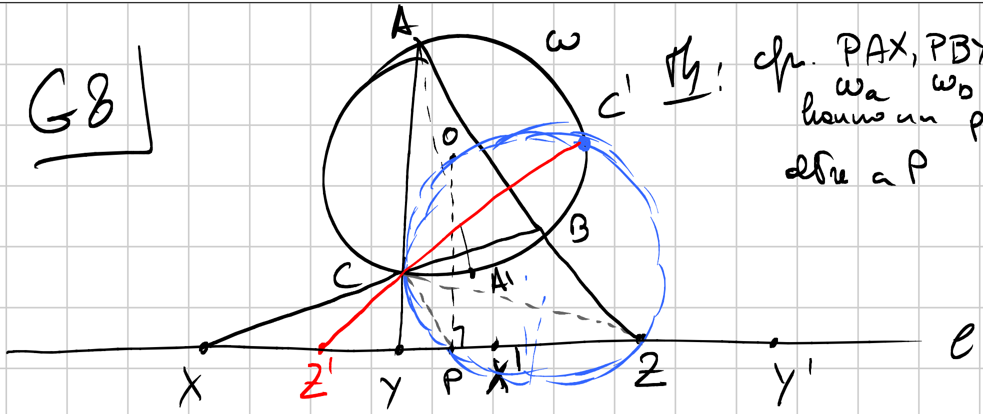
$\Rightarrow$ Asse di B_1C_1 contiene i centri

$\Rightarrow$ è asse anche di DX_1 e $B_1'C_1'$

$DX_1B_1'C_1'$ è un trapezio isoscele

$\Rightarrow$ ciclico.

G8



Th: cfr. PAX, PBY, PCZ
$\omega_a \quad \omega_b \quad \omega_c$
hanno un punto in comune oltre a P

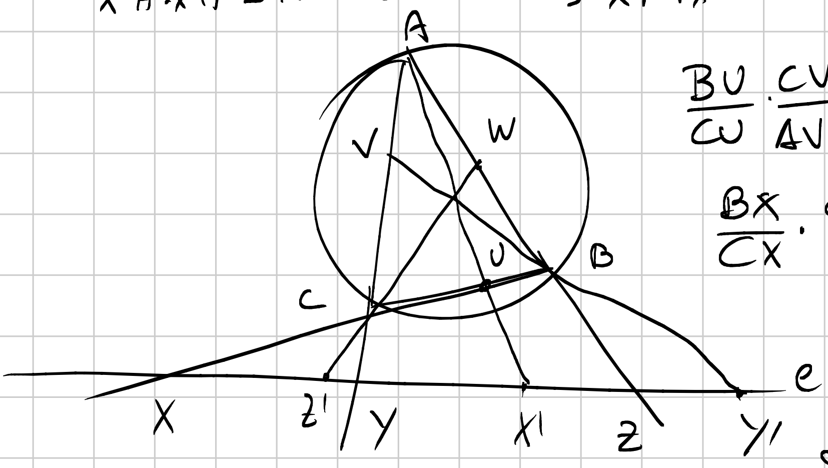
Th ⇒ cfr sono coassiali ⇔ gli assi radicali di $\{\omega_a, \omega\}$ $\{\omega_b, \omega\}$ e $\{\omega_c, \omega\}$ concorrono.

$\omega \cap \omega_a = \{A, A'\} \qquad \omega \cap \omega_b = \{B, B'\}, \qquad \omega \cap \omega_c = \{C, C'\}$

$X' = AA' \cap \ell \qquad Y' = BB' \cap \ell \qquad Z' = CC' \cap \ell$

$$\mathrm{pow}_{\omega_a}(X') = X'P \cdot X'X = X'P\,(X'P + PX) = (X'P)^2 + X'P \cdot PX$$

$$X'A' \cdot X'A = X'O^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad X'P \cdot PX = OP^2 - r^2 = k^2$$



$$\frac{BU}{CU} \cdot \frac{CV}{AV} \cdot \frac{AW}{BW} \overset{?}{=} -1$$

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$

vero x Menelao

$$\frac{BU}{CU} \Big/ \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CV}{AV} \Big/ \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AW}{BW} \Big/ \frac{AZ}{BZ} \overset{?}{=} -1$$

(B, C, U, X) proietto da BC su ℓ da A

$= (Z, Y, X', X)$ $\qquad t \to -\dfrac{t}{k^2}$

$$\frac{zx'}{yx'}\cdot\frac{\cancel{yx}}{\cancel{zx}}\cdot\frac{xy'}{zy'}\cdot\frac{\cancel{zy}}{\cancel{xy}}\cdot\frac{yz'}{xz'}\cdot\frac{\cancel{xz}}{\cancel{yz}}=$$

$$=\frac{zx'}{yx'}\cdot\frac{yz'}{zz'}\cdot\frac{xy'}{zy'}\cdot\frac{zz'}{xz'}=-1$$

$$(z,y,x',z') \qquad (x,z,y',z')$$

$$t\to-\frac{t}{k^2}$$

$$(z',y',x,z)$$

PRE IMO 2013 – Teoria dei Numeri – Mattino

Titolo nota 29/05/2013

Esercizio 1 k tali che

a) $\forall p$ dispari $\exists n > 0$ con $p \mid k^n - n$ $\quad p \mid k^{n+1} - (n+1)$

b) $\forall p$ dispari $\exists n > 0$ con $p \mid k^n - n^2$ $\quad p \mid k^{n+1} - (n+1)^2$

vale per a) e b)

Oss. banale: se p è dispari $p \nmid k$. $\quad k = 2^m$

a) $p \mid k^n - n \quad k^{n+1} \equiv n+1 \pmod p \quad k^{n+1} \equiv nk \pmod p$

$nk \equiv n+1$, $\quad n(k-1) \equiv 1 \quad k-1$ è invertibile mod p

$k - 1 = 2^b \quad b \geq 1$ impossibile $k = 2^b + 1$ è divisibile per un primo dispari

$b = 0 \quad \boxed{k = 2}$

$n \equiv 0 \pmod{p-1} \qquad n \equiv 1 \pmod p$

b) $\boxed{k = 2^m}$. Supponiamo che $p \mid k - 1$

$k \equiv 1 \pmod p \qquad p \mid k^n - n^2 \qquad n^2 \equiv 1 \pmod p$

$p \mid n^2 k - (n+1)^2 \qquad n^2 - (n+1)^2 \equiv 0 \pmod p$

$2n + 1 \equiv 0 \ (p) \qquad n = \frac{p-1}{2} \pmod p$

$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv 1 \pmod p \qquad (p-1)^2 \equiv 4 \pmod p$

$p = 3$

$\boxed{k - 1 = 3^t}$

$2^m = 3^t + 1 \qquad m = 2s$

$3^t = 2^{2s} - 1 = (2^s + 1)(2^s - 1)$

$s = 1 \qquad t = 1$

$\boxed{k = 4} \qquad n \equiv 0 \pmod{p-1}$

$n \equiv 1 \pmod p$

Esercizio 2 $p_1, \dots, p_n$ primi distinti

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente

$A_i = \{f(p_i k + r_i) \mid k = 1, 2 \dots\}$ progressioni aritmetiche

$\forall i \neq j \quad \exists\ x_{ij}$ che sta in entrambe le prog. aritm.

A_i ha ragione d_i.

$$f(x_{ij} + p_i p_j) = \begin{cases} f(x_{ij}) + d_i p_j \\ f(x_{ij}) + d_j p_i \end{cases} \Rightarrow d_i p_j = d_j p_i$$

$d = d_i / p_i$ è costante

Posso risolvere :
$$x \equiv r_i \pmod{p_i}$$
$$y + i \equiv 0 \pmod{p_i}$$

$$a = x + y$$
$$f(x+y+i) = f(x) + \frac{y+i}{p_i} d_i = f(x) + dy + di$$

Esercizio 3 $\quad n = n_1^{a_1} n_2^{e_2} \dots n_k^{a_k} = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_k-1)} - 1$

$n_i > 3 \quad (n_i$ dispari$) \quad n = 2^m - 1$

m grande $\quad 2^m - 1 > m^3 \quad (m \geqslant 10)$

$$m^3 = \left(\frac{n_1-1}{2}\right)^3 \dots \left(\frac{n_k-1}{2}\right)^3 \geqslant \prod_{i=1}^{k} \left\{4\left(\frac{n_i-1}{2}\right)\right\} > \prod_{i=1}^{k} n_i = n = 2^m - 1$$

Unica sol. $\quad m = 3$

Esempio : escludere $m = 8 \quad 2^8 - 1 = 255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$

$n_1 = 15 \quad n_2 = 17 \qquad n_1 = 51 \quad n_2 = 5 \qquad n_1 = 255$

$$n = n_1^{a_1} n_2^{e_2} \dots n_k^{a_k} = \boxed{2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_k-1)} - 1}$$

p il più grande primo di n.

$p \leq \max\{n_i\}$

$2^t - 1$ esiste $p > t+1$ primo t.c. $p \mid 2^t - 1$

Teorema di Zsigmondy(?): $\forall a, n \ \exists p : \mathrm{Ord}_p(a) = n$

($a^n - 1$ ha un primo che $a^1 - 1, a^2 - 1, \dots, a^{n-1} - 1$ non avevano)

Tranne che per $a = 3$, $n = 2$.

$\mathrm{Ord}_p(2) = t \Rightarrow t \mid p-1 \Rightarrow \boxed{p \geq t+1}$

$$1 + \frac{1}{2^k}(n_1 - 1) \cdots (n_k - 1) \leq p \leq \max\{n_i\}$$

Esercizio 4 $\quad \{n\sqrt{3}\} > \dfrac{c}{n\sqrt{3}}$.

$n = 1 \quad 1 > \dfrac{c}{\sqrt{3}} \quad c < \sqrt{3}$

$$n\sqrt{3} - \frac{c}{n\sqrt{3}} > [n\sqrt{3}] = k$$

$$\boxed{3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > 3n^2}$$

$k^2 < 3n^2$

$k^2 \neq 3n^2 - 1$

$k^2 \leq 3n^2 - 2$

Equazione di Pell

$$3n^2 - k^2 = 2$$

$n = 1 \quad k = 1 \qquad (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 2$

$(2 + \sqrt{3})^m (2 - \sqrt{3})^m = 1$

$$\underbrace{\left[(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^m\right]}_{x_m + \sqrt{3} y_m} \underbrace{\left[(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^m\right]}_{x_m + \sqrt{3} y_m} = 2$$

Se $c > 1$ $3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} \leq 3n^2 - 2$ per n grande

$\rightarrow$ non funziona.

$\rightarrow$ $c \leq 1$

$c = 1$ FUNZIONA $3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > 3n^2 - 2$

Pre IMO 2013 TdN – Pomeriggio

Titolo nota 29/05/2013

N7 Trovare tutte le coppie di interi coprimi a, b tali che esistono finiti interi n t.c.

$$\boxed{n^2 \mid a^n + b^n}$$

R: $a+b = 2^k$, $\{a, b\} = \{1, 2\}$.

Dim. [$a+b = 2^k$ allora $\nexists$ n t.c.]

Step 1 $(a, n) = (b, n) = 1$ $p \mid a$ $p \mid n$ $\Rightarrow$ $p \mid b$

Step 2 n è per forza dispari. Altrimenti ($n = 2k$)

$$4 \mid n^2 \mid a^{2k} + b^{2k}$$

$$4 \mid (a^k)^2 + (b^k)^2$$

a, b dispari, ma allora $(a^k)^2 + (b^k)^2 \equiv 2 \ (4)$ assurdo.

Step 3. $a+b = 2^k$ $n \neq 1$ ma allora $\exists$ p.p.p. che divide n p

$$p^2 \mid a^n + b^n$$

$$a^n \equiv -b^n \ (p) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \equiv (-1)^2 \ (p)$$

$\mathrm{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right) \mid 2n \qquad \mathrm{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right) \mid p-1$

$\mathrm{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right) \mid (2n, p-1) = 2$

$a^n \equiv b^n \ (p) \rightsquigarrow 2a^n \equiv 0 (p) \qquad p=2$ no!

$\frac{a}{b} \equiv -1 \ (p) \qquad a+b \equiv 0 \ (p) \qquad p \mid a+b = 2^k$ ↯

$a=2, b=1$

$n^2 \mid 2^n + 1^n \qquad p$ è p.f.p. che divide n

$\Rightarrow p \mid 2+1 = 3 \qquad p=3$

$n = 3k$

$9k^2 \mid 8^k + 1^k \Rightarrow k^2 \mid 8^k + 1^k$

$\Downarrow \ k \neq 1$

p.f.p. $\mid 8+1 = 9$

$3 \mid k$

$v_3(9k^2) \leq v_3(8^k + 1^k)$

$\parallel \qquad \parallel$

$2 + 2v_3(k) \qquad v_3(8+1) + v_3(k) =$

$= 2 + v_3(k)$

$2 + 2v_3(k) \leq 2 + v_3(k) \Rightarrow v_3(k) \leq 0$

$a=1 \quad b=2 \rightsquigarrow n=1, \ n=3.$

Lemma (LTE-w) $p \mid a+b$ $(p,a)=1$ $(p,b)=1$

$$p \mid \frac{a^p+b^p}{a+b} \quad \text{ma} \quad p^2 \nmid \frac{a^p+b^p}{a+b}$$

Cor (LTE) $p \mid a-b$ $(p,a)=1$ $(p,b)=1$

$$v_p(a^n-b^n) = v_p(a-b) + v_p(n).$$

2a parte

CLAIM. $\exists \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ primi dispari distinti t.c.

$$(p_1 p_2 \cdots p_k)^2 \mid a^{p_1 p_2 \cdots p_k} + b^{p_1 p_2 \cdots p_k} \qquad p_1 p_2 \cdots p_k = n_k$$

$k=1$ $\quad p_1^2 \mid a^{p_1} + b^{p_1}$ come lo trovo

$a+b \neq 2^k$ $\quad p_1 \mid a+b \implies p_1^2 \mid a^{p_1}+b^{p_1}.$

$k \Rightarrow k+1$

$$n_k^2 \mid a^{n_k} + b^{n_k}$$

$$n_{k-1}^2 p_k^2 \mid a^{n_{k-1} p_k} + b^{n_{k-1} p_k}$$

$$p_k \mid a^{n_{k-1}} + b^{n_{k-1}}$$

$$\left(\underbrace{\frac{\left(a^{n_{k-1}}\right)^{p_k} + \left(b^{n_{k-1}}\right)^{p_k}}{a^{n_{k-1}} + b^{n_{k-1}}}}_{\downarrow} , \; a^{n_{k-1}} + b^{n_{k-1}} \right) = p_k$$

$$p_k^2 \nmid A_k \qquad \left(\frac{A_k}{p_k}, n_k \right) = 1$$

$$p_k \mid A_k$$

$$\frac{A_k}{p_k} > 1 \qquad A_k \text{ dispari} \Rightarrow \exists \; p_{k+1} \notin \{p_1, \dots, p_k\}$$

$$p_{k+1} \mid A_k .$$

$$\frac{A^{p_k} + B^{p_k}}{A+B} > p_k$$

$$\left(A^{p_k} + B^{p_k} \right) > p_k \left(A + B \right) \qquad \max\{|A|,|B|\} \geq 3$$

$$A > B \qquad A > 0$$

$$\left(A^{p_k - 1} - B A^{p_k - 2} + \dots + B^{p_k - 1} \right) > p_k$$

$$\left(A^{p_k - 2}(A - B) + \cancel{A^{p_k - 4} B^2 (A - B) \dots} + B^{p_k - 1} \right) \geq$$

$$\geq \left(A^{p_k - 2} + B^{p_k - 1} \right) > 3^{p_k - 2} = (1+2)^{p_k - 2} \geq 1 + 2p_k - 4 =$$

$$= p_k + (p_k - 3) \geq p_k .$$

Esercizio 5 $\quad m+n - \dfrac{3mn}{m+n} = \dfrac{2011}{3}$

$$3(m+n)^2 - 9mn = 2011\,(m+n)$$

$d=(m,n) \qquad m = ad \qquad n = bd$

$$3d\left(a^2 - ab + b^2\right) = 2011\,(a+b)$$

$3 \mid a+b \quad \to \quad 9 \mid a+b$

$$d = k\,\frac{a+b}{9}$$

$$k\left(a^2 - ab + b^2\right) = 3 \cdot 2011$$

$a^2 - ab + b^2 = \cancel{3}, \boxed{3 \cdot 2011} \qquad a^2 - ab + b^2 \geq ab$

$k = 1 \qquad 9d = a+b$

Poss. supporre $a \leq b \qquad \underline{a^2 - ab} + b^2 \leq b^2 \qquad \boxed{b \geq 78}$

$a+b \geq 81 \qquad d \geq 9$

$b = 9d - a$

$* \qquad a^2 - 9ad + 27d^2 - 2011 = 0$

$\Delta = 8044 - 27d^2 \qquad (\Delta \geq 0)$

$$d \leq 17$$

Considerando mod p $\quad p = 5, 7$

restano solo i casi $\quad d = 7, 8, 13. \qquad (d \geq 9)$

$d = 13 \qquad m = 377 \qquad n = 1144.$

Esercizio 6 $\quad 1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}$

p primo dispari

$i^{p-1} \equiv 1 \pmod p \qquad 1 \leq i \leq p-1.$

$a_i = i^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$

$$(p-1)!^{\,p-1} - 1 = \prod_{i=1}^{p-1} i^{p-1} - 1 = \prod_{i=1}^{p-1}(1+a_i) - 1$$

$$= \cancel{1} + \sum_{i=1}^{p-1} a_i + \sum_{i<j} a_i a_j + \dots \quad \cancel{-1}$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{p-1} a_i \pmod{p^2}$$

$$\text{LHS} = p-1 + \sum_{i=1}^{p-1} a_i \equiv (p-1)!^{\,p-1} + p-2 \pmod{p^2}$$

$$\overset{?}{\equiv} p + (p-1)! \pmod{p^2}$$

Mi serve $(p-1)!^{\,p-1} \equiv (p-1)! + 2 \pmod{p^2}$

Wilson: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

$$(p-1)! = -1 + kp$$

$$(p-1)!^{\,p-1} \equiv 1 - (p-1)kp \equiv 1 + kp \equiv 2 + (-1+kp) \pmod{p^2}$$

$$p(x) = (x-1)(x-2)\cdot \ldots \cdot (x-(p-1)) =$$

$$= x^{p-1} + c_{p-2}\,x^{p-2} + \dots + c_1 \cdot x + (p-1)!$$

$$c_k = (-1)^k \cdot \sigma_k^{p-1}(1, 2, 3, \dots, p-1)$$

$$\sigma_k^{p-1}(x_1, \dots, x_{p-1}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}$$

$$\sigma_k^{p-1}(1, \dots, p-1) \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{per } 1 \le k \le p-2 \\ -1 \pmod{p} & \text{per } k = p-1 \end{cases}$$

$$0 = \sum_{n=1}^{p-1} p(n) = \sum_{n=1}^{p-1} n^{p-1} \underbrace{+ c_{p-2} \sum_{n=1}^{p-1} n^{p-2} + \dots +}_{\text{multipli di } p^2} \sum_{n=1}^{p-1} (p-1)!$$

$$\sum_{n=1}^{p-1} n^k \equiv 0 \ (p) \quad \text{per} \quad 1 \leq k \leq p-2$$

$$0 \equiv \sum_{n=1}^{p-1} n^{p-1} + (p-1)\cdot(p-1)! \equiv \underbrace{p\cdot(p-1)!}_{p(-1)} - (p-1)! + \sum \equiv$$

$$\equiv -p - (p-1)! + \sum \qquad (\text{mod } p^2)$$

Esercizio 8 $\quad \phi(5^m-1) = 5^n-1 \quad \Rightarrow \quad (m,n) > 1.$

Sol. (per assurdo): supponiamo $(m,n) = 1$.

$$(5^m-1, 5^n-1) = 5^{(m,n)} - 1 = 5-1 = 4$$

$$(x^m-1, x^n-1) = x^d - 1 \qquad d = (m,n)$$

Divisori primi di 5^m-1,

$p^2 \mid 5^m - 1 \qquad p \mid \phi(5^m-1) = 5^n-1 \qquad p \mid 4 \qquad p=2$

$$5^m - 1 = 2^\alpha p_2 \cdots p_k \qquad \alpha \geq 2$$

Se fosse $5^m-1 = 2^\alpha \qquad \phi(5^m-1) = \frac{5^m-1}{2}$

$(5^n-1, 5^m-1) = 5^n-1 \mid 4 \qquad n \leq 1.$

Allora c'è un $p_i \neq 2 \quad \rightarrow$ nella ϕ c'è $p_i - 1$

Quindi $2^\alpha \mid 5^n-1 \quad \rightarrow \quad \alpha \leq 2 \qquad \boxed{\alpha = 2}$

Ricapitolando $\quad 5^m - 1 = 4 \cdot p_2 \cdots p_k$

$$5^n - 1 = 2\,(p_2-1)\cdots(p_k-1)$$

Oss. m deve essere DISPARI (m pari $5^m \equiv 1 \pmod 8$)

$$5^{m+1} \equiv 5 \pmod{p_i}$$

esponente pari

5 è un quadrato mod $p_i \qquad \left(\frac{5}{p_i}\right) = +1$

RQ $\Rightarrow \left(\frac{p_i}{5}\right) = +1$ $\qquad p_i \equiv \cancel{1}, 4 \pmod 5$

Se fosse $p_i \equiv 1 \pmod 5$ $\qquad 5 \mid p_i - 1 \mid \phi(5^n - 1) = 5^n - 1$ $\boxed{NO}$

Quindi $p_2, \dots, p_k$ sono tutti $\equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$

$-1 \equiv 5^m - 1 = 4 p_2 \cdots p_k \equiv (-1)^k \pmod 5$

k dispari.

$5^n - 1 = 2(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1) \equiv 2 \cdot 3^{k-1} \pmod 5$

$k - 1 = 2t \qquad 3^2 \equiv -1 \pmod 5$

$-1 \equiv 5^n - 1 \equiv 2(-1)^t \pmod 5$

$\boxed{\text{ASSURDO}}$